Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXIX Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская, Т. В. Караваева, А. К. Ковальджи, Ю. Г. Кудряшов, А. К. Кулыгин, С. В. Маркелов, Н. М. Нетрусова, И. В. Раскина, Р. М. Фёдоров, А. В. Хачатурян, Е. А. Чернышёва, И. В. Ященко.

При поддержке компьютерного супермаркета «НИКС»

Москва
12 февраля 2006 года

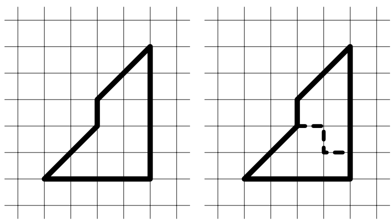
6 класс

Задача 1. Доктор Айболит раздал четырём заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон — на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону? [***3 балла***] (А. Хачатурян)

Ответ. 503 таблетки.

Решение. Пока звери не съели лекарство, заберём одну таблетку у носорога, две у бегемота и три у слона. Теперь у всех четверых поровну. Забрали мы 6 таблеток, то есть осталось их 2000 — по 500 у каждого. У слона забрали 3 таблетки, то есть Айболит прописал слону 503 таблетки.

Задача 2. Разрежьте фигуру (см. первый рисунок) на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. [***4 балла***] (С. Маркелов)



Ответ. Искомый разрез показан на втором рисунке.

Задача 3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.) [***5 баллов***] (А. Ковальджи)

Ответ. На 3-й этаж.

Решение. Если на этаже не более трёх квартир, то в десяти подъездах их не более, чем $10\cdot 9\cdot 3 = 270$, то есть в 10-м подъезде квартиры № 333 не будет. Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее, чем $9\cdot 9\cdot 5 = 405$ квартир, то есть искомая квартира будет не в десятом подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах $9\cdot 9\cdot 4 = 324$ квартиры. Тогда в десятом подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем — с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.

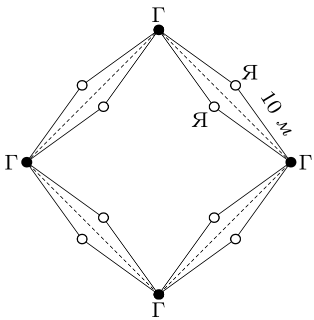
Задача 4. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.) [***5 баллов***] (Т. Гейдер, А. Хачатурян)

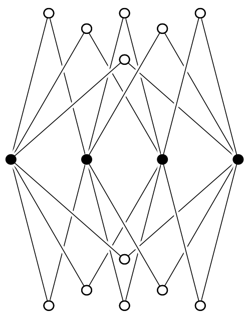
Решение. Первый способ. Пусть Таня нальёт из полного малого кувшина речную воду в большой, а затем наполнит малый и из него дольёт большой доверху. Далее Тане надо опорожнить большой сосуд и вылить в него остаток из малого. Если малый был на 3 литра, то сейчас в большом 1 литр, иначе — 3 литра. Теперь пусть Таня снова попытается перелить воду из полного малого кувшина в большой. Если это ей удастся, то малый был трёхлитровым, если вода польётся через край, — четырёхлитровым.

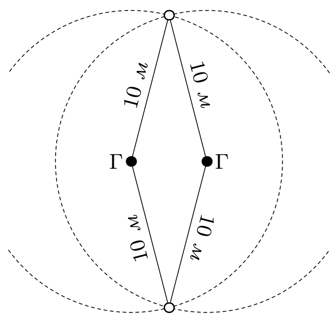
Второй способ. Если бы у Тани большой кувшин вмещал 10 литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды. Если вода польётся через край, то малый на 4 литра, если нет, то на 3. С пятилитровым кувшином такая проверка возможна, если Таня опорожнит пятилитровый кувшин, когда тот заполнится.

Задача 5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растёт четыре груши, а ещё есть яблони, причём они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если Вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так. [***9 баллов***] (А. Ковальджи, А. Хачатурян)

Решение. Возможны различные расстановки яблонь и груш, например, такая, как показана на первом рисунке. Наибольшее число яблонь можно поместить, если груши растут достаточно густо. Например, если посадить груши в ряд через 5 метров, то найдётся место для 12 яблонь (см. второй рисунок).







Докажем, что больше двенадцати яблонь быть не может. В самом деле, рассмотрим две какие-то груши. На расстоянии 10 метров от них может быть только две яблони — одна по одну сторону от линии груш, другая — по противоположную (см. третий рисунок). Поэтому каждая пара груш «обслуживает» не более чем две яблони. Так как пар груш ровно шесть (пересчитайте!), то максимальное число яблонь равно 12.

Задача 6. Пять футбольных команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

[***8 баллов***] (А. Заславский)

Решение. Каждая команда провела 4 игры. Ясно, что первая команда один раз сыграла вничью, а остальные игры проиграла. Вторая имеет две ничьи и два поражения. Третья команда пять очков на одних ничьих набрать не могла, стало быть, она один раз выиграла, кроме того, у неё две ничьи и поражение. Четвёртая команда победила два раза (если бы один, то ей пришлось бы набрать в трёх играх на одних ничьих 4 очка, что невозможно). Также у этой команды есть ничья и поражение. В итоге первые четыре команды выиграли 3 раза, а проиграли 7 раз. Однако число побед должно равняться числу поражений. Значит, 4 раза они проиграли пятой команде, и у той 12 очков. Нетрудно привести пример турнира, где такое распределение очков возможно. Пусть пятая команда выиграла у всех, четвёртая — у первой и второй, третья — у первой, а все остальные игры закончились вничью. Тогда у каждой команды будет названное число очков.

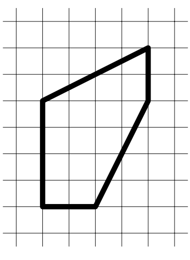
7 класс

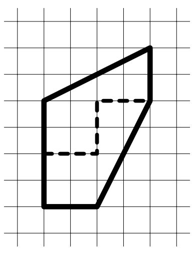
Задача 1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

[***4 балла***] (А. Ковальджи, И. Раскина)

Ответ. $\frac{6}{7}$ и $\frac{1}{7}$.

Решение. Треть доли Пуха увеличила втрое порцию Пятачка, то есть сама была вдвое больше неё. Значит, вся доля Пуха была в 6 раз больше доли Пятачка, то есть у Пуха было вначале $\frac{6}{7}$ торта, а у Пятачка — $\frac{1}{7}$.

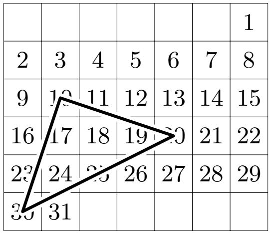


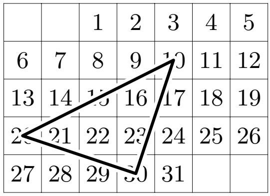


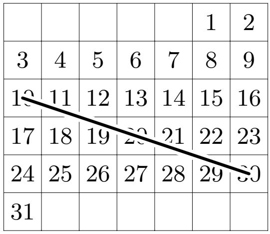
Задача 2. Разрежьте изображённый на первом рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. [***5 баллов***] (С. Маркелов)

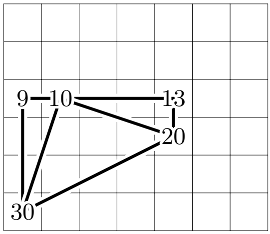
Ответ. Искомый разрез показан на втором рисунке.

Задача 3. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа? [***5 баллов***] (Н. Нетрусова)









Ответ. Наташа права.

Решение. Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. При этом существует всего 2 существенно различных варианта расположения треугольника 10-20-30 (см. первые два рисунка), все остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника. Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30-9-10 угол 9 прямой (см. четвёртый рисунок), и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10-13-20. Ясно, что стороны 9-30 и 10-13 равны; аналогично, равны стороны 9-10 и 13-20. Поэтому треугольники 9-30-10 и 13-10-20 равны по двум сторонам и углу. Значит, отрезки 10-30 и 10-20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9-10-30 равна $180° - 90° = 90°$. Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развёрнутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9-10-30. Значит, угол 10 тоже равен $90°$. Итак, треугольник 10-20-30 является равнобедренным прямоугольным.

Задача 4. Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: $2006 : 17 = 118$.

а) Назовите первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено. [***2 балла***]

б) Назовите последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено. [***5 баллов***] (Фольклор)

Ответ. а) 1; б) 1989.

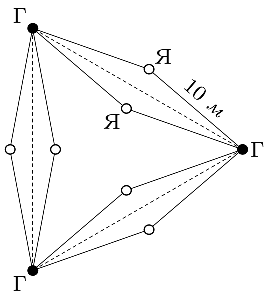
Решение. а) Первый матпраздник был в 1990 году. Ясно, что год его проведения делится на его номер, потому что номер равен единице.

б) Пусть N — номер матпраздника. Тогда год его проведения равен $(2006-17)+N=1989+N$. Пусть год проведения делится на номер, то есть $1989+N$ делится на N. Значит, 1989 делится на N. Поскольку мы ищем наибольшее возможное N, то нужно взять $N=1989$.

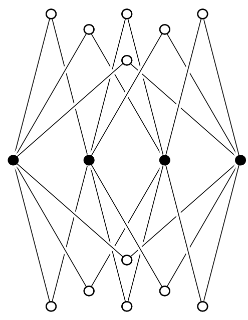
Задача 5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

[*7 баллов*] (А. Ковальджи, А. Хачатурян)

Ответ. Например, сад может выглядеть так, как показано на первом рисунке.



Комментарий. На самом деле, можно так расположить груши и яблони, что яблонь будет во много раз больше, чем груш. Расставим груши на одной прямой через равные расстояния так, чтобы расстояние между первой и последней не превосходило 20 метров. После этого берём любые две груши (назовём их A и B) и ставим яблоню в вершине равнобедренного треугольника с основанием AB и боковыми сторонами длиной 10 метров. Ещё одну яблоню ставим симметрично этой яблоне относительно линии груш (см. второй рисунок). Значит, яблонь можно поставить вдвое больше числа пар груш, а оно равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Мы сможем поставить $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n(n-1)$ яблонь. Заметим, что в этом случае отношение числа яблонь и числа груш равно $\frac{n(n-1)}{n}=n-1$, значит, выбирая достаточно большие n, это отношение можно сделать сколь угодно большим.



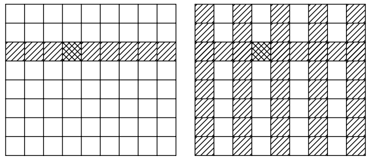
Задача 6. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника

а) 8×9 клеток? [*4 балла*]

б) 8×10 клеток? [*7 баллов*] (И. Раскина)

Ответ. а) Да; б) Нет.

Решение. а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (см. первый рисунок). Далее будем красить столбцы через один, начиная закраску от покрашенного ряда (см. второй рисунок). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.



Комментарий. Данный способ покраски обобщается на тот случай, когда хотя бы одна из сторон прямоугольника имеет нечётную длину. Повернём прямоугольник так, чтобы его ширина была нечётной, а после этого повторим только что описанную процедуру: красим ряд нечётной длины, и так далее.

б) Первый способ. Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на 1 (если таких соседей было 3), то есть полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено чётное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечётен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника 8×10 равен 18, то есть чётный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Второй способ. Докажем, что для чётных m и n прямоугольник $m \times n$ нельзя закрасить ни при какой начальной закрашенной клетке. Посмотрим, сколько всего сторон имеют клеточки (включая внешние). Сторон клеточек $m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n$, то есть чётное число. Предположим, что мы смогли закрасить весь прямоугольник. Будем называть сторону *закрашенной*, если закрашена хотя бы одна из прилегающих к ней клеток. Вначале закрашено 4 стороны. На каждом шаге закрашивается 1 или 3 стороны. Всего таких шагов нужно сделать $nm-1$. Поскольку m и n чётны, то число $nm-1$ нечётно. Итак, если бы мы смогли закрасить весь прямоугольник, то было бы закрашено 4+(нечётное число раз по нечётному числу) сторон, то есть нечётное число, но, как мы уже посчитали, таких сторон чётное число, значит, весь прямоугольник закрасить нельзя.