МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии
(многовариантные задачи)
(типовые задания С4)

Прокофьев А.А.

Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение

Задачи С4 из тренировочных, диагностических, репетиционных и экзаменационных работ ЕГЭ 2010 и 2011 имеют характерную особенность. В отличие от практики единого экзамена прошлых лет и подавляющего большинства задач школьного учебника эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате удается построить несколько чертежей, удовлетворяющих условию задачи. Подобные задачи называют *многовариантными*. Перебор вариантов является частью решения задач такого типа. Заметим, что перебор может сократиться за счет дополнительной информации, указанной в условии задачи.

Отметим, что в 2010 году процент приступивших к выполнению задания С4 составил 14%, а в 2011 году – 15,6%. При этом, например, в 2011 году от 1 до 3 баллов за задачу С4 смогли получить только 4,44% участников экзамена. Большинство выпускников испытывали трудности с рассмотрением второго случая расположения геометрических фигур.

При проверке задачи С4 выставление баллов производится в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Геометрические задачи на вычисление в большинстве случаев представляют собой задачи на реализованные ситуации, то есть в них идет речь о некоторой *заданной* конфигурации и требуется вычислить какой-либо ее неизвестный элемент. Реализованность ситуации в условии задачи подразумевает лишь существование соответствующей конфигурации, но не предопределяет ее единственность. В таких задачах какие-либо исследования соотношений между числовыми данными, доказывающие существование конфигурации, являются излишними.

В данном пособии приведена некоторая классификация многовариантных планиметрических задач, которая не претендует на отражение в полном объеме всего многообразия подобных задач, но включают в себя большую часть, с которой придется столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

В планиметрических задачах под конфигурацией понимается конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности. Иначе ее называют геометрической фигурой.

Линейной считают фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую.

Прямолинейной фигурой считают любой многоугольник.

Плоской геометрической фигурой называют любую совокупность точек и линий на плоскости.

Настоящее пособие содержит три главы. В первой главе приведены основные теоремы и факты, необходимые для решения планиметрических задач и приведены наборы тренировочных задач.

Во второй и третьей главах представлена методика подготовки к решению многовариантных планиметрических задач, начиная с простейших ситуаций до достаточно сложных.

В конце приведен большой набор упражнений, к которым приведены ответы.

Желаем успеха!

Авторы.

Глава 1. Основные определения и теоремы планиметрии

1.1. Треугольник

Стороны треугольника

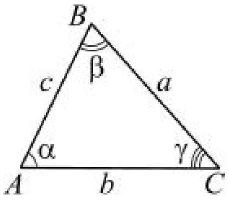


Рис. 1

О1. *Периметр треугольника* – сумма длин его сторон (см. рис.1):

$$P = a + b + c.$$

Т1. Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны (**неравенство треугольника**):

$$\begin{cases} a+b>c, \\ b+c>a, \\ a+c>b. \end{cases}$$

Следствие. Если выполняется равенство *AC* + *CB* = *AB*, то точка *C* лежит на отрезке *AB* между точками *A* и *B*.

1. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96 *см*, а стороны пропорциональны числам 3, 4, 5.

2. Периметр треугольника *ABC* равен 75 *см*. Найдите стороны треугольника, если сторона *AC* вдвое больше стороны *AB*, а сторона *BC* на 10 *см* меньше стороны *AC*.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 32 *см*. Основание относится к боковой стороне как 6:5. Определите стороны треугольника.

4. Может ли быть треугольник с такими сторонами: **а)** 5 *м*, 10 *м*, 12 *м*; **б)** 1 *м*, 2 *м*, 3,3 *м*; **в)** 1,2 *м*, 1 *м*, 2,2 *м*?

Углы треугольника

Т2. Во всяком треугольнике сумма углов равна 180° или π радиан (см. рис. 1), т.е. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Следствие 2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Следствие 3. В равностороннем треугольнике все углы равны по 60°.

О2. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C = 90°$, см. рис. 2):

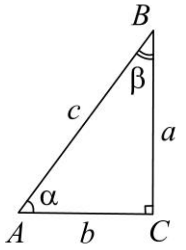


Рис. 2

$$\sin\angle A = \cos\angle B = \frac{a}{c};$$

$$\cos\angle A = \sin\angle B = \frac{b}{c};$$

$$\mathrm{tg}\,\angle A = \mathrm{ctg}\,\angle B = \frac{a}{b};$$

$$\mathrm{ctg}\,\angle A = \mathrm{tg}\,\angle B = \frac{b}{a}.$$

<u>Дополнительные теоремы</u>:

Т3. Сумма двух смежных углов равна 180°.
Т4. Вертикальные углы равны.
Т5. Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.
Т6. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

5. Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные углы.

6. У треугольника один из внутренних углов равен 30°, а один из внешних 40°. Найдите остальные внутренние углы треугольника.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Т7. Во всяком треугольнике:

1) против равных сторон лежат равные углы (и наоборот):

$$a = b \Leftrightarrow \angle A = \angle B;$$

2) против большей стороны лежит больший угол (и наоборот):

$$a > b \Leftrightarrow \angle A > \angle B.$$

Следствие 1. Пусть *c* – наибольшая сторона; тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

Т8. Квадрат любой стороны треугольника ABC равен сумме квадратов двух других без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (**теорема косинусов**).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\angle B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C.$$

Следствие 2. Углы треугольника по известным сторонам вычисляют по формулам:

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Т.9. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (**теорема Пифагора**), т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.

Т10. Стороны треугольника ABC пропорциональны синусам противолежащих углов (**теорема синусов**):

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}.$$

Следствие 1. Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}.$$

Следствие 2. В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу в $30°$, равен половине гипотенузы (и обратно).

7. В треугольнике ABC известно: $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 5$ и $\angle A = 45°$. Найдите AB.

8. В треугольнике даны стороны $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$. Угол A, противолежащий стороне a, равен $30°$. Найдите третью сторону.

9. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 *см*. Найдите длину гипотенузы.

10. Определите острые углы прямоугольного треугольника, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию.

11. В треугольнике ABC найдите отношение $BC:AC$, если известно, что $\angle A = 120°$ и $AB:AC = 2$.

12. В треугольнике ABC найдите угол B, если известно, что $\angle C = 135°$ и $BC:AC = (\sqrt{3} - 1):\sqrt{2}$.

Равные треугольники

О3. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *равными*, если у них соответственные стороны равны и соответственные углы равны:

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ B_1C_1 = B_2C_2,\ A_1C_1 = A_2C_2,$$
$$\angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2,\ \angle C_1 = \angle C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2.$$

Т11. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны (**первый признак равенства треугольников** – *по двум сторонам и углу между ними*):

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ A_1C_1 = A_2C_2,\ \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2.$$

Т12. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (**второй признак равенства треугольников** – *по стороне и двум к ней прилежащим углам*):

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ \angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow$$

Т13. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (**третий признак равенства треугольников** – *по трем сторонам*):

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ B_1C_1 = B_2C_2,$$
$$A_1C_1 = A_2C_2 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2.$$

13. Докажите, что ромб разбивается диагоналями на четыре равных прямоугольных треугольника.

14. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника.

15. Докажите, что в равнобедренной трапеции:

а) углы при любом из оснований равны;

б) диагонали равны.

16. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:

а) по двум катетам;

б) по катету и острому углу;

в) по гипотенузе и острому углу;

г) по гипотенузе и катету.

Подобные треугольники

О4. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

$$\angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2,\ \angle C_1 = \angle C_2,$$

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2,$$

где число k – коэффициент подобия.

Т14. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны (**первый признак подобия треугольников** – *по двум углам*):

$$\angle A_1 = \angle A_2 \text{ и } \angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2.$$

Следствие 1. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая другую сторону, отсекает от него треугольник подобный данному.

Следствие 2. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая продолжения сторон этого треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Т15. Если в двух треугольниках две пары сторон пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны (**второй признак подобия треугольников** – *по двум сторонам и углу между ними*):

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \text{ и } \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2.$$

Т16. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны (**третий признак подобия треугольников** – *по трем сторонам*):

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2.$$

Т17. Если два треугольника подобны, то любой линейный элемент (или сумма линейных элементов) одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу (или сумме соответствующих линейных элементов) другого треугольника как соответственные стороны (**обобщенная теорема подобия**).

В частности, радиусы описанной или вписанной окружностей, периметры, соответственные высоты, медианы, биссектрисы двух подобных треугольников относятся как соответственные стороны.

17. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

18. Треугольник со сторонами 13, 14, 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными большей стороне. Найдите расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне.

19. В треугольнике ABC $AB = 12$. Сторона BC разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные AB. Найдите отрезки этих прямых, заключенных внутри треугольника.

20. Основание треугольника равно 30 *см*, а боковые стороны 26 и 28 *см*. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Найдите площадь полученной при этом трапеции.

21. Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью 108 *см*^{2}, отсекает от него треугольник с площадью 12 *см*^{2}. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами малого треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

22. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 *см* вписан прямоугольник с периметром 24 *см* так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

23. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 *м* и 15 *м*.

24. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B+\angle C=\angle AKB$, AK = 5, BK = 16, $KC=2$. Найдите сторону AB.

25. Внутри прямого угла дана точка M, расстояние от которой до сторон угла равны 4 и 8 *см*. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 *см*^{2}. Найдите катеты треугольника.

26. В треугольнике ABC стороны AB = 14 *см*, AC = 18 *см*, угол A вдвое больше угла B. Найдите третью сторону треугольника.

Площадь треугольника

Приведем основные формулы для вычисления площади треугольника.

T18. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту: $S=\frac{1}{2}ah_a$.

Следствие 1. Площадь прямоугольного треугольника ABC $(\angle C=90°)$ равна половине произведения его катетов:

$$S=\frac{1}{2}ab.$$

Следствие 2. Если два треугольника имеют равные стороны, то отношение их площадей равно отношению соответственных высот, опущенных на эти стороны (или их продолжения).

Следствие 3. Если два треугольника имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению соответственных оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).

T19. Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними: $S=\frac{1}{2}ab\sin\angle C$.

Следствие. Если угол одного треугольника равен углу (или является дополнительным углом) другого треугольника, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, содержащих эти углы, то есть $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}$.

T20. Площадь треугольника равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр (***формула Герона***).

Модифицированная формула Герона:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}.$$

T21. Площадь треугольника равна $S=pr$, где r – радиус вписанной в треугольник окружности, p – полупериметр.

T22. Площадь треугольника равна $S=\frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Т23. Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k, то есть $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

27. Докажите, что площадь равностороннего треугольника равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – длина стороны треугольника.

28. Определите, чему равна длина стороны треугольника, лежащей против тупого угла, если длины двух других сторон равны 7 *см* и 8 *см*, а площадь треугольника равна $14\sqrt{3}$ *см*^{2}.

29. Площадь прямоугольного треугольника равна $8\sqrt{2}$, а острый угол 22,5°. Найдите гипотенузу.

30. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 6 вне этого треугольника построены квадраты. Центры этих квадратов соединены между собой. Найдите площадь полученного треугольника.

31. Стороны треугольника равны 7, 24 и 25. Найдите его высоты.

32. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка B_1 так, что AB_1: B_1C = 2:3. Найдите площадь треугольника BB_1C, если $S_{ABC} = 30$.

33. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка B_1 так, что AB_1: B_1B = 1:1, а на стороне AC взята точка C_1 так, что $AC_1 : C_1C$ = 3:1. Найдите отношение площадей треугольников AB_1C_1 и ABC.

34. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника на расстоянии $3\sqrt{3}$ от двух его сторон и на расстоянии $4\sqrt{3}$ от третьей стороны. Найдите длину стороны данного треугольника.

35. Через точку M (см. рис. 3) основания AC треугольника ΔABC проведены прямые MN и MP, параллельные сторонам треугольника. Точки N и P пересечения этих прямых со сторонами треугольника соединены отрезком прямой. Найдите площадь треугольников ABC и NBP, если площади треугольников ANM и MPC равны соответственно S_1 и S_2.

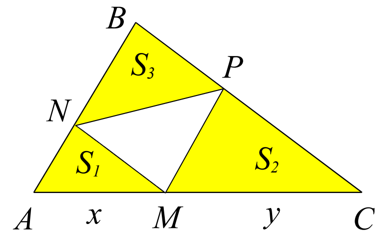


Рис. 3

36. Через точку O, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые параллельные сторонам треугольника. Площади образовавшихся треугольников равны S_1, S_2, S_3 (см. рис. 4). Найдите площадь треугольника ABC.

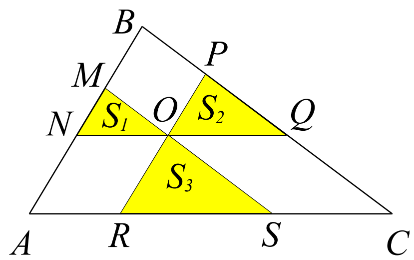


Рис. 4

37. На сторонах CA, AB, BC треугольника ABC соответственно взяты точки M, N, P так, что $\frac{AN}{AB} = m$, $\frac{BP}{BC} = n$, $\frac{AM}{AC} = k$. Определите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна S.

Параллельность отрезков (прямых) в треугольнике

О5. *Средняя линия треугольника* – отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Т24. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине этой стороны.

Следствие. Средняя линия отсекает от треугольника треугольник подобный исходному.

Т25. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла (на двух прямых) пропорциональные отрезки (**обобщенная теорема Фалеса**).

Дополнительные теоремы:

Т26. Две параллельные прямые, пересекаемые рядом прямых, исходящих из одной и той же точки, рассекаются ими на пропорциональные отрезки.

Т27. Если при пересечении двух прямых третьей прямой (секущей):

а) внутренние накрест лежащие углы равны;

б) сумма внутренних односторонних углов равна 180°;

в) соответственные углы равны,

то прямые параллельны (**признаки параллельности двух прямых**).

Следствие. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Т28. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:

а) внутренние накрест лежащие углы равны;

б) сумма внутренних односторонних углов равна 180°;

в) соответственные углы равны (**обратные теоремы**).

Следствие. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

38. Через середину M медианы CD треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке K. В каком отношении точка K делит сторону BC?

39. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BM треугольника ABC?

40. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки K и N так, что $CK : KA = 2 : 3$, $CN : NB = 4 : 3$. В каком отношении точка пересечения отрезков AN и BK делит отрезок KB?

41. Через точку D на стороне AB треугольника ABC такую, что $CD : DB = m : n$, параллельно стороне AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E. Найдите отношение $DE : AC$.

42. В треугольнике ABC из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно проведены отрезки AD и BE, делящие эти стороны в отношении $BD : DC = m : n$ и $AE : EC = p : q$. Определите, в каком отношении делятся отрезки AD и BE точкой их пересечения Q.

Медианы треугольника

О6. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Т29. Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Отрезки MA_1, MB_1, MC_1 являются медианами соответственно треугольников BMC, AMC, AMB, где M – точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (см. рис. 5).

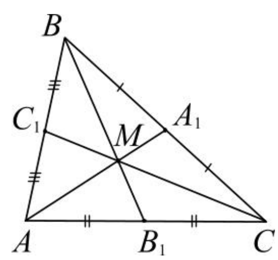


Рис. 5

Т30. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Т31. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы, а также радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

43. Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника: $S_{ABB_1} = S_{CBB_1} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$.

44. Докажите, что три медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников:

$$S_{AMB_1} = S_{CMB_1} = \ldots = S_{AMC_1} = \frac{1}{6} \cdot S_{ABC}.$$

45. Докажите, что если M – точка пересечения медиан треугольника ABC, то

$$S_{AMC} = S_{BMC} = S_{AMB} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}.$$

46. Докажите, что длина медианы треугольника вычисляется через длины его сторон по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

47. Докажите, что длина стороны треугольника по известным трем медианам вычисляется по формуле:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

48. (ЕГЭ, 2003). В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

49. (ЕГЭ, 2003). В треугольнике BCE медиана BM равна 3, $CE = 4\sqrt{2}$, $BE = 5$. Найдите сторону BC.

50. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ *см*, а медиана третьей стороны равна 2 *см*.

51. Две медианы равнобедренного треугольника взаимно перпендикулярны. Боковая сторона равна $\sqrt{10}$. Найдите площадь треугольника.

52. В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OA, если $BB_1 = 36$ *см*, $CC_1 = 15$ *см*.

53. В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ *см*. Найдите длину гипотенузы.

54. Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его катета, равного 12, если гипотенуза равна 15.

Высоты треугольника

О7. *Высотой треугольника* называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение.

Отрезки HA_1, HB_1, HC_1 являются высотами треугольников HBC, HAC, HAB соответственно, где H – точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (см. рис. 6).

Т32. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр).

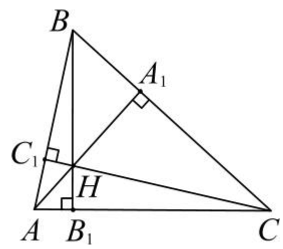


Рис. 6

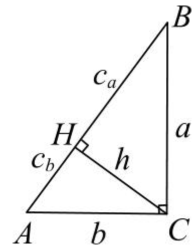


Рис. 7

Дополнительные теоремы:

Т33. Высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу, т.е. $h_c^2 = c_a \cdot c_b$. Катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу: $a^2 = c_a \cdot c$ и $b^2 = c_b \cdot c$ (см. рис. 7).

Т34. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

Т35. Свойства перпендикуляра и наклонной. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то:

а) любая наклонная больше перпендикуляра;

б) равные наклонные имеют равные проекции (и обратно);

в) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше (и обратно).

Т36. Свойство серединного перпендикуляра. Если какая-нибудь точка лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка, то она одинаково удалена от концов этого отрезка (и обратно).

55. Докажите, что высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

56. Докажите, что длина высоты треугольника вычисляется по одной из формул:

$$h_a = \frac{2S}{a} = b\sin\angle C = c\sin\angle B = \frac{bc}{2R}.$$

57. Докажите, что высота h прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, катеты которого равны a и b, а гипотенуза c, равна $h = \frac{ab}{c}$.

58. Докажите, что если AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC (см. рис. 6 и 8), то:

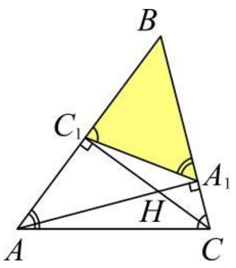


Рис. 8

а) $\Delta AHB_1 \sim \Delta BHA_1$;

б) $\Delta BA_1H \sim \Delta BB_1C$;

в) $\Delta AB_1H \sim \Delta BB_1C$;

г) $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$;

д) $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$.

59. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b, а основание a. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне.

60. В треугольнике ABC угол B равен β, AA_1 и CC_1 – высоты. Докажите, что треугольник BA_1C_1 подобен треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия треугольников.

61. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24, 28 и 56 *см*. Найдите боковые стороны.

62. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $OC = AB = 5$ *см*, а расстояние от точки O до стороны AC равно 3 *см*. Найдите длины сторон треугольника AC и BC.

63. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $BC = 10$, отрезки BM и CK – высоты. Найдите отрезок KM.

64. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 4$ проведена высота CK. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $BK : BA = 4 : 5$.

65. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12 *см*. Найдите площадь треугольника.

66. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

67. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями 64 и 16. Найдите катеты.

68. (ЕГЭ, 2005). Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 10, а боковая сторона равна 5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BM и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника ABK.

69. (ЕГЭ, 2005). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BD и AH пересекаются в точке T, причем $AT = 10$, $TH = 8$. Найдите площадь треугольника ABT.

70. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O так, что $BO = 5$, $OK = 3$. Найдите AH.

71. Найдите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

72. Угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника меньше 60°. К боковой стороне проведены медиана и высота, длины которых соответственно равны $3\sqrt{5}$ и 6 *см*. Найдите длину боковой стороны треугольника.

73. В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. Найдите площадь треугольника CMH, если $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

74. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Найдите AB, если $BD = 18$, $BC = 30$, $AE = 20$.

Биссектрисы треугольника

О8. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны треугольника.

Т37. Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла (**свойство биссектрисы угла**).

Т38. Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в треугольник окружности.

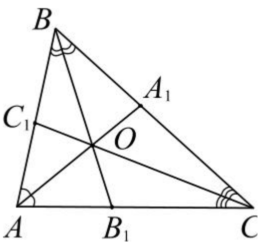


Рис. 9

Отрезки AO, BO, CO являются биссектрисами соответственно треугольников ABB_1 и ACC_1, ABA_1 и BCC_1, CAA_1 и CBB_1, где O – точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (см. рис. 9).

75. Докажите, что биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны.

Т39. Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника (**свойство биссектрисы треугольника**):

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}.$$

76. Докажите, что биссектриса BB_1 треугольника ABC делит площадь треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{AB}{BC}$.

Т40. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Т41. Биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.

77. Докажите, что для биссектрисы BB_1 внешнего угла треугольника ABC выполняется равенство: $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}$.

78. Докажите формулу для вычисления длины биссектрисы:

а) $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, где l_a – длина биссектрисы, проведенной из вершины A;

б) $l_a=\sqrt{ab-c_ac_b}$, где c_a и c_b – отрезки стороны c, на которые рассекает ее биссектриса.

79. Докажите следующие равенства:

$$\angle AOB=\frac{\angle C}{2}+90°;\ \angle AOC=\frac{\angle B}{2}+90°;$$

$$\angle COB=\frac{\angle A}{2}+90°.$$

80. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая биссектриса.

81. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки 2,8 *см* и 4,2 *см*. Периметр треугольника равен 22 *см*. Найдите стороны треугольника.

82. Дан треугольник ABC такой, что AB = 15 *см*, BC = 12 *см* и AC = 18 *см*. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C?

83. Вычислите длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $a=18$, $b=15$, $c=12$.

84. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 *см* и 20 *см*. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

85. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 *см* и 28 *см*. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

86. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона - 12. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

87. В треугольнике ABC AB = 13, BC = 21, AC = 20. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, медианой BM и биссектрисой CK данного треугольника.

88. Биссектриса угла B пересекает сторону AC треугольника ABC в точке M и делит ее на отрезки AM = 21 и CM = 27. Найдите периметр треугольника ABC, если биссектриса угла AMB перпендикулярна прямой AB.

89. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что биссектриса прямого угла разделила гипотенузу на отрезки 30 *см* и 40 *см*.

90. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 *см*. Найдите расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

91. (ЕГЭ, 2005). В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* проведена биссектриса *BK*. Найдите площадь треугольника *CBK*, если площадь треугольника *ABC* равна 18, а синус угла *A* равен 0,8.

92. В треугольнике *ABC* известны *BC* = 15 *см*, *AC* = 14 см, *AB* = 13 *см*. Вычислите площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины *B*.

93. В треугольнике *ABC AB* = 5, *BC* = = 10, *AC* = $3\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника, образованного высотой *AH*, медианой *AM* и биссектрисой *BK* данного треугольника.

94. Две стороны треугольника равны a и b. Найдите его третью сторону, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

Окружность, вписанная в треугольник

О9. Окружность называется *вписанной в треугольник*, если она касается всех его сторон; при этом треугольник называется описанным вокруг окружности.

Т42. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр окружности, вписанный в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.

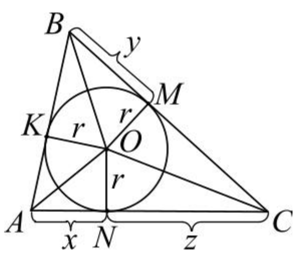


Рис. 10

95. Докажите, что для вычисления радиуса вписанной окружности справедливы формулы:

а) для произвольного треугольника (см. рис. 10):

$$r = \frac{S_\Delta}{p};\ \ r = x\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = y\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} = z\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle C}{2};$$

б) для прямоугольного треугольника:

$$r = \frac{a+b-c}{2}\ \ (\angle C = 90^\circ);$$

в) для равностороннего треугольника:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6};\ \ r = \frac{R}{2}.$$

96. Докажите формулы для вычисления отрезков касательных (см. рис. 10):

$$x = p - a = = \frac{b+c-a}{2} = = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}.$$

97. Найдите площадь треугольника *ABC*, если в него вписана окружность с центром *O*, причем $\angle AOC = 165^\circ$, *AB* = 8, *BC* = 7.

98. Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник *ABC*, если высота *BH* равна 12 и известно, что $\sin\angle A = \frac{12}{13}$, $\sin\angle C = \frac{4}{5}$.

99. В треугольник вписан круг радиуса 4 *см*. Одна из сторон треугольника, разделена точкой касания на части 6 *см* и 8 *см*. Найдите длины двух других сторон.

100. В треугольник со сторонами *AB* = 8, *BC* = 6, *AC* = 4 вписана окружность. Найдите длину отрезка *DE*, где *D* и *E* – точки касания этой окружности со сторонами *AB* и *AC* соответственно.

101. В треугольник *ABC* вписана окружность, которая касается стороны *AC* в точке *M*. В треугольнике проведена высота *BO*, равная 12. Известно, что точка *M* делит отрезок *AO* на части: *AM* = 14 и *MO* = 2. Найдите площадь треугольника *ABC*.

102. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18 *см*, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами 2 *см*. Найдите основание треугольника.

103. (ЕГЭ, 2002). В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении 8:5, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

104. (ЕГЭ, 2002). В равнобедренный треугольник *PMK* с основанием *MK* вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота *PH* делится точкой пересечения с окружностью в отношении 1:2, считая от вершины *P*. Найдите периметр треугольника *PMK*.

105. (ЕГЭ, 2002). В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6{,}5$.

106. (ЕГЭ, 2004). Основание равнобедренного треугольника равно 36. вписанная окружность касается боковых сторон в точках A и P, $AP = 12$. Найдите периметр треугольника.

107. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найдите радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

108. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки 5 *см* и 3 *см*, считая от вершины. Определите стороны треугольника.

109. Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом $120°$, если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$ *см*.

110. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 *см* и высотой 8 *см*, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенной между сторонами треугольника.

111. В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 50, с основанием, равным 30, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания на боковых сторонах.

112. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 5 *см* и 6 *см*. Определите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной в него окружности.

113. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 *см*, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 *см*. Найдите площадь треугольника.

114. (ЕГЭ, 2002). Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, $AM = 12$, $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

115. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 *см*, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длины сторон треугольника.

116. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны соответственно $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найдите катеты.

117. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $AC = 4$ *см*, $BC = 3$ *см*.

118. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 *см*. Проведена окружность, касающаяся обоих катетов и имеющая центр на гипотенузе. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит гипотенузу.

119. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, равны соответственно 4 и 3 *см*. Найдите расстояние между их центрами.

120. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, равны соответственно 0,6 и 0,8 *см*. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

121. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Через центр O вписанной в треугольник окружности проведен луч BO, пересекающий катет AC в точке M. Известно, что $AM = 8\sqrt{3}$, $\angle A = \angle MBC$. Найдите гипотенузу.

Окружность, вневписанная в треугольник

О10. *Вневписанной* в треугольник *окружностью* называется окружность, к которой являются касательными одна из сторон треугольника и продолжения двух его других сторон (см. рис. 11).

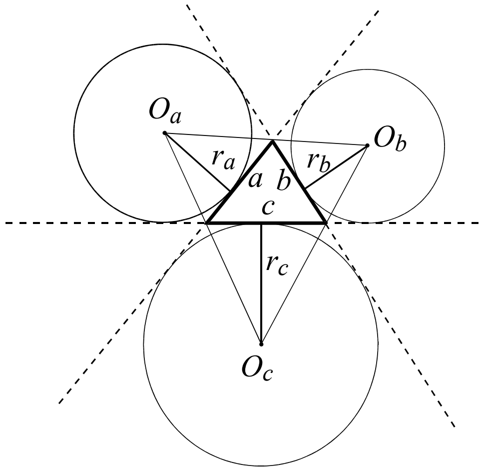


Рис. 11

Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника (см. рис. 11).

Т43. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, имеющей длину a, выражается формулой:

$$r_a = \frac{S}{p-a},$$

где S и p – площадь и полупериметр треугольника.

122. Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника.

123. Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

Окружность, описанная около треугольника

О11. *Окружность, описанная около треугольника* – окружность, на которой лежат все вершины треугольника; при этом треугольник называется вписанным в окружность.

Т44. Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.

Т45. Во всяком треугольнике (см. рис. 1) отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла постоянно и равно диаметру описанной около треугольника окружности (**обобщенная теорема синусов**), т.е. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

124. Докажите формулы для вычисления радиуса описанной окружности:

а) для произвольного треугольника:

$$R = \frac{abc}{4S};\ R = \frac{ab}{2h_c};$$

$$R = \frac{a}{2\sin\angle A} = \frac{b}{2\sin\angle B} = \frac{c}{2\sin\angle C};$$

б) для прямоугольного треугольника:

$$R = \frac{c}{2};\ R = m_c\ \ (\angle C = 90°);$$

в) для равностороннего треугольника:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ R = 2r.$$

125. Найдите площадь треугольника, если его стороны относятся как 7:15:20, а радиус описанной окружности равен 25.

126. Величины углов треугольника относятся как 2:3:7. Длина наименьшей стороны рана 5 *см*. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

127. В окружность радиуса 4 вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найдите площадь треугольника.

128. В треугольнике BCE $\angle C = 60°$, $CE : BC = 3:1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.

129. (ЕГЭ). Высоты AH и BK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M, $\angle AMB = 105°$. Найдите градусную меру угла ABO, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

130. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

131. В треугольнике ABC биссектриса угла A продолжена до пересечения в точке D с описанной около треугольника окружностью. Найдите длину стороны BC, если $AB = 75$, $AC = 48$, $AD = 100$.

132. (ЕГЭ, 2004) Треугольник BMP с углом B, равным $45°$, вписан в окружность радиуса $6\sqrt{2}$. Найдите длину медианы BK, если луч BK пересекает окружность в точке C и $CK = 3$.

133. Одна из сторон треугольника является диаметром описанной около него окружности. Другая сторона треугольника равна $4\sqrt{2}$, а проекция третьей стороны на диаметр равна 14. Найдите радиус окружности.

134. В окружность радиуса $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ вписан правильный треугольник ABC. Хорда BD пересекает сторону AC в точке E, $AE : EC = 3 : 5$. Найдите BE.

135. Найдите основание тупоугольного равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{15}$, если расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника равно 15.

136. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 8 *см*, а радиус описанной окружности равен 5 *см*. Найдите площадь треугольника.

137. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 *м*, а радиус описанной окружности равен 5 *м*. Найдите больший катет треугольника.

138. Периметр прямоугольного треугольника равен 72 *м*, а радиус вписанной в него окружности – 6 *м*. Найдите диаметр описанной окружности.

139. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8 *см*. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

140. (ЕГЭ, 2002). Один из катетов прямоугольного треугольника равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.

141. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, M и N, если угол B равен β и $AC = a$.

Примеры многовариантных задач

Рассмотрим несколько задач взаимного расположения треугольника и окружности, имеющих неоднозначность в решении.

Пример 1. *В треугольнике ABC отрезок MK с концами на сторонах AB и BC параллелен стороне AC. Найти MK, если известно, что $AC = 15$ и точка M делит сторону AB в отношении* $2:3$.

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка AB он делится точкой M в отношении $2:3$, то необходимо рассмотреть два случая (см. рис. 12) расположения точки M такие, что $AM:MB = 2:3$ и $AM:MB = 3:2$.

Из подобия треугольников ABC и MBK с коэффициентом подобия $\frac{3}{5}$ (см. рис. 12*а*) и $\frac{2}{5}$ (см. рис. 12*б*) следует, что $MK = \frac{3}{5}AC = 9$ или $MK = \frac{2}{5}AC = 6$.

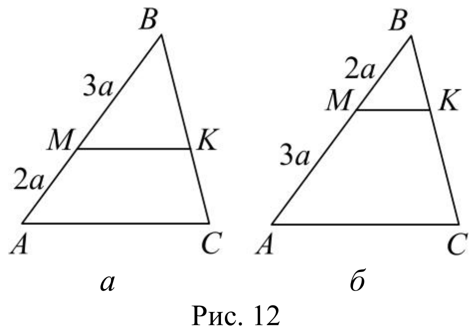


Рис. 12

Ответ: 6 или 9.

Пример 2. *Площадь треугольника ABC равна* 4, $AB = 8$, $AC = \sqrt{2}$. *Найти сторону BC.*

Решение. Используя формулу площади треугольника

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle A}{2},$$

получим, что $\sin \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Возможны два случая $\angle A = 45°$ или $\angle A = 135°$.

Если $\angle A = 45°$, то, используя теорему косинусов, получим

$$BC^2 = 64 + 2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50.$$

Отсюда $BC = 5\sqrt{2}$.

Если $\angle A = 135°$, то, используя теорему косинусов, получим

$$BC^2 = 64 + 2 + 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 82.$$

Отсюда $BC = \sqrt{82}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{82}$.

Пример 3. *В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC, причем $AK:KC = 2:3$. Точка M делит сторону AB на два отрезка, один из которых вдвое больше другого. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BK в точке P. Найти отношение $BP:KP$.*

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка AB он делится точкой M в отношении $1:2$, то необходимо рассмотреть два случая (см. рис. 13) расположения точки M такие, что $AM:MB = 1:2$ и $AM_1:M_1B = 2:1$.

Проведем через точку K прямую NK параллельно BC. Тогда по теореме Фалеса $AN:NB = AK:KC = 2:3$.

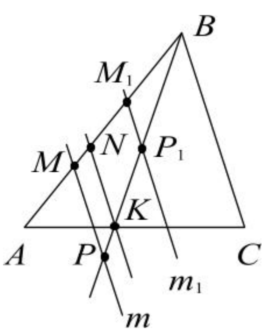


Рис. 13

Далее проводим параллельно BC прямые m и m_1 через точки M и M_1 соответственно. Пусть $P = BK \cap m$ и $P_1 = BK \cap m_1$. Согласно условию задачи нужно найти отношения $BP:KP$ и $BP_1:KP_1$.

Из подобия треугольников NBK и MBP следует, что $BP:KP = MB:NM$. Так как $AN = \frac{2}{5}AB$, $BM = \frac{3}{5}AB$, $AM = \frac{1}{3}AB$, $MB = \frac{2}{3}AB$ и $MN = AN - AM = \frac{1}{15}AB$, то

$$BP:KP = MB:NM = \frac{2}{3}AB:\frac{1}{15}AB = 10:1.$$

Аналогично находим

$$BP_1:KP_1 = BM_1:M_1N = \frac{1}{3}AB:\frac{4}{15}AB = 5:4.$$

Ответ: $10:1$ или $5:4$.

Пример 4. *Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник равен 128 см, а косинус угла при его основании равен $\frac{7}{9}$. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.*

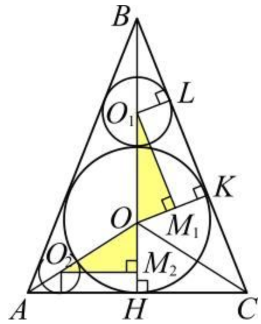


Рис. 14

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно каких двух сторон касается окружность, радиус которой нужно найти, то возможно три варианта. Одна окружность касается сторон AB и BC, а две другие, одинакового радиуса, касаются основания AC и AB или BC (см. рис. 14).

Центр O вписанной в треугольник ABC окружности – точка пересечения биссектрис треугольника. Пусть искомые радиусы окружностей равны r_1 и r_2.

Радиус r_1 находим из прямоугольного треугольника O_1OM_1, в котором $O_1O = r_1 + 128$ (расстояние между центрами касающихся внешним образом окружностей), $OM_1 = OK - O_1L = 128 - r_1$ и $\sin \angle OO_1M_1 = \sin \angle O_1BL = \cos \angle BCA = \frac{7}{9}$. Тогда из уравнения

$$\frac{OM_1}{OO_1} = \frac{128 - r_1}{r_1 + 128} = \frac{7}{9}$$

получаем $r_1 = 16$.

Аналогично находим радиус r_2 из прямоугольного треугольника O_2OM_2, в котором $O_2O = r_2 + 128$, $OM_2 = 128 - r_2$ и

$$\sin \angle OO_2M_2 = \sin \angle OAH = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle BAH}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Тогда из уравнения

$$\frac{OM_2}{OO_2} = \frac{128 - r_2}{r_2 + 128} = \frac{1}{3}$$

получаем $r_2 = 64$.

Ответ: 16 или 64.

1.2. Окружность и круг

О12. *Окружностью* называется множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки (центра окружности). *Кругом* называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Свойства хорд, секущих и касательных в круге

О13. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром окружности*.

Т46. Хорды, равноудаленные от центра окружности, равны.
Т47. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

О14. *Касательной* к окружности называется прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

Т48. Длины касательных, проведенных из одной точки вне круга к окружности, равны между собой.

Т49. Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную к этой окружности.

Т50. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

142. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса r в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если расстояние от точки A до центра окружности равно a.

143. Из одной точки проведены к окружности две касательные длиной 12 *см*, а расстояние между точками касания 14,4 *см*. Определите радиус окружности.

Т51. Если через точку M вне окружности провести две секущие, то произведения длин секущих на их внешние части будут равны (**теорема о секущей**) (см. рис. 15):

$$MA \cdot MC = MB \cdot MD.$$

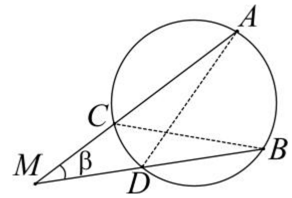


Рис. 15

144. Через точку M, удаленную от центра окружности на расстояние b, проведена секущая MA так, что она делится окружностью пополам $MB = BA$. Определить длину секущей MA, если радиус окружности равен r.

Т52. Если через точку M вне окружности провести секущую и касательную, то произведение длины секущей на ее внешнюю часть будет равно квадрату длины касательной (**теорема о секущей и касательной**) (см. рис. 16):

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

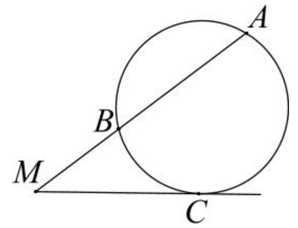


Рис. 16

145. Из точки M проведена секущая MB окружности радиуса r, проходящая через ее центр, и касательная MA, причем $MB = 2MA$. Найти на каком расстоянии от центра окружности находится точка M.

146. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет 2/3 внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

Т53. Если через точку M внутри окружности провести две пересекающиеся хорды AD и BC, то произведения отрезков этих хорд будут равны (**теорема о хордах**): (см. рис. 17):

147. Внутри круга радиуса 15 *см* взята точка M на расстоянии 13 *см* от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 *см*. Найдите длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

Свойства дуг и хорд

В одном круге или в равных кругах:

1) если дуги равны, то и стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра;
2) если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то большая из них стягивается большей хордой и из обеих хорд большая расположена ближе к центру.

Углы, связанные с окружностью

О15. *Центральный угол* – угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны являются радиусами. Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги (выраженной в радианах или градусах).

О16. *Вписанный угол* – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами.

Т54. Величина вписанного угла равна половине дуги, заключенной внутри угла.

Следствие. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

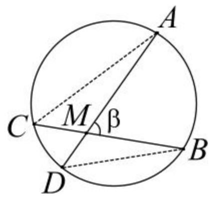


Рис. 17

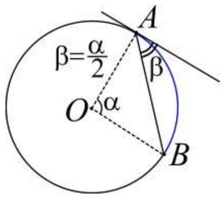


Рис. 18

Т55. Угол, составленный касательной и хордой, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой (см. рис. 18).

Примечание: предполагается, что вершина угла является точкой касания.

Т56. Угол (составленный пересекающимися хордами) с вершиной внутри окружности равен полусумме соответствующих дуг (см. рис. 17):

$$\beta = \angle CAD + \angle ADB = \frac{\cup AB + \cup CD}{2}.$$

Т57. Угол, составленный секущими к окружности, с вершиной вне окружности равен полуразности соответствующих дуг (см. рис. 15):

$$\beta = \angle ACB - \angle CBD = \frac{\cup AB - \cup CD}{2}.$$

Длина окружности. Площадь круга и его частей

О17. *Сектор* – часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами (см. рис. 19).

О18. *Сегмент* – часть круга, ограниченная дугой и хордой (см. рис. 19).

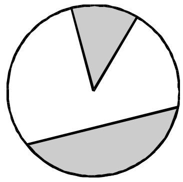


Рис. 19

Формула длины окружности: $L = 2\pi R$, где R – радиус окружности, π – постоянная, не зависящая от окружности.

Формула длины дуги: $l = R\alpha = \frac{\pi x}{180}R$, где R – радиус окружности, α – величина центрального угла в радианах, содержащего x градусов.

Формула площади круга: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.

Формулы площади:

сектора: $S = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{\pi x}{360}R^2$;

сегмента: $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$;

кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), вычисляется по формуле: $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$.

148. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 *см*, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 *см*. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 *см*.

149. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 *см* и касающаяся меньшего круга. Определите длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 *см*.

150. Периметр сектора равен 28 *см*, а его площадь равна 49 *см*^{2}. Определите длину дуги сектора.

151. Найдите площадь круга, если площадь вписанного в него квадрата равна Q.

152. К окружности, радиуса R, из точки M, находящейся на расстоянии l от ее центра, проведены касательные MB_1 и MB_2. Через произвольную точку C меньшей из дуг B_1B_2 проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки MB_1 и MB_2 в точках A_1 и A_2 соответственно. Найдите периметр треугольника A_1MA_2.

153. Диаметр CD параллелен хорде AB той же окружности. Найдите длину хорды AB, если $AC = b$ и $BC = a$ $(a > b)$.

Касающиеся окружности

О19. *Касающимися окружностями* называются такие две окружности, которые имеют лишь одну общую точку. Точка касания окружностей и их центры лежат на одной прямой.

О20. *Линией центров* называется прямая, проходящая через центры двух окружностей.

Т58. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

Т59. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

154. Найдите отрезок общей внешней касательной к двум окружностям радиусов r и R, касающихся внешним образом.

155. Две окружности радиусов R и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины $2R$, образующего угол 30° с линией центров, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне окружностей?

156. Три окружности касаются внешним образом. Расстояние между центрами окружностей равны 7 *см*, 8 *см* и 9 *см*. Найдите радиусы окружностей.

157. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

158. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус r_1 окружности, касающейся каждой из данных и той же прямой так, что точка касания ее прямой расположена между точками касания этой прямой данными окружностями.

159. Две окружности внутренне касаются в точке Q. Прямая, проходящая через центр O_1 меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую – в точках B и C. Найдите отношение радиусов этих окружностей, если $AB:BC:CD = 2:4:3$.

160. Три окружности, радиусы которых относятся как 1:2:3. Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания этих окружностей.

161. В угол с вершиной A вписаны касающиеся окружности радиусов R и r. Пусть соответственно D и C – точки касания этих окружностей с одной из сторон угла. Найдите DA и CA.

162. В полукруг радиуса R вписаны две окружности одинакового радиуса, касающиеся друг друга. Найдите их радиус.

Пересекающиеся окружности

Т60. Две окружности радиусов r и R $(r < R)$ пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами меньше, чем $r + R$, но больше, чем $R - r$.

Т61. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

163. Две пересекающиеся окружности имеют общую касательную. Расстояние между точками касания равно 4. Расстояние между центрами окружностей равно 5, а радиус меньшей окружности равен 2.

Найдите величину радиуса большей окружности.

164. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A к ним проведены касательные AM и AN (M и N – точки окружностей). Докажите, что:
а) $\angle ABN + \angle MAN = 180°$; **б)** $AB^2 = MB \cdot BN$.

165. Две окружности пересекаются в точках A и B, через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей; $AC : AD = 3 : 2$. Найдите отношение $BC : BD$.

166. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

167. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой – стороной правильного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен 5.

168. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6. Найдите радиус окружностей.

Непересекающиеся окружности

Т62. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) не пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами больше, чем $r + R$, или меньше, чем $R - r$.

169. Найдите длины общих касательных к окружностям, радиусы которых равны R и r, а расстояние между их центрами равно a ($a \geq R + r$).

170. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол. К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная, касающаяся их в точках B_1 и B_2 и пересекающая стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

171. Центр O_1 первой окружности радиуса r удален на расстояние m от центра O_2 второй окружности радиуса R ($R > r$, $R - r < m < R + r$). Найдите длину дуги первой окружности, заключенной внутри второй окружности.

Примеры многовариантных задач

Пример 5. *Даны две окружности радиусов* 3 *и* 2. *Расстояние между их центрами равно* 13. *К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Найдите радиус окружности, касающейся общей внутренней касательной и обеих данных окружностей.*

Решение. Обозначим через B и C – точки касания общей внутренней касательной с меньшей и большей окружностями соответственно. Возможны два случая (рис. 20 или 21) расположения искомой окружности (касание с меньшей окружностью в точке B или касание с большей окружностью в точке C). В обоих случаях прямая BC будет общей внешней касательной для выбранной пары окружностей.

Пусть искомая окружность с центром O касается меньшей окружности в точке B, значит и прямой BC (см. рис. 20). Проведем перпендикуляр O_2D к прямой OO_1. В прямоугольном треугольнике O_1DO_2 с катетом $O_1D = 5$ и гипотенузой $O_1O_2 = 13$ найдем $DO_2 = 12$.

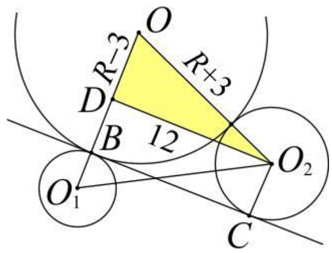


Рис. 20

Обозначим искомый радиус через R, тогда $DO = R - 3$, $OO_2 = R + 3$. Используя теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ODO_2, составим уравнение $(R-3)^2 + 12^2 = (R+3)^2$, откуда $R = 12$.

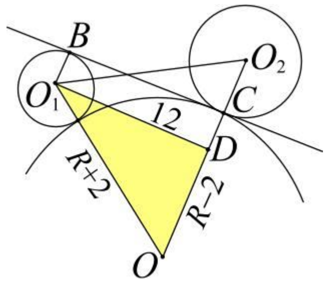


Рис. 21

Второй случай, когда третья окружность касается большей окружности в точке C (см. рис. 21), оставляем читателю.

Ответ: 12 или 18.

Пример 6. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если BD = 7, BC =13.*

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому задача допускает два вида чертежа, когда центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB или центры окружностей лежат по одну сторону от AB.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2 лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 22). Так как вписанные углы DBA и CBA, опирающиеся на диаметры окружностей, прямые, то точки D, B и C лежат на одной прямой. Отрезок O_1O_2 в треугольнике DAC является средней линией, поэтому $O_1O_2 = \dfrac{7+13}{2} = 10$.

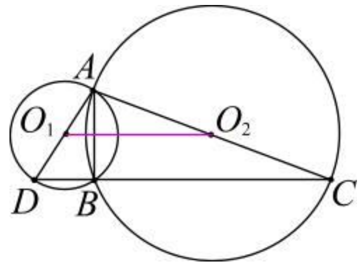


Рис. 22

Второй случай рассмотрите самостоятельно (см. рис. 23).

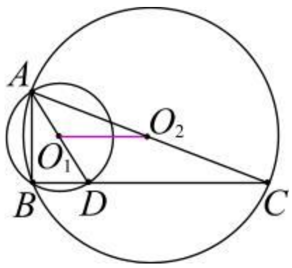


Рис. 23

Ответ: 3 или 10.

1.3. Многоугольники

Выпуклые четырехугольники

Т63. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$, или $\pi(n-2)$ радиан.

Т64. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360° или 2π радиан.

Т65. Площадь любого четырехугольника выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где d_1 и d_2 – диагонали, а φ – угол между ними.

Приведем несколько полезных фактов (см. рис. 24).

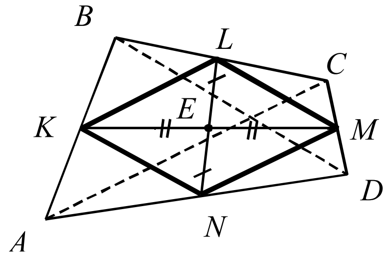


Рис. 24

1. Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами некоторого параллелограмма.

2. Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника.

3. Отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.

4. Сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

5. Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке O, то в него можно вписать окружность. Точка O будет центром этой окружности.

6. Если в многоугольник можно вписать окружность, то радиус окружности выражается формулой:

$$r = \frac{2S}{p},$$

где S и p – соответственно площадь и полупериметр многоугольника.

7. Если перпендикуляры, восстановленные к серединам всех сторон многоугольника, пересекаются в одной точке O_1, то вокруг него можно описать окружность и ее центром будет точка O_1.

172. В четырехугольнике *ABCD* *AC* = 12, *BD* = 16, $AC \perp BD$. Найдите расстояние между серединами сторон *AB* и *CD*.

173. Диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *O*, площади треугольников *AOB* и *AOD* равны соответственно 12 и 8, *AO* : *OC* = 4 : 5. Найдите площадь четырехугольника.

Правильные многоугольники

О21. *Правильный многоугольник* – многоугольник, у которого все стороны и все углы одинаковы.

Т66. Его внутренние углы равны $\frac{180°(n-2)}{n}$ или $\frac{\pi(n-2)}{n}$ радиан.

Т67. В правильный многоугольник всегда можно вписать окружность. Около правильного многоугольника всегда можно описать окружность.

Т68. Пусть a_n – длина стороны правильного n-угольника, S_n – его площадь, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей. Эти величины связаны формулами:

$$S_n = \frac{na_n r}{2}, \quad a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}, \quad r = R\cos\frac{\pi}{n}.$$

Другие свойства правильных многоугольников:

1. Любые два правильных n-угольника подобны друг другу. В частности, если у них стороны одинаковы, то они равны.

2. Диагонали правильного шестиугольника разбивают его на шесть правильных треугольников.

3. Сумма расстояний от любой точки внутри правильного многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от положения точки:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = const.$$

174. (ЕГЭ, 2005). Найдите площадь правильного двенадцатиугольника, если его сторона равна $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

175. (ЕГЭ, 2005). Точка *O* является центром правильного девятиугольника *ABCDEFGHK*. Площадь треугольника *OAD* равна $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. Найдите длину перпендикуляра *OM*, опущенного на диагональ *AD*.

176. (ЕГЭ, 2005). В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок *BC* соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка *BC*.

177. (ЕГЭ, 2003). Сторона правильного шестиугольника *ABCDEF* равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *MPK*, если *M*, *P* и *K* – середины сторон *AB*, *CD*, *EF* соответственно.

178. В окружность радиуса $(3+\sqrt{3})$ *см* вписан правильный шестиугольник *ABCDEF*. Найдите радиус круга, вписанного в треугольник *ACD*.

179. Найти сторону правильного восьмиугольника, зная радиус *R* описанной окружности.

180. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найти радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна 6.

Параллелограмм

О22. *Параллелограмм* – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма:

1. Противоположные стороны попарно равны.

2. Противоположные углы попарно равны.

3. Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна $180°$.

4. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

5. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

6. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон.

7. Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

8. Две диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

9. Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, образуют угол, равный углу параллелограмма при соседней вершине.

10. Высоты обратно пропорциональны соответственным сторонам.

11. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

12. Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.

13. Середина любого отрезка с концами на противоположных сторонах параллелограмма лежит на прямой, проходящей через середины двух других сторон.

Формулы площади параллелограмма:

$$S = ah = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\varphi,$$

где a – основание, h – высота; a и b – стороны, а α – угол между ними; d_1 и d_2 – диагонали, а φ – угол между ними.

181. Высоты параллелограмма относятся как 3:4. Его периметр равен 42 *см*. Найдите стороны параллелограмма.

182. Стороны параллелограмма относятся как 3:5. Меньшая диагональ 20 *см*. Периметр параллелограмма 80 *см*. Найдите площадь параллелограмма.

183. Периметр параллелограмма равен 28 *см*, а его острый угол – 60°. Определите высоты параллелограмма, если его площадь равна $24\sqrt{3}$ *см*^{2}.

184. Величина одного из углов параллелограмма равна $60°$, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ *см*. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\frac{\sqrt{75}}{2}$ *см*. Найдите длины сторон и большой диагонали параллелограмма.

185. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BK = KC = 5$ *м*, $AK = 8$ *м*.

186. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 120°$. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке K, лежащей на стороне AD, $CK = 3$. Найдите площадь параллелограмма.

187. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $BD = 26$, $AC = 40$, $BC = 21$. Отрезок OE – перпендикуляр к стороне BC. Найдите разность площадей четырехугольников $DCEO$ и $ABEO$.

188. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 *см* и диагональю 6 *см*. Найдите стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

189. (ЕГЭ, 2003) Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

190. (ЕГЭ, 2007) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если $DK = 18$, $PK = 24$, $AD = 15$.

191. В параллелограмме $ABCD$ на продолжении стороны BC за вершину C выбрана точка E. Диагональ BD и отрезок AE пересекаются в точке F. Найдите длину отрезка FM, если точка M лежит на CD так, что $FM || BC$, $BC = a$, а $BE = b$.

192. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ площадью 1 взята точка M так, что $BM : MC = 2:3$. Отрезок DM пересекает диагональ AC в точке K. Найдите площадь треугольника AMK.

193. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка M так, что $S_{ABM} = S_1$, $S_{MCD} = S_2$. Найдите площадь параллелограмма.

194. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

Ромб

О23. *Ромб* – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба:

1. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

2. Диагонали ромба перпендикулярны друг другу.

3. Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

4. Диагонали ромба являются его осями симметрии.

5. Высоты ромба равны.

6. В ромб можно вписать окружность.

Формулы площади ромба:

$$S = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 = ah,$$

где a и α – сторона ромба и угол между сторонами соответственно, d_1 и d_2 – диагонали, h – высота.

195. Сумма длин диагоналей ромба равна 16 *см*, а его площадь равна 28 *см*^{2}. Найдите сторону ромба.

196. В треугольник вписан ромб со стороной 12 *см* так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки 6 и 8 *см*. Найдите стороны треугольника.

197. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной 3 и 4. Определите диагонали ромба.

198. (ЕГЭ, 2005). Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Прямоугольник

О24. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

1. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

2. Диагонали прямоугольника равны.

3. Около прямоугольника можно описать окружность. Радиус описанной окружности равен $R = \frac{d}{2}$, где d – диагональ прямоугольника.

Формулы площади прямоугольника:

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha,$$

где a и b – стороны прямоугольника, α – угол между диагоналями.

199. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 60$ *см*, $BC = 45$ *см*. Сторона DC разделена на три равные части точками E и F. Отрезки прямых, соединяющие вершины A и B с точками E и F соответственно, продолжены до пересечения в точке M, лежащей вне прямоугольника. Найдите площадь треугольника EFM.

200. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определите, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4.

201. В прямоугольнике со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найдите площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

202. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ и $DM = d$. Докажите, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Квадрат

О25. *Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства квадрата:

1. Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

2. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a и d – сторона и диагональ квадрата соответственно.

***Формулы площади квадрата*:**

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

203. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием 6 *см* и боковой стороной 5 *см* так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах.

204. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b так, что сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины лежат на катетах.

205. Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно в точках E, F, K, L. Докажите, что $EK = FL$.

Трапеция

О26. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны (основания) которого параллельны, а две другие (боковые стороны) – не параллельны.

О27. Отрезок прямой, соединяющий середины непараллельных сторон трапеции называется *средней линией трапеции*.

Т69. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна полусумме оснований: $MN \parallel AD$, $m = \dfrac{a+b}{2}$ (см. рис. 26).

Свойства трапеции:

1. Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.

2. Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.

3. Средняя линия трапеции делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам.

4. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади (см. рис. 25): $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OCD}$.

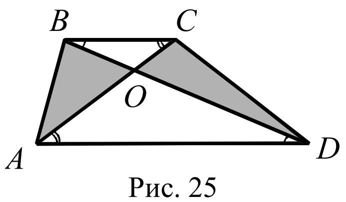


Рис. 25

5. В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон.

6. Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам (см. рис. 26). Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции:

$$MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

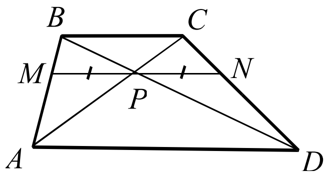


Рис. 26

7. Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.

8. Если в трапецию вписана окружность и m, n, p, q – длины отрезков боковых сторон от точек касания до вершин, то для вычисления радиуса вписанной в нее окружности можно использовать формулы:

$$r = \sqrt{mn} = \sqrt{pq}.$$

Площадь трапеции с основаниями a и b, высотой h и средней линией m выражается формулой

$$S = \frac{a+b}{2}h = mh.$$

О28. Трапеция с равными боковыми сторонами называется *равнобедренной* (равнобочной, равнобокой).

***Свойства равнобедренной трапеции*:**

1. Углы при основании равны между собой.

2. Диагонали равны.

3. Проекция диагонали на большее основание равна средней линии.

4. Если диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии и площадь трапеции равна квадрату высоты.

206. Основания трапеции $ABCD$ $AD = 20$, $BC = 14$. На сколько нужно продолжить сторону AB до пересечения с продолжением стороны DC, если $AB = 6$?

207. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $AD = 12$ *см*, $BC = 8$ *см* на луче BC взята такая точка M, что AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите CM.

208. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD $\angle ACD = \angle ABC$, $BC = 12$ *см*, $AD = 27$ см. Найдите диагональ AC.

209. Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как 2:1. Чему равно отношение оснований трапеции?

210. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны 4 *см*^{2} и 25 *см*^{2}. Найдите площадь данной трапеции.

211. В трапеции длина средней линии равна 4 *см*, а углы при одном из оснований равны $40°$ и $50°$. Найдите длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1 *см*.

212. В трапеции сумма углов при большем основании равна $90°$, сумма оснований равна $8\sqrt{5}$, а разность оснований равна $5\sqrt{5}$. Найдите площадь трапеции, если одна из боковых сторон равна 10.

213. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12 *см*, а длины биссектрис 15 и 13 *см*.

214. В трапеции большее основание равно 5, одна из боковых сторон равна 3. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданными боковой стороной и основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

215. Одно из оснований трапеции равно 24 *см*, а расстояние между серединами диагоналей 4 *см*. Найдите другое основание.

216. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонам трапеции, основания которой равны 6 и 4.

217. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 16, а диагональ равна 20.

218. Основания BC и AD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны 4 и 8 соответственно. В трапеции проведены две высоты CH и BN. Диагональ AC пересекает высоту BN в точке O и равна $3\sqrt{5}$. Найдите длину отрезка ON.

219. Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная длину ее диагонали 10 *см* и величину угла в $15°$ между этой диагональю и большим основанием.

220. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 *см*, а другое 24 *см*. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите ее площадь.

221. Найдите площадь трапеции, если известно, что при последовательном соединении середин ее сторон образуется квадрат, сторона которого равна 6 *см*.

222. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, O – точка пересечения диагоналей. Известно, что площади треугольников OBC и OAD равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

223. В прямоугольной трапеции меньшая из боковых сторон равна средней линии, а большая – большему основанию. Меньшее основание равно 3 *см*. Найдите площадь трапеции.

224. В прямоугольной трапеции биссектриса тупого угла делит основание на отрезки 8 и 5 *см* от острого угла, острый угол $60°$. Найдите площадь трапеции.

225. Средняя линия трапеции, равная 10 *см*, делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований трапеции.

226. В трапеции длины оснований равны 5 и 15 *см*, а длины диагоналей – 12 и 16 *см*. Найдите площадь трапеции.

227. В трапеции боковые стороны равны 17 и 25 *см*, а основания – 16 и 44 *см*. Найдите площадь трапеции.

228. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам.

Вписанные и описанные четырехугольники

О29. Четырехугольник называется *описанным*, если существует окружность, касающаяся всех его сторон. Такая окружность называется *вписанной*.

Т70. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны друг другу.

Центр окружности вписанной в четырехугольник, лежит в точке пересечения биссектрис всех внутренних углов данного четырехугольника.

О30. Четырехугольник называется *вписанным*, если существует окружность, проходящая через все его вершины. Такая окружность называется *описанной*.

Т71. Около четырехугольника можно описать окружность в том и только том случае, если суммы противоположных углов четырехугольника равны $180°$.

Следствие. Около любого прямоугольника, любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

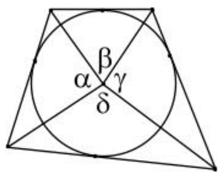


Рис. 27

229. Докажите, что если в четырехугольник вписана окружность, то суммы углов между парами отрезков, направленных из центра окружности к концам противоположных сторон четырехугольника равны $180°$, т.е. $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$ (см. рис. 27).

230. Докажите, что площадь описанного четырехугольника может быть вычислена по формуле:

$$S = pr,$$

где p – полупериметр четырехугольника, r – радиус окружности.

231. Докажите, что площадь вписанного четырехугольника может быть вычислена по формуле:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d – стороны, а p – полупериметр четырехугольника.

232. Докажите, что при диагональном разбиении вписанного четырехугольника образуется четыре пары равных углов (см. рис. 28):

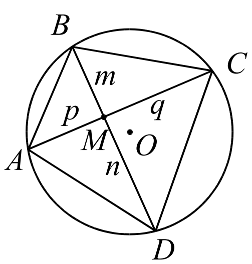


Рис. 28

$$\angle BCA=\angle BDA,$$
$$\angle ABD=\angle ACD,$$
$$\angle DAC=\angle DBC,$$
$$\angle CDB=\angle CAB.$$

233. Докажите, что произведения длин отрезков, на которые каждая диагональ вписанного четырехугольника разбивается точкой пересечения диагоналей, равны $mn = pq$ (см. рис. 28).

234. Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями a и b. Найдите высоту трапеции.

235. Окружность, вписанная в трапецию, разбивает боковую сторону точкой касания на отрезки длины m и n. Найдите ее радиус.

236. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найдите радиус этой окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

237. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найдите длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.

238. В ромбе диагонали равны 10 и 24 *см*. Найдите радиус окружности, вписанной в этот ромб.

239. В ромб с острым углом $30°$ вписан круг, а в круг – квадрат. Найдите отношение площади ромба к площади квадрата.

240. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найдите расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 *см*.

241. Найдите отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой $180°$, к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой $90°$.

242. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, равные 2 и 23 *см*. Найдите радиус окружности.

243. В трапецию, периметр которой равен 42 *см*, вписана окружность. Три стороны трапеции, взятые в последовательном порядке, относятся как 2:7:12. Найдите площадь трапеции.

244. Средняя линия равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 170. Найдите радиус круга, если известно, что нижнее основание больше верхнего на 160.

245. Найдите диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если сумма оснований трапеции равна 15 а разность оснований равна 9.

246. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен 1/3, синус угла ABD равен 5/9.

247. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен $60°$, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

248. В равнобокой трапеции боковая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки с длинами 5 *см* и 8 *см*. Найдите площадь круга, вписанного в трапецию.

249. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6 *м*, большее – 12 *м*, угол при основании – $60°$. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

250. В прямоугольной трапеции, описанной около окружности, большая боковая сторона равна 13, а средняя линия равна 12,5. Найдите ее меньшее основание.

251. (ЕГЭ, 2006). Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса $\sqrt{5}$, если тангенс угла при основании трапеции равен 0,5.

252. В трапеции $ABCD$ синус угла между боковой стороной и большим основанием AD равен 5/6, а синус угла ADB равен $\sqrt{7}/4$. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 8.

Примеры многовариантных задач

Пример 7. *Дан параллелограмм* $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. *Окружность с центром в точке* O *касается биссектрисы угла* D *и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найти площадь четырехугольника* $ABOD$.

Решение. Возможны два случая расположения окружности, указанной в условии задачи, относительно биссектрисы угла D.

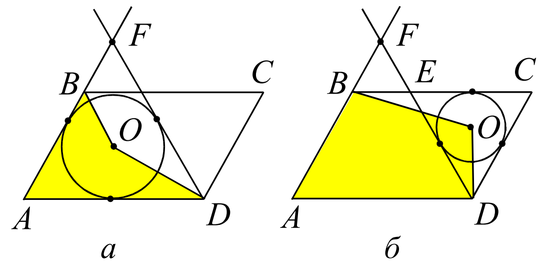


Рис. 29

1. Окружность касается сторон угла с вершиной в точке A и является вписанной в треугольник AFD (см. рис. 29*а*). Треугольник AFD – равнобедренный, а так как $\angle A = 60°$, то этот треугольник является равносторонним со стороной 3. Радиус вписанной в него окружности равен

$$r = \frac{AD\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В этом случае искомая площадь находится следующим образом:

$$S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} =$$
$$= \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

2. Окружность вписана в угол с вершиной в точке C и является вписанной в треугольник ECD (см. рис. 29*б*). Тогда:

$$r = \frac{CD\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S_{ABOD} = S_{ABCD} - S_{BCO} - S_{DOC} =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Пример 8. *Основания трапеции равны* a *и* b. *Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как* $2:3$. *Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.*

Решение. Пусть параллельная прямая пересекает боковые стороны AB и CD трапеции в точках E и F соответственно, $EF = x$. Обозначим $S_{BCFE} = S_1$, $S_{AEFD} = S_2$, и пусть

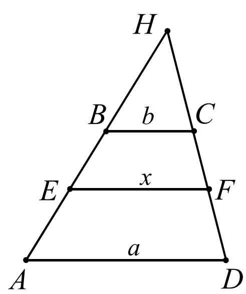


Рис. 30

$S_1 : S_2 = 2:3$, тогда $S_2 = 1{,}5S_1$.

Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника AHD (см. рис. 30) и обозначим $S_{BHC} = S$. Так как треугольники AHD и BHC подобны (докажите), то имеем

$$\frac{S_{AHD}}{S_{BHC}} = \frac{S+S_1+S_2}{S} = \frac{a^2}{b^2}.\ (*)$$

Так как треугольники EHF и BHC подобны (докажите), то имеем

$$\frac{S_{EHF}}{S_{AHD}} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ или } \frac{S+S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2}.\quad (**)$$

Из соотношений $(*)$ и $(**)$ имеем

$$1+\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{a^2}{b^2} \text{ и } 1+\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2}.$$

Далее $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{a^2-b^2}{b^2}$ и $\frac{S_1}{S} = \frac{x^2-b^2}{b^2}$.

Разделив одно равенство на другое, получим $\frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{a^2-b^2}{x^2-b^2}$.

С учетом соотношения $S_2 = 1{,}5S_1$ имеем уравнение относительно переменной x: $\frac{a^2-b^2}{x^2-b^2} = \frac{5}{2}$, откуда $x = \sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$.

2. Случай, когда площади трапеций $AEFD$ и $BCFE$ относятся как $2:3$, рассмотрите самостоятельно. В этом случае площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как $3:2$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Ответы к упражнениям главы 1

1. 24; 32 и 40 *см*. **2.** 17; 34 и 24 *см*. **3.** 10; 10 и 12 *см*. **4. а)** да; **б)** нет; **в)** нет. **5.** 70°; 70°; 40° или 70°; 55°; 55°. **6.** 10°; 140°. **7.** 7. **8.** 3. **9.** 5 *см*. **10.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **11.** $\sqrt{7}$. **12.** 30°. **17.** $(\sqrt{6}+2):1$ или $(\sqrt{3}+1):2$. **18.** $\sqrt{42}$; $\sqrt{33}$. **19.** 3; 6; 9. **20.** 282,24 *см*^{2}. **21.** 36 *см*^{2}. **22.** $\frac{72}{13}$ и $\frac{84}{13}$ *см*. **23.** 36 *м*^{2}. **24.** 15. **25.** 40 и 5 *см* или 10 и 20 *см*. **26.** 24 *см*. **28.** 13 *см*. **29.** 8. **30.** 18. **31.** 7; 24; $\frac{168}{25}$. **32.** 18. **33.** $3/8$. **34.** 20. *Указание.* Используйте метод площадей. **35.** $S_{NBP} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$, $S_{ABC} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. **36.** $S_{ABC} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. **37.** $S_{MNP} = S(mn-mk+k-nk)$. **38.** $BK:KC = 2$. **39.** 1:2. **40.** 4:5. **41.** $n/(n+m)$. **42.** $\frac{BQ}{QE} = \frac{m}{n}\cdot\left(1+\frac{q}{p}\right)$, $\frac{AQ}{QD} = \frac{p}{q}\cdot\left(1+\frac{n}{m}\right)$. **46.** *Указание.* Достройте треугольник до параллелограмма и используйте соотношения между сторонами и диагоналями параллелограмма. **47.** *Указание.* Достройте треугольник MBC до параллелограмма и используйте соотношения между сторонами и диагоналями параллелограмма, где M – точка пересечения медиан. **48.** 21. **49.** 3. **50.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ *см*^{2}. **51.** 3. **52.** 26 *см*. **53.** 10 *см*. **54.** 3. **59.** $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$. **60.** $|\cos\beta|$. **61.** 26 и 30 *см*. **62.** 7 и $4\sqrt{2}$ *см*. **63.** 5. **64.** 12. **65.** 75 *см*^{2}. **66.** 8. **67.** $4\sqrt{5}$ и $8\sqrt{5}$. **68.** 3,75. **69.** 120. **70.** $4\sqrt{5}$. **71.** 30°, 60°, 90°. **72.** 10 *см*. **73.** 27. **74.** 25. **81.** 6; 7 и 9 *см*. **82.** 2:1, считая от вершины C. **83.** 10 *см*. **84.** 6 *см*. **85.** $12\sqrt{2}$ *см*. **86.** 4,8. **87.** $\frac{630}{31}$. **88.** 112. **89.** 1176 *см*^{2}. **90.** 1 *см*. **91.** 8. **92.** 9 *см*^{2}. **93.** $\frac{5}{12}$. **94.** $c = \sqrt{b(a+b)}$. **97.** 14. **98.** 4. **99.** 13, 14 и 15. **100.** $\frac{3\sqrt{10}}{4}$. **101.** 126. **102.** 3 или 6 *см*. **103.** 30. **104.** 36. **105.** 84. **106.** 90. **107.** 6. **108.** 10, 10 и 12. **109.** $14+8\sqrt{3}$. **110.** 3. **111.** 21. **112.** $\sqrt{3}-1{,}5$. **113.** 60 *см*^{2}. **114.** 40. **115.** 9, 12 и 15. **116.** 3 и 4. **117.** 1,2 *см*^{2}. **118.** $\frac{20}{7}$ и $\frac{15}{7}$. **119.** $5\sqrt{2}$ *см*. **120.** 1 *см*. **121.** 24. **125.** 168. **126.** 5 *см*. **127.** $4\sqrt{3}$. **128.** 18. **129.** 150°. **130.** 15. **131.** 98,4. **132.** 12. **133.** 8. **134.** 7. **135.** 15. **136.** 32 *см*^{2}. **137.** 8 *м*. **138.** 30 *м*. **139.** $\sqrt{5}$. **140.** 25. **141.** $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\beta$. **142.** $\frac{2r}{a}\sqrt{a^2-r^2}$. **143.** 9 *см*. **144.** $\sqrt{2(b^2-r^2)}$. **145.** $\frac{5}{3}r$. **146.** 6. **147.** 4 и 14 *см*. **148.** 13 *см*. **149.** 12 и 20 *см*. **150.** 14 *см*. **151.** $S = \pi Q/2$. **152.** $2\sqrt{l^2-R^2}$. **153.** $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **154.** $2\sqrt{Rr}$. **155.** $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. **156.** 3; 4 и 5 *см*. **157.** $2\sqrt{2}$.

158. $r_1=\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$. **159.** $\dfrac{R}{r}=3$. **160.** $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}$.

161. $CA=\dfrac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}$, $DA=\dfrac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}$. **162**. $r=R(\sqrt{2}-1)$. **163.** 5. **165.** 9:4. **166.** 7. **167.** $\dfrac{5(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})}{2}$. **168.** 7,5. **169.** $\sqrt{a^2-(R\pm r)^2}$.

171. $2r\cdot\arccos\dfrac{r^2+m^2-R^2}{2rm}$. **172.** 10.

173. 45. **174.** 108. **175.** 2,5. **176.** 18. **177.** 24. **178.** $\sqrt{3}$ *см*. **179.** $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **180.** $2\sqrt{3}+3$. **181.** 9 и 12 *см*. **182.** 300 *см*^{2}. **183.** $3\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ *см*. **184.** 10; 12 и $2\sqrt{91}$ *см*. **185.** 48 *м*^{2}. **186.** $9\sqrt{3}$ *см*^{2}. **187.** 66. **188.** 9; 9 и $6\sqrt{2}$ *см*.

189. 28. **190.** 112. **191.** $\dfrac{a^2}{a+b}$. **192.** 3/16.

193. $2(S_1+S_2)$. **194.** $S=\dfrac{(a-b)^2}{2}\sin\alpha$.

195. 6 *см*. **196.** 14; 21 и 28 *см*. **197.** $2\sqrt{14}$ и $2\sqrt{35}$ *см*. **198.** 10. **199.** 225 *см*^{2}. **200.** 2; 2 и 4. **201.** 2. **203.** 2,4 *см*. *Указание.* Использовать подобие треугольников. **204.** $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$. **205.** *Указание.* Использовать равенство треугольников. **206.** 14. **207.** 2,4 *см*. **208.** 18 *см*. *Указание.* Используйте подобие треугольников. **209.** 5:1 или 1:5. **210.** 49 *см*^{2}. **211.** 3 и 5 *см*. **212.** 40. **213.** 12,5; 16,9; 29,4 и 14 *см*. **214.** 9,6. **215.** 16 или 32 *см*. **216.** 4,8. **217.** 192. **218.** 1. **219.** 25. **220.** 1024 *см*^{2}. **221.** 72 *см*^{2}. **222.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. **223.** 81 *см*^{2}. **224.** $44\sqrt{3}$ *см*^{2}. **225.** 5 и 15 *см*. **226.** 96 *см*^{2}. **227.** 450 *см*^{2}. **228.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **234.** $\sqrt{ab}$. **235.** $\sqrt{mn}$. **236.** $r=\dfrac{ab}{a+b}$. **237.** $\sqrt{ab}$.

238. 60/13 *см*. **239.** 4. **240.** 15 *см* и 20 *см*.

241. 10:1. **242.** 17 *см*. **243.** $\dfrac{63\sqrt{6}}{2}$ *см*^{2}.

244. 75. **245.** 6. **246.** 12. **247.** 3. **248.** 40π *см*^{2}. **249.** 6 *м*. **250.** 10. **251.** 10. **252.** 10.

Глава 2. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения элементов фигуры

Настоящая глава посвящена рассмотрению случаев неоднозначного описания взаимного расположения элементов фигуры.

Приведем пример подобной задачи из тех, что были предложены на ЕГЭ по математике в 2011 году, и представляющей собой взаимное расположение одной из вершин трапеции и прямой.

Пример 9. (ЕГЭ-2011). *Периметр равнобедренной трапеции равен* 136. *Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении* $9:25$. *Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найти отношение площади этого треугольника к площади трапеции.*

Решение. В условии задачи неоднозначность возникает в результате того, что не указано конкретно через какую вершину трапеции проходит данная прямая.

Сама трапеция условием задачи задается однозначно. Действительно, поскольку в данную трапецию вписана окружность, то (см. рис. 31*а*) $AB+CD=$ $=BC+AD=68$. Так как по условию трапеция – равнобедренная, то $AB=CD=$ $=34$. Тогда точка касания делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны 9 и 25.

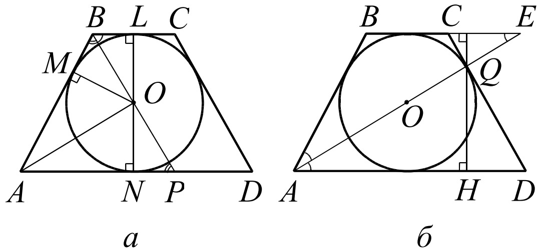


Рис. 31

Пусть точки *M*, *L* и *N* – точки касания окружности боковой стороны *AB* и основания *BC* и *AD* соответственно. Тогда $AM=25$, $MB=9$. Так как отрезок *LN* перпендикулярен основаниям трапеции и точки L и N – середины BC и AD соответственно, а $MB = BL$ и $AM = AN$ (как отрезки касательных, проведенные из одной точки), то $BC = 2BL = 18$, $AD = 2AN = 50$.

Пусть высота трапеции равна h. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 34h.$$

Рассмотрим теперь возможные случаи расположения указанной в условии задачи прямой.

1. Пусть прямая проходит через центр окружности и вершину B (см. рис. 31*а*) и пересекает прямую AD в точке P. Из равенства прямоугольных треугольников OBL и NOP (докажите) следует, что $BL = NP = 9$.

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}(AN + NP) \cdot h = 17h.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{ABP}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, то для прямой, проходящей через вершину C, получим тот же результат.

2. Пусть теперь указанная в условии прямая проходит через центр окружности и вершину A (см. рис. 31*б*) и пересекает прямую BC в точке E, а боковую сторону CD в точке Q. Треугольник ABE – равнобедренный ($\angle BEA = \angle BAE = \angle EAD$) и $AB = BE = 34$. Тогда $CE = BE - BC = 16$.

Треугольники AQD и CEQ подобны с коэффициентом подобия k, равным $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{8}{25}$. Так как высоты этих треугольников, опущенные из точки Q, относятся друг к другу с коэффициентом k и в сумме равны h, то высота QH треугольника AQD равна $\dfrac{25}{33}h$. Тогда

$$S_{AQD} = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{25}{33} h = \frac{625}{33} h.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{AQD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{625}{33 \cdot 34} = \dfrac{625}{1122}$.

Тот же результат получится и для прямой, проходящей через вершину D.

***Ответ*:** $\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{625}{1122}$.

Методические указания. Анализ содержания задачной базы школьных учебников по геометрии показывает, что многовариантных задач практически нет и они довольно непривычны для школьников. Поэтому подобные задачи нужно решать, начав с достаточно простых и постепенно увеличивая их сложность.

Полезно при решении задач задавать следующие вопросы:

«Можно ли построить другую фигуру, неравную данной, но также удовлетворяющую условию задачи?»

«При каких числовых значениях заданных элементов нельзя построить описанную в условии фигуру?» и др.

Ответы на подобные вопросы позволяют выявить различные ситуации, возникающие при решении задачи.

Проведем некоторую классификацию типов многовариантных задач, связанных с неоднозначностью описания взаимного расположения элементов фигуры, выделяя в каждом из них некоторые подготовительные задачи.

расположение точек на прямой

В данном пункте рассмотрим расположение точек на одной прямой или на двух прямых.

Методические указания. В качестве подготовительных задач рассмотрим следующие.

1. *На прямой взяты точки A, B и C так, что расстояние между точками A и B равно* 5, *а между B и C равно* 3. *Найти расстояние между точками A и C.*

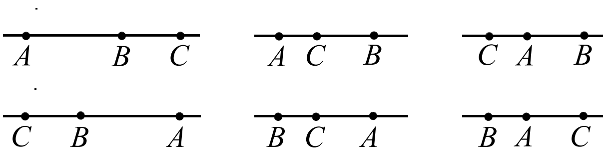
Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано взаимное расположение точек A, B и C на прямой относительно друг друга. Можно записать шесть различных вариантов расположения этих точек: A, B, C или C, B, A; A, C, B или B, C, A; C, A, B или B, A, C (см. рис. 32).

***Ответ*:** 8 или 2.

В следующей задаче наличие дополнительной информации о расположении точек на прямой (левее, правее, деление отрезка в заданном отношении) сокращает перебор случаев.

2. *На прямой взяты точки* A, B *и* C *так, что точка* B *расположена правее точки* A *и* $AB:BC=3$. *Найти отношение* $AC:AB$.

Комментарий. В данном случае необходимо рассмотреть только три различных варианта расположения этих точек: A, B, C, A, C, B и C, A, B.



а *б* *в*

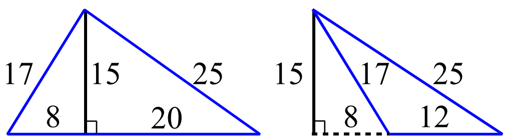
Рис. 32

Ответ: $\frac{4}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

Как правило, в экзаменационных задачах точки «привязаны» к более сложной конфигурации и от их расположения зависит перебор вариантов для построения чертежа.

3. *Вычислить площадь треугольника, если две его стороны равны* 25 *и* 17, *а высота, проведенная к третьей стороне, равна* 15.

Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано, лежит или нет основание высоты, проведенной к третьей стороне, на ней. Возможно два варианта чертежа (см. рис. 33).



а *б*

Рис. 33

Ответ: 210 или 90.

4. *Вычислить периметр трапеции, боковые стороны которой* 25 *и* 17, *высота* 15, *а одно из оснований равно* 12.

Комментарий. В данном примере возможно только два варианта построения трапеции $ABCD$ и $ABCD_1$ (см. рис. 34).

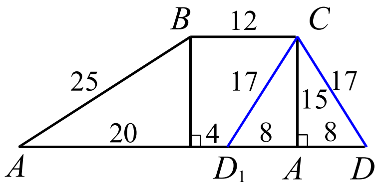


Рис. 34

Ответ: 78 или 94.

Пример 10. *На стороне* BC *параллелограмма* $ABCD$ *выбрана точка* E, *делящая эту сторону в отношении* $2:3$. *Отрезок* DE *пересекает диагональ* AC *в точке* F. *Какую часть площади параллелограмма* $ABCD$ *составляет площадь треугольника* AFD?

Решение. Поскольку в условии задачи не указано относительно какого из концов отрезка BC он делится точкой E в отношении $2:3$, то возможны два случая (на рис. 35 точки E и E_1 такие, что $BE:EC=2:3$ и $E_1C:BE_1=2:3$).

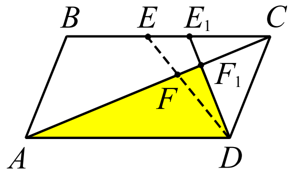


Рис. 35

1. Если $BE:EC=2:3$, то $BE=\frac{2}{3}EC$ и $BC=EC+\frac{2}{3}EC=\frac{5}{3}EC$. Треугольники ECF и DFA подобны по трем углам и $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{EC}=\frac{BC}{EC}=\frac{5}{3}$. Тогда $FC=\frac{3}{5}AF$ и $AC=\frac{8}{5}AF$.

Диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника, тогда $S_{ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Треугольники AFD и ACD имеют общую вершину D и их основания лежат на одной прямой. Следовательно, их площади относятся как основания, т.е. $\frac{S_{AFD}}{S_{ACD}}=\frac{AF}{AC}=\frac{5}{8}$. Отсюда

$$S_{AFD}=\frac{5}{8}S_{ACD}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{5}{16}S_{ABCD}.$$

2. В случае $E_1C:BE_1=2:3$, решая аналогичным образом, получим

$$S_{AF_1D} = \frac{5}{14} S_{ABCD}.$$

Ответ: $\frac{5}{14}$ или $\frac{5}{16}$.

Пример 11. (МИОО, 2010). *В прямоугольнике ABCD* $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. *Точка E на прямой AB выбрана так, что* $\angle AED = \angle DEC$. *Найти AE.*

Решение. По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC = CD = 2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BEC с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE = 1$.

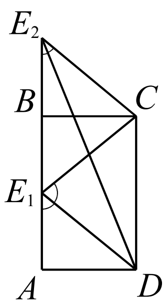


Рис. 36

Ключевым моментом этой задачи является расположение точки E на прямой относительно двух данных на ней точек A и B.

1. Если точка E лежит между точками A и B (точка E_1 на рис. 36), то $AE = 1$.

2. Если точка B лежит между точками A и E (точка E_2 на рис. 36), то $AE = 3$.

3. Положение точки A между B и E невозможно, так как в этом случае $\angle AED > \angle DEC$ (сделайте рисунок), т.е. не выполняется условие задачи.

Ответ: 1 или 3.

Пример 12. (ЕГЭ, 2010). *В треугольнике ABC* $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$. *Точка D лежит на прямой BC так, что* $BD : DC = 4 : 9$. *Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найти длину отрезка EF.*

Решение. Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Тогда для окружности, вписанной в треугольник ADC, имеем

$$DE = \frac{d + y - 10}{2},$$

а окружности, вписанной в треугольник ADB,

$$DF = \frac{d + x - 12}{2}.$$

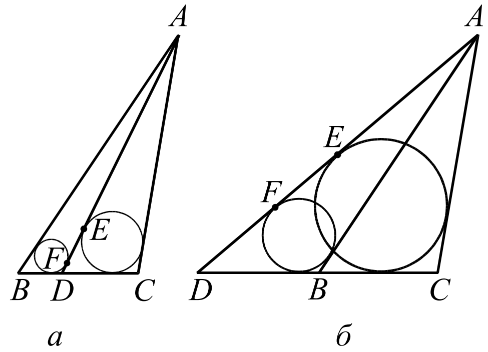


Рис. 37

Поскольку в условии сказано, что точка D лежит на прямой BC, то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие $BD : DC = 4 : 9$. Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть точка D лежит на отрезке BC (рис. 37*а*). Тогда $x = \frac{20}{13}$, $y = \frac{45}{13}$. Значит,

$$EF = |DE - DF| =$$

$$= \left| \frac{d + y - 10}{2} - \frac{d + x - 12}{2} \right| = \frac{51}{26}.$$

2. Пусть точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 37*б*). Тогда $x = 4$, $y = x + BC = 9$. Значит, $EF = |DE - DF| = \frac{7}{2}$.

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD, то при вычислении длины отрезка EF использован знак модуля.

Ответ: $\frac{7}{2}$ или $\frac{51}{26}$.

Пример 13. (МИОО, 2011). *Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причем треугольник ABC – остроугольный и равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.*

Решение. Возможно два варианта чертежа, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть $BC = AC = 13$ (см. рис. 38*а*), точка H – основание высоты CH треугольника ABC, $CH = 12$. Так как CH также является и медианой, то

$$AH = \sqrt{CA^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

и

$$BA = 2AH = 2 \cdot 5 = 10.$$

Тогда, используя формулу для радиуса r вписанной окружности в треугольник ABC, получаем

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{0{,}5 \cdot CH \cdot AB}{0{,}5 \cdot (AB + BC + CA)} = \frac{10}{3}.$$

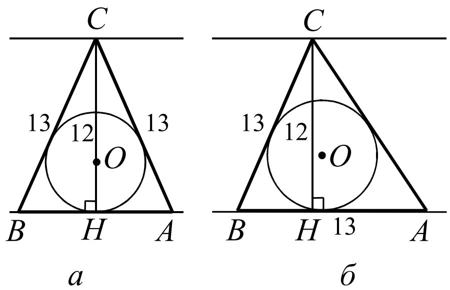


Рис. 38

2. Пусть $AB = BC = 13$ (см. рис. 38*б*). Проведем высоту CH треугольника ABC. Если бы точка H лежала на продолжении стороны AB, то это означало бы, что треугольник ABC – тупоугольный. По условию он – остроугольный. Значит, точка H лежит на стороне AB.

Из прямоугольного треугольника BCH находим $BH = 5$. Тогда $HA = BA - BH = 13 - 5 = 8$. Из прямоугольного треугольника HCA находим $CA = 4\sqrt{13}$.

Аналогично случаю 1, получаем

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{0{,}5 \cdot CH \cdot AB}{0{,}5 \cdot (AB + BC + CA)} = \frac{6 \cdot 13}{13 + 2\sqrt{13}} = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC отрезок MK с концами на сторонах AB и BC параллелен AC. Найдите длину отрезка MK, если известно, что $AC = 10$, а точка M делит сторону AB в отношении 2:3.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении $1:2$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

3. (МИОО, 2010). Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найти площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Ответы. 1. 4 или 6. **2.** 180 или 90. **3.** 2 или 10.

расположение точек вне прямой

Методические указания. В данном пункте рассмотрим примеры расположения прямой и точки; примеры расположения двух точек по одну сторону от прямой или по разные; примеры взаимного расположения одной или нескольких точек и двух параллельных прямых. При этом точки могут располагаться в одной или разных полуплоскостях и связанны некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

1. *На стороне BC квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник BCP. Найти высоту треугольника APD, проведенную из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна* 1.

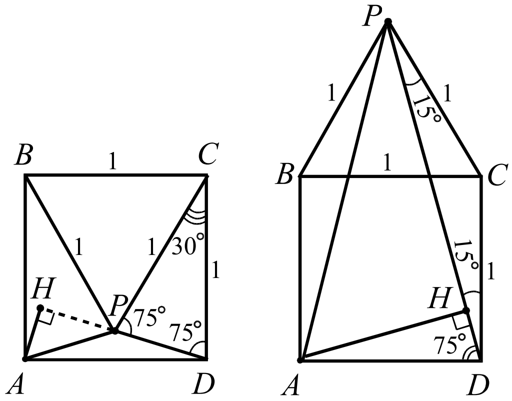
Комментарий. Возможно два варианта чертежа, удовлетворяющих условию задачи.

1. Точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC (см. рис. 39*а*). В равнобедренном треугольнике PCD получаем $\angle PCD = 30^\circ$ и $\angle PDC = \angle DPC = 75^\circ$. Тогда из треугольника APD находим $\angle ADPD = 15^\circ$ и высоту AH

$$AH = AD \cdot \sin\angle HDA = AD \cdot \sin\angle PDA =$$

$$= 1 \cdot \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$



а б

Рис. 39

2. Точки P и A лежат по разные стороны от прямой BC (см. рис. 39*б*). Также рассматриваем углы равнобедренного треугольника PCD, затем из треугольника APD имеем

$$AH = AD \cdot \sin\angle HDA = AD \cdot \sin\angle PDA =$$
$$= 1 \cdot \sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. *Окружность радиуса* 2 *касается стороны AC прямоугольного треугольника ABC в точке C. Найти расстояние от вершины B до центра окружности, если катеты треугольника AB и AC равны* 5 *и* 4 *соответственно.*

Комментарий. В данном примере возможно два варианта рисунков, удовлетворяющих условию задачи, так как центр окружности может лежать выше или ниже прямой AC (см. рис. 40).

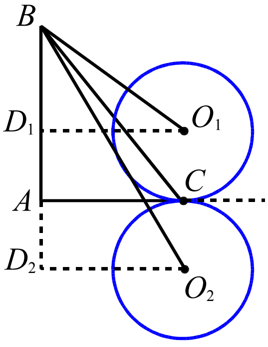


Рис. 40

Дальше, используя теорему Пифагора, нетрудно получить ответ.

Ответ: 5 или $\sqrt{65}$.

3. *Концы отрезка отстоят от прямой на расстоянии* 6 *и* 14. *Найдите расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.*

Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано, лежат концы отрезка в одной или разных полуплоскостях относительно прямой. Возможно два варианта чертежа (см. рис. 41).

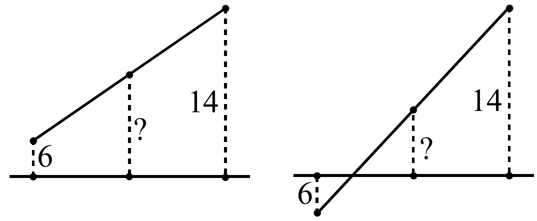


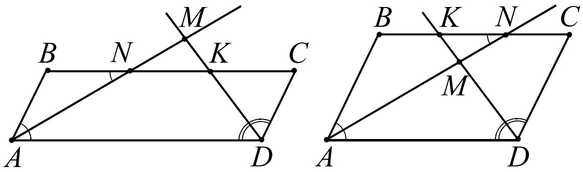
Рис. 41

Ответ: 10 или 4.

Пример 14. *Дан параллелограмм ABCD. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен* 40.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрис через M, а точки пересечения биссектрис AM и DM со стороной BC через N и K соответственно. В зависимости от расположения точки M относительно прямой (отрезка) CD возможны два варианта для чертежа.

1. Пусть точка M расположена вне параллелограмма. Так как биссектриса AM отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABN (см. рис. 42*а*), то $AB = BN = NK = KC = x$.



а б

Рис. 42

Периметр параллелограмма равен 40, поэтому из уравнения

$$2(x+3x) = 40$$

находим $x = 5$. Значит, $AB = 5$, $BC = 15$.

2. Если точка M расположена внутри параллелограмма (см. рис. 42*б*), то обозначив NC через y, получим $AB = BN = 2y$.

Из уравнения $2(2y+3y) = 40$ находим $y = 4$. Значит, $AB = 8$ и $BC = 8 + 4 = 12$.

Ответ: 5; 15 или 8; 12.

Пример 15. *Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки* 3 *и* 4. *Найти радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.*

Решение. Пусть $AC = 3$, $BC = 4$, тогда $AB = 5$. Возможны два случая расположения центра указанной окружности относительно прямой (отрезка) AB (см. рис. 43). Отсюда получаем два вида окружностей для треугольника ABC: вписанная и вневписанная.

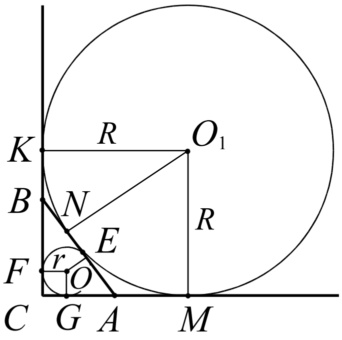


Рис. 43

1. Окружность вписана в треугольник.

1-*й способ*. Пусть r – радиус вписанной окружности с центром O. Так как $FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$AG = AE = b - r,\ BF = BE = a - r.$$

Тогда $c = AB = AE + BE = b - r + a - r$.

Отсюда $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{4+3-5}{2} = 1$.

2-*й способ*. Выразим площадь прямоугольного треугольника двумя способами:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6,\ S_{ABC} = pr,$$

где $p = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$.

Тогда из равенства площадей получаем

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6}{6} = 1.$$

2. Окружность является вневписанной для треугольника ABC (см. рис. 43). Пусть R – радиус вневписанной окружности с центром O_1. Тогда $BK = BN$ и $NA = AM$, как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Учитывая, что CKO_1M – квадрат, получим

$$2R = KC + CM =$$
$$= BC + BN + AN + AC = P_{ABC} = 12.$$

Отсюда $R = p_{ABC} = 6$.

Ответ: 1 или 6.

Пример 16. (ЕГЭ, 2011). *Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами* 10, 10 *и* 12, *отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.*

Решение. Пусть ABC – данный треугольник, в котором $AC = 12$ – основание, $AB = BC = 10$, тогда его полупериметр равен $p = 16$. Окружность, о которой говорится в условии – окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть $\angle BCA = \gamma$, а $\angle ABC = \beta$. Тогда $\cos\gamma = \dfrac{AC}{2BC} = \dfrac{3}{5}$, $\sin\gamma = \dfrac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = \dfrac{4}{3}$, $S_{ABC} = \dfrac{AC\cdot BC\cdot \sin\gamma}{2} = 48$, а $\sin\beta = \dfrac{2S_{ABC}}{AB\cdot BC} = \dfrac{24}{25}$, $\cos\beta = \dfrac{7}{25}$, (угол ABC – острый, почему?), $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{24}{7}$.

Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, находим по формуле

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P} = \frac{2\cdot 48}{10+10+12} = 3.$$

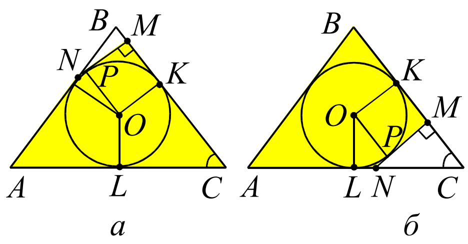


Рис. 44

Так как треугольник ABC – равнобедренный, то окружность касается основания в его середине – точке L, а $CK = CL = 6$ по свойству касательных.

Возможно два варианта чертежа, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть прямая, перпендикулярная BC, касается окружности и пересекает BC

в точке M, а AB в точке N (см. рис. 44*а*). Опустив из точки O перпендикуляры OP и OK на NM и BC соответственно, получаем квадрат $OPMK$. Отсюда получаем, что $MK = r = 3$. Тогда

$$BM = BC - CK - MK = 10 - 6 - 3 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике NBM получаем $MN = BM \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{24}{7}$ и

$$S_{NBM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{24}{7} = \frac{12}{7}.$$

Тогда

$$S_{ANMC} = S_{ABC} - S_{NBM} = 48 - \frac{12}{7} = 46\frac{2}{7}.$$

2. Пусть прямая, перпендикулярная BC, касается окружности и пересекает BC в точке M, а AC в точке N (см. рис. 44*б*). Аналогично предыдущему случаю получаем, что $KM = r = 3$. Тогда $MC = CK - KM = 6 - 3 = 3$.

В прямоугольном треугольнике NMC получаем $MN = MC \cdot \mathrm{tg}\gamma = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ и

$$S_{NMC} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Тогда $S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{NMC} = 48 - 6 = 42.$

Ответ: $46\frac{2}{7}$ или 42.

Пример 17. *Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найти величину угла ACB, если угол OCB равен* $10°$, *а угол AOC равен* $40°$.

Решение. Нарисуем окружность с центром в точке O (см. рис. 45). Зафиксируем сторону BC. Проведем диаметр CC_1. Тогда дуга окружности BC_1, на которую опирается центральный угол BOC_1, равна $20°$.

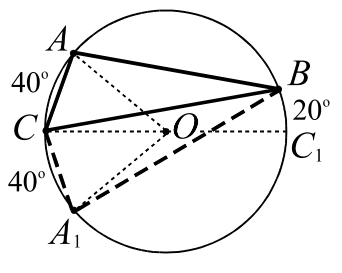


Рис. 45

Рассмотрим радиус OC. В зависимости от расположения точек A и B относительно прямой OC можно построить два центральных угла COA и COA_1 (см. рис. 45), равных $40°$. Тогда возникает два треугольника, удовлетворяющих условиям задачи, ABC и A_1BC.

Если угол ACB треугольника ABC опирается на дугу AB, равную $180° - 40° - 20° = 120°$, то $\angle ACB = 60°$.

Если же угол A_1CB треугольника A_1BC опирается на дугу A_1C_1B, равную $160°$, то $\angle A_1CB = 80°$.

Ответ: $60°$ или $80°$.

Пример 18. *Трапеция с основаниями* 14 *и* 40 *вписана в окружность радиуса* 25. *Найти высоту трапеции.*

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Пусть $BC = 14$ – хорда окружности радиуса 25. Существует две хорды, параллельные BC и равные 40 (см. рис. 46). Соответственно, в окружность можно вписать две трапеции с основаниями 14 и 40. Центр O лежит на серединном перпендикуляре к BC.

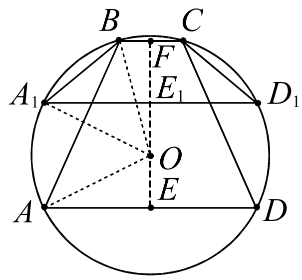


Рис. 46

Рассмотрим два случая расположения центра O относительно параллельных прямых, на которых лежат основания трапеции.

1. В трапеции $ABCD$ центр O окружности лежит внутри трапеции. В этом случае высота $EF = EO + OF$. Из прямоугольного треугольника AOE, в котором $AO = 25$, $AE = \frac{AD}{2} = \frac{40}{2} = 20$, получаем

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

Из прямоугольного треугольника BFO, в котором $BO = 25$, $BF = \frac{BC}{2} = 7$, получаем $OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$.

Тогда $EF = EO + OF = 15 + 24 = 39$.

2. Пусть в трапеции A_1BCD_1 центр O окружности лежит вне трапеции (см. рис. 46). Действуя аналогичным образом, находим $E_1O = 15$,

$$E_1F = OF - E_1O = 24 - 15 = 9.$$

Ответ: 39 или 9.

Задачи для самостоятельного решения

4. В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Найдите длину диагонали трапеции.

5. Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной к окружности из точки C, равна 3. Найдите длину стороны BC, если известно, что $AB = 1$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найти площадь четырехугольника $ABOD$.

7. В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

8. (МИОО, 2011). Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Ответы. 4. $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$. **5.** $\dfrac{3(\sqrt{5}+1)}{2}$ или $\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$. **6.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$ или $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$. **7.** 2 или 12. **8.** $\dfrac{\sqrt{793}}{3}$ или $\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

выбор обозначений вершин многоугольника

Методические указания. К задачам этого типа относят такие задачи, условие которых допускает различные решения в зависимости от варианта буквенного обозначения вершин многоугольника.

В качестве подготовительной задачи можно предложить следующую.

В параллелограмме ABCD один из углов равен $60°$. *Точки E и F являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой EF от параллелограмма ABCD, равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки E, F и C.*

Комментарий. При решении данной задачи необходимо рассмотреть четыре случая (см. рис. 47).

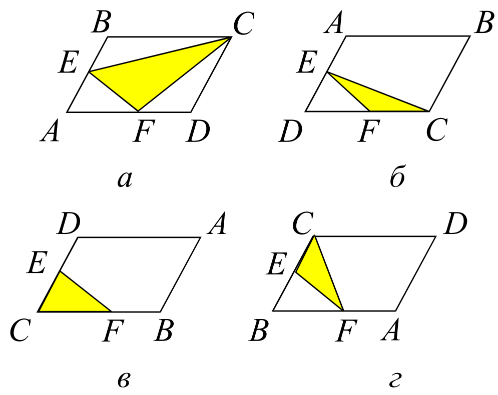


Рис. 47

Ответ: S или $3S$.

Пример 19. *Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна* 9, *а точка E делит одну из диагоналей в отношении* $1:3$.

Решение. При решении данной задачи неоднозначность в условии, как и в предыдущем примере, состоит в выборе варианта буквенного обозначения вершин трапеции и дополнительно к этому в выборе большего основания. Пусть точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины верхнего основания.

1. Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD (см. рис. 48*а*). Треугольники

BEC и DEA подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $k=\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{1}{3}$.

Значит, $\dfrac{S_{BEC}}{S_{AED}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$. Отсюда $S_{BEC}=\dfrac{S_{AED}}{9}=1$. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому $\dfrac{S_{ABE}}{S_{BEC}}=\dfrac{AE}{EC}=3$ и $S_{ABE}=3\cdot S_{BEC}=3$. Аналогично $S_{DEC}=3\cdot S_{BEC}=3$.

Следовательно, искомая площадь равна $S_{ABCD}=1+3+3+9=16$.

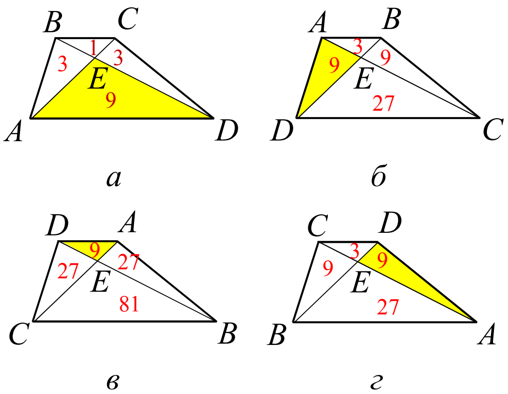


Рис. 48

2. В остальных случаях, решая аналогичным образом, получим:

$S_{ABCD}=3+9+9+27=48$ (см. рис. 48*б* и 18*г*);

$S_{ABCD}=9+27+27+81=144$ (см. рис. 48*в*).

***Ответ*: 16; 48; 144.**

Пример 20. *Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найти площадь четырехугольника $OMPN$.*

Решение. Возможно два варианта чертежа, удовлетворяющих условию задачи и получающихся в результате обозначения вершин.

1. Пусть $BC=a$ – верхнее основание трапеции, тогда нижнее основание, $AD=2BC=2a$ (см. рис. 49*а*) и h – высота трапеции. Площадь трапеции

$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=90.$$

Отсюда $ah=60$.

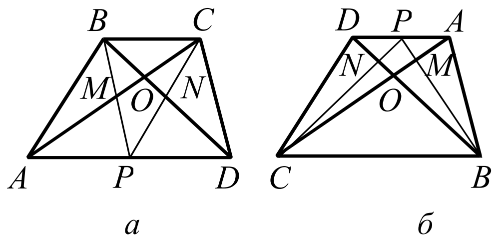


Рис. 49

Так как четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, то точки M и N являются точками пересечения их диагоналей. Тогда BN и CM – медианы треугольника BCP. Следовательно,

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{BCP}=\frac{1}{3}ah=\frac{1}{3}\cdot 60=20.$$

2. Пусть $AD=a$ – верхнее основание, тогда $BC=2AD=2a$ (см. рис. 49*б*).

Так как треугольники COB и AOD подобны с коэффициентом подобия, равным 2, то высота треугольника AOD составляет $\dfrac{1}{3}$ высоты трапеции $ABCD$ и

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}ah=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

Соответственно, треугольники CMB и AMP подобны с коэффициентом подобия, равным 4. Так как $BC:PA=4:1$, то

$$S_{PAM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{5}h=\frac{1}{20}ah=\frac{1}{20}\cdot 60=3.$$

Аналогично получаем, что $S_{DNP}=3$. Тогда

$$S_{OMPN}=S_{AOD}-S_{PAM}-S_{PAM}=10-3-3=4.$$

***Ответ*: 20 или 4.**

Задача для самостоятельного решения

9. Высота CK параллелограмма $ABCD$ равна 12. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD=15$, $CD=14$, а точка K лежит на прямой AB.

Ответ. $\sqrt{673}$ или 13.

выбор некоторого элемента фигуры

Методические указания. К задачам этого типа относят такие задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано какого конкретно из имеющихся. В случае линейного элемента это может быть, например, сторона многоугольника или длина отрезка перпендикуляра, опущенного на сторону фигуры, и т.д. В случае углового элемента это может быть, например, какой-то из углов фигуры.

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

1. *Найти площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны* $30°$, *если одна из его сторон равна* 6.

Комментарий. Для получения ответа необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равно 6 основание, во втором – боковая сторона.

Ответ: $9\sqrt{3}$ или $12\sqrt{3}$.

2. *Найти площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны* 10, *а один из углов равен* $30°$.

Комментарий. В этой задаче аналогично предыдущей необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равен $30°$ угол при основании, во втором – при вершине.

Ответ: 25 или $25\sqrt{3}$.

3. *Площадь треугольника ABC равна* 8. *MN – средняя линия. Найти площадь треугольника CMN.*

Комментарий. При решении данной задачи неоднозначность состоит в выборе средней линии. Необходимо рассмотреть три случая (см. рис. 50), даже если они приводят к одному ответу.

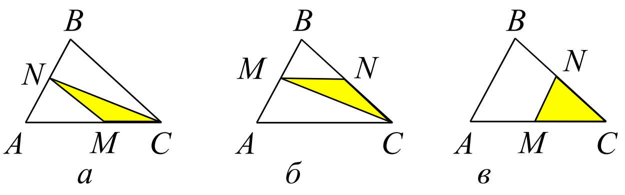


Рис. 50

Ответ: 2.

Рассмотрим более сложные примеры.

При решении следующего примера необходимо предварительно напомнить и разобрать следующую опорную задачу.

Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному треугольнику с коэффициентом подобия, равным $|\cos\angle B|$.

Пример 21. *Точки* A_1, B_1, C_1 *– основания высот треугольника ABC. Углы треугольника* $A_1B_1C_1$ *равны* 90°, 60° *и* 30°. *Найти углы треугольника ABC.*

Решение. Рассмотрим разные виды треугольника, связанные с выбором острого или тупого угла.

1. Треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 51*а*).

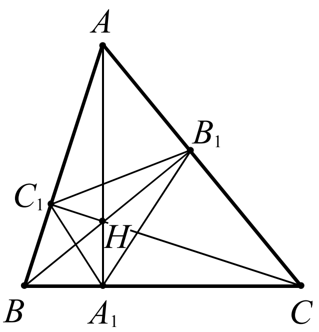


Рис. 51*а*

Так как треугольник BC_1A_1 подобен треугольнику ABC, то $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$. Аналогично из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC имеем $\angle AC_1B_1 = \angle BCA$. Далее развернутый угол при вершине C_1 составлен из суммы углов BC_1A_1, AC_1B_1 и $B_1C_1A_1$. Отсюда получаем соотношение $2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180°$ или $\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1$.

Такие же равенства можно получить для других острых углов. Используем данные углы: $90° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$, $90° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 60°$, $90° - \frac{1}{2}\cdot 30° = 75°$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

2. Угол ACB – тупой (см. рис. 51*б*).

3. Угол ABC – тупой.

4. Угол BAC – тупой.

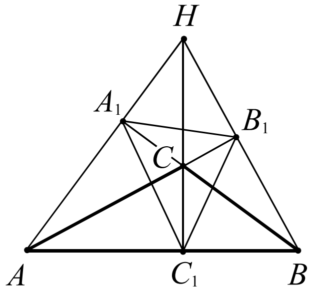


Рис. 51*б*

Случаи, когда один из углов треугольника ABC прямой, невозможны.

Ответ: 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30°, или 120°, 15°, 45°, или 105°, 30°, 45°.

Пример 22. *Треугольник ABC вписан в окружность радиуса* 12. *Известно, что* $AB = 6$ *и* $BC = 4$. *Найдите AC.*

Решение. Используя обобщенную теорему синусов, найдем

$$\sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{2\cdot 12} = \frac{1}{6},\ \sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{2\cdot 12} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$, то

$$\sin\angle B = \sin(180° - \angle A - \angle C) = \sin(\angle A + \angle C).$$

1. Если треугольник ABC – остроугольный, то

$$\cos\angle A = \frac{\sqrt{35}}{6},\ \cos\angle C = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Используя формулу синуса суммы, получим

$$\sin\angle B = \sin(\angle A + \angle C) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24}.$$

Тогда можем найти искомую величину

$$AC = 2R\sin B = 24\cdot\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{24} = \sqrt{35}+\sqrt{15}.$$

2. Пусть угол C – тупой, тогда

$$\sin\angle B = \sin(\angle A + \angle C) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

Отсюда $AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}$.

3. Случай, когда угол A – тупой, невозможен (почему?).

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

Пример 23. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что* $CH = AB$. *Найти угол ACB.*

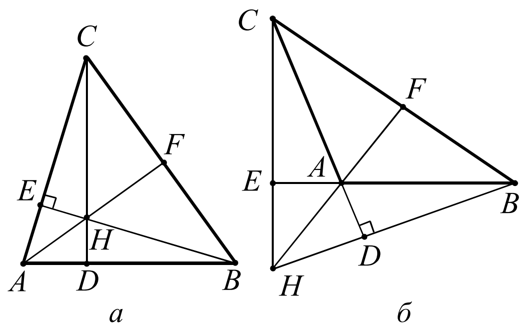


Рис. 52

Решение. 1. Пусть треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 52*а*). Пусть BE и CD – высоты треугольника. Углы ABE и HCE равны, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Треугольники AEB и HEC равны по гипотенузе ($CH = AB$) и острому углу. Отсюда $AE = EH$, и значит, $\angle EAH = \angle AHE = 45°$. В прямоугольном треугольнике ACF имеем $\angle CAF = 45°$, поэтому $\angle ACF = 45°$.

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

2. Угол BAC – тупой (см. рис. 52*б*).
3. Угол ABC – тупой.
4. Угол ACB – тупой.
5. Угол ABC – прямой.
6. Угол BAC – прямой.
7. Случай, когда угол ACB – прямой, невозможен (почему?).

Ответ: 45° или 135°.

Опорная задача. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*

Доказательство. Так как в четырехугольнике $AEHD$ углы E и D прямые (см. рис. 53*а*), то $\angle A + \angle DHE = 180°$. Отсюда получаем $\angle BHC = \angle DHE = 180° - \angle A$. Радиус окружности, описанной около треугольника BHC, равен

$$\frac{BC}{2\sin(180° - \angle A)} = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Отсюда следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой. Аналогичное доказательство проводят и для других треугольников.

Пример 24. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найти угол ACB.*

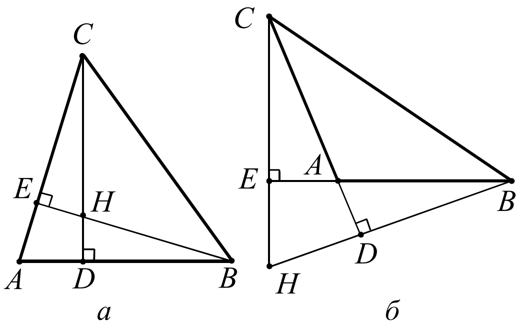


Рис. 53

Решение. Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны между собой, то для треугольника BCH имеем $CH = 2R\sin\angle HBC$ или $R = 2R\sin\angle HBC$.

Отсюда $\sin\angle HBC = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\angle HBC = 30°$ или $\angle HBC = 150°$.

1. Если треугольник ABC – остроугольный, то из треугольника BEC находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$ (см. рис. 53*а*).

2. Если в треугольнике ABC угол A – тупой, то $\angle HBC = 30°$ (в треугольнике DBC угол D прямой, а угол DBC может быть только острым). Из треугольника DBC находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$ (см. рис. 53*б*).

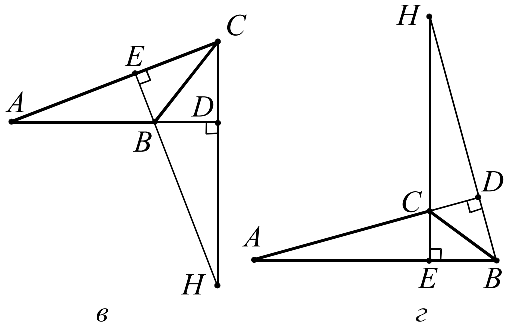


Рис. 53

3. Если в треугольнике ABC угол B – тупой, то $\angle HBC = 150°$ (почему этот угол тупой?) и $\angle CBE = 30°$. Из треугольника CBE (см. рис. 53*в*) находим $\angle C = 90° - 30° = 60°$.

4. Если в треугольнике ABC угол C – тупой (см. рис. 53*г*), то $\angle HBC = 30°$ (почему этот угол острый?). Из треугольника CBD находим $\angle BCD = 90° - 30° = 60°$. Тогда $\angle ACB = 180° - 60° = 120°$.

***Ответ*:** $60°$ или $120°$.

Рассмотрим пример, в котором имеются две точки, делящие окружность на две дуги, но не указано, какой из этих двух дуг касается другая окружность. В этом случае неоднозначность состоит в выборе кругового элемента (дуги).

Пример 25. *Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.*

Комментарий. Сначала следует рассмотреть опорную задачу.

- *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$.

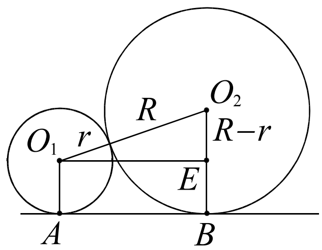


Рис. 54

Доказательство. Из прямоугольного треугольника O_1O_2E (см. рис. 54) получаем

$$AB = O_1E = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - EO_2^{\,2}} = \\ = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Решение. Пусть K и E – центры окружностей S_1 и S_2, I и J – точки касания этих окружностей с прямой OA соответственно. Так как окружность S_1 радиуса a и окружность с центром в точке B и радиуса R касаются друг друга и общей прямой OA, то имеем $OI = 2\sqrt{Ra}$ (расстояние между точками касания окружностей с общей касательной).

В прямоугольном треугольнике OKI, где $OK = R - a$, используем теорему Пифагора:

$$(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2.$$

Отсюда получаем $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса b (см. рис. 55*а*).

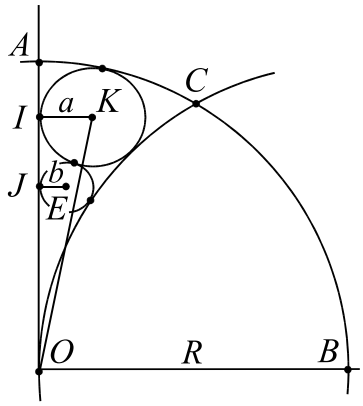


Рис. 55*а*

Тогда $OI = OJ + JI$, или

$$2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab},$$

Откуда $\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab}$. Разделим обе части равенства на $\sqrt{ab}$, тогда имеем

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}},\quad \frac{a}{b} = \frac{7+2\sqrt{6}}{6}.$$

Для второго случая (см. рис. 55*б*) имеем

$$OJ = OI + IJ,$$
$$2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}.$$

Проводя преобразования аналогично предыдущему случаю, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{7-2\sqrt{6}}{6}.$$

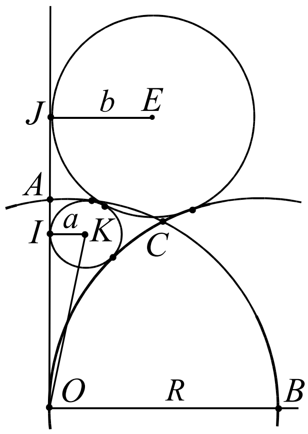


Рис. 55*б*

Ответ: $\dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

10. (МИОО, 2011). Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5:8, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

11. В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Найдите радиус второй окружности.

12. В ромбе $ABCD$ со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

Ответы. 10. 15 или 24. **11.** 0,75 или $\dfrac{3(3-\sqrt{5})}{2}$. **12.** 1 или 2, или $\sqrt{7}$.

выбор плоской фигуры

Задачи данного пункта могут быть связаны с неопределенностью выбора отношения площадей фигур, выбором подобных треугольников и т.д.

Пример 26. *Основания трапеции равны* a *и* b. *Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как* $2:3$. *Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.*

Решение. Обозначим искомый отрезок EF через x (см. рис. 56).

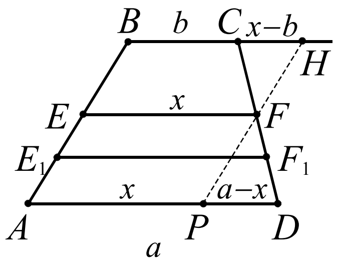


Рис. 56

1. Пусть площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как $2:3$, тогда имеем

$$\frac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}}=\frac{\frac{b+x}{2}\cdot h_1}{\frac{a+x}{2}\cdot h_2}=\frac{2}{3},$$

где h_1 и h_2 – высоты этих трапеций соответственно.

Отсюда

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{2(a+x)}{3(b+x)}, \qquad (*)$$

где h_1 и h_2 – высоты этих трапеций.

Через точку F проведем отрезок PH параллельно AB. Тогда треугольники PFD и HFC подобны (докажите!) и справедливо равенство

$$\frac{CH}{PD}=\frac{h_1}{h_2} \text{ или } \frac{x-b}{a-x}=\frac{h_1}{h_2}.$$

Используем соотношение $(*)$:

$$\frac{x-b}{a-x}=\frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем

$$3(x^2-b^2)=2(a^2-x^2),$$
$$5x^2=2a^2+3b^2,$$
$$x=\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}.$$

2. Случай, когда площади трапеций $AEFD$ и $BCFE$ относятся как $2:3$, решается аналогично. В этом случае площади трапеций $BCFE$ и $AEFD$ относятся как $3:2$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

13. (ЕГЭ, 2011). Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 2:3. Найдите отношение $CK:KF$.

14. (ФИПИ, 2011). Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

Ответы. 13. $\frac{17}{23}$ или $\frac{10}{7}$. **14.** $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

Глава 3. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения фигур

При решении задач условие может трактоваться неоднозначно, если для рассматриваемых фигур не указано их взаимное расположение. Можно выделить, например, следующие случаи, приводящие к неоднозначной трактовке условия задачи и касающиеся:

- взаимного расположения прямолинейных фигур;
- взаимного расположения окружностей;
- интерпретации аналитического способа решения задачи.

3.1. Взаимное расположение прямолинейных фигур

Методические указания. При рассмотрении данного пункта полезно решить подготовительные задачи следующего вида.

1. Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты построения на стороне *AB*:

а) равностороннего треугольника *ABP*;

б) квадрата *ABPQ*.

2. Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты расположения параллелограмма $MNPQ$, вписанного в данный треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника.

Пример 27. *Дан равнобедренный треугольник ABC,* $AB = BC = 10$ *и* $AC = 12$. *Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна* 12.

Решение. Проведем прямую *BD*, где точка *D* – основание высоты данного треугольника. Проводя прямые, параллельные сторонам *BA* и *BC*, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой *AC*, расположенный в верхней или нижней полуплоскости относительно *AC*.

1. Рассмотрим случай, когда прямые $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$ (см. рис. 57*а*).

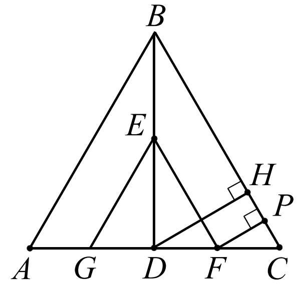


Рис. 57*а*

Тогда $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Пусть $DF = x$, а $DE = y$, тогда используя подобие треугольников *BDC* и *EDF*, данное значение площади треугольника *GFE*, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{8}{y} = \dfrac{6}{x} \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Отсюда следует, что $DF = 3$ и $FC = 3$.

Проведем перпендикуляры DH и FP на прямую *BC*. Так как высота *DH* в прямоугольном треугольнике *BDC* равна

$$\frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8,$$

то из подобия треугольников *DHC* и *FPC* получаем $FP = \dfrac{DH \cdot FC}{DC} = \dfrac{4{,}8 \cdot 3}{6} = 2{,}4$.

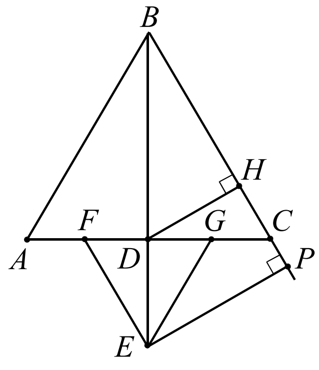


Рис. 57*б*

2. Второй случай расположения прямых *EF* и *EG* (см. рис. 57*б*), приводит к ответу 7,2.

Другие варианты расположения прямых не соответствуют условию задачи.

Ответ**:** 2,4 или 7,2.

Пример 28. (ЕГЭ, 2011). *Точки M, K и N лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причем AMKN – параллелограмм, площадь которого составляет* $\frac{4}{9}$ *площади треугольника ABC. Найти диагональ MN параллелограмма, если известно, что* $AB = 21$, $AC = 12$ *и* $\angle BAC = 120°$.

Решение. Анализ условия задачи показывает, что существует два параллелограмма *AMKN*, удовлетворяющих условию задачи.

Пусть площадь треугольника *ABC* равна *S*, а $\frac{BK}{BC} = k$. Тогда треугольники *MBK* и *ABC* подобны с коэффициентом подобия *k*, а треугольники *NKC* и *ABC* подобны с коэффициентом подобия $1-k$. Поскольку $S_{ABC} = S_{AMKN} + S_{MBK} + S_{NKC}$, то имеем

$$S = \frac{4}{9}S + k^2S + (1-k)^2S;$$

$$k^2 - k + \frac{2}{9} = 0.$$

Отсюда получаем: $k = \frac{2}{3}$ или $k = \frac{1}{3}$.

1. Пусть $k = \frac{2}{3}$ (см. рис. 58*а*), то есть $\frac{BK}{BC} = \frac{2}{3}$ и $\frac{KC}{BC} = \frac{1}{3}$. Тогда $AM = NK = \frac{1}{3}AB = 7$, $AN = MK = \frac{2}{3}AC = 8$.

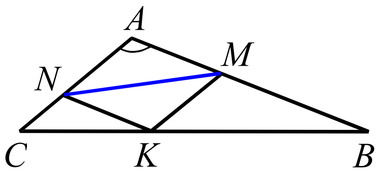


Рис. 58*а*

Используя теорему косинусов для треугольника *NAM*, получаем

$$MN = \sqrt{7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot \cos 120°} = 13.$$

2. Пусть $k = \frac{1}{3}$ (см. рис. 58*б*), т.е. $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$ и $\frac{KC}{BC} = \frac{2}{3}$. Тогда $AM = NK = \frac{2}{3}AB = 14$,

$AN = MK = \frac{1}{3}AC = 4$,

$$MN = \sqrt{14^2 + 4^2 - 2\cdot 14\cdot 4\cdot \cos 120°} = 2\sqrt{67}.$$

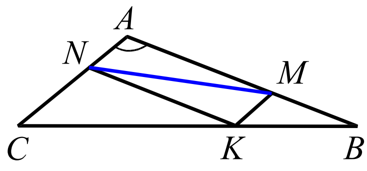


Рис. 58*б*

***Ответ*:** 13 или $2\sqrt{67}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Ромб вписан в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 так, что одна из его вершин совпадает с вершиной острого угла треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника. Найдите площадь ромба.

2. (ФЦТ, 2010). На стороне *CD* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *CPD*. Найдите высоту треугольника *ABP*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона равна 1.

Ответы. 1. $\frac{45}{16}$ или $\frac{80}{27}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.2. Взаимное расположение окружностей

Методические указания. Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему признаку (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

Полезно рассмотреть взаимное расположение окружностей с помощью динамической геометрической программы (например, «Живая Геометрия», «Geogebra» или «Wingeom»): двух окружностей, двух окружностей с общей касательной, двух окружностей с общей хордой. При перемещении одной окружности относительно другой видно наличие общих точек (одна, две, ни одной), возможные варианты касания окружностей (внешнее, внутреннее), варианты касательных (внешние, внутренние), расположение центров касательных относительно общей хорды, общей касательной.

В качестве подготовительных задач можно рассмотреть следующие.

1. К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15.

Ответ: $6\sqrt{6}$ или 12.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BD = 7$, $BC = 13$.

Ответ: 3 или 10.

3. Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B – точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

Ответ: $\frac{24\sqrt{7}}{11}$ или $\frac{16\sqrt{57}}{11}$, или 4,8.

расположение центров окружностей относительно общей касательной

В условии задач этого типа фигурируют две окружности, касающиеся одной прямой, но не указано расположение центров этих окружностей относительно этой прямой. Соответственно эта прямая является внутренней или внешней касательной для этих окружностей.

Пример 29. *Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно a, причем* $R > r$ *и* $a > r + R$. *Найти расстояние между точками касания.*

Решение. Пусть O_1 – центр окружности радиуса R, O_2 – центр окружности радиуса r, A_1A_2 и B_1B_2 – внешняя и внутренняя касательные соответственно (см. рис. 59). Из центра меньшей окружности опустим перпендикуляры O_2K_1 и O_2K_2 на радиус O_1A_1 и продолжение радиуса O_1B_1 соответственно.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $O_1K_1O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = a$, катет $O_1K_1 = R - r$) и $O_1K_2O_2$ (гипотенуза $O_1O_2 = a$ катет $O_1K_2 = R + r$). Из теоремы Пифагора для этих треугольников получим:

$l_1 = A_1A_2 = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ (*длина внешней касательной*);

$l_2 = B_1B_2 = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$ (*длина внутренней касательной*).

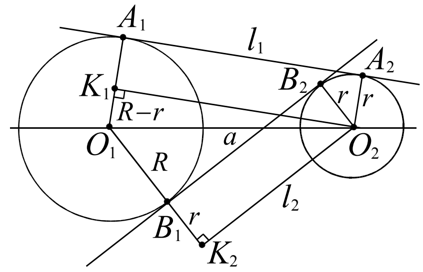


Рис. 59

Ответ: $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

расположение центров окружностей относительно их общей точки касания

В условии задач этого типа фигурируют две окружности, но не указан тип касания (внешний или внутренний, см. рис. 60).

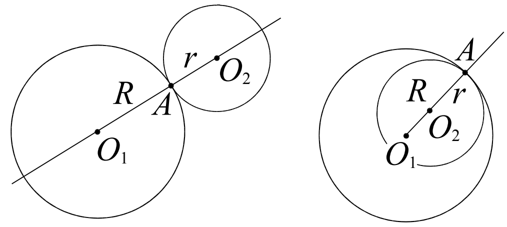


Рис. 60

При решении подобных задач полезно вспомнить следующие факты.

- *При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.*
- *При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.*
- *Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r* $(R \geq r)$ *равно* $R + r$ *при внешнем касании и* $R - r$ *при внутреннем.*

Пример 30. (**ЕГЭ, 2010**). *Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через* *точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что* $AC = 3\sqrt{2}$. *Найти BC.*

Решение. Поскольку в условии не сказано о типе касания окружностей (внешнее или внутреннее), то рассмотрим два случая.

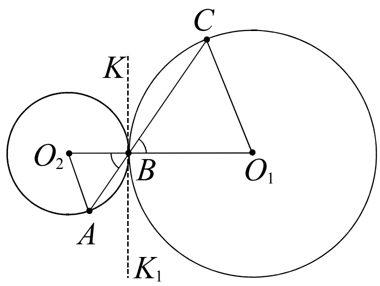


Рис. 61*а*

1. Если окружности касаются внешним образом, то проведем через точку *B* общую касательную KK_1 (она перпендикулярна линии центров, см. рис. 61*а*).

Так как треугольники AO_2B и CO_1B равнобедренные и $\angle O_2BA = \angle O_1BC$, то они подобны по первому признаку подобия. Для подобных треугольников AO_2B и O_1BC можем записать

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

2. Окружности касаются внутренним образом (см. рис. 61*б*). В этом случае при исходных числовых данных задача не имеет решения (докажите это самостоятельно).

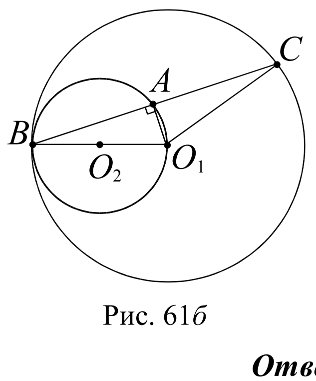


Рис. 61*б*

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пример 31. *Окружности* S_1 *и* S_2 *радиусов* R *и* r ($R > r$) *соответственно касаются в точке* A. *Через точку B, лежащую на окружности* S_1, *проведена прямая, касающаяся окружности* S_2 *в точке M. Найти BM, если известно, что* $AB = a$.

Решение. Возможны два случая расположения указанных окружностей в зависимости от типа касания.

1. Пусть окружности касаются внешним образом (см. рис. 62).

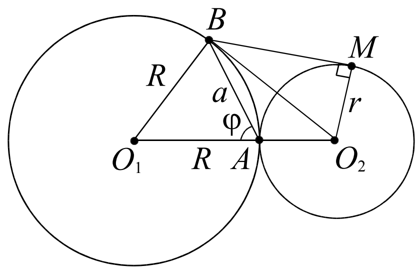


Рис. 62

1-*й способ решения*. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle O_1AB = \varphi$ (см. рис. 62). По теореме косинусов для треугольника O_1AB:

$$O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2O_1A\cdot AB\cos\varphi$$

или

$$R^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi.$$

Отсюда получим $\cos\varphi = \frac{a}{2R}$.

Теперь используем теорему косинусов для треугольника O_2AB:

$$O_2B^2 = O_2A^2 + AB^2 + 2O_2A\cdot AB\cos\varphi$$

или

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + 2r\cdot a\cos\varphi.$$

Подставив $\cos\varphi = \frac{a}{2R}$ в последнее равенство, получим $O_2B^2 = r^2 + a^2 + \frac{a^2r}{R}$.

В прямоугольном треугольнике O_2BM ($\angle BMO_2 = 90°$), используя теорему Пифагора, находим

$$BM^2 = O_2B^2 - r^2 =$$

$$= r^2 + a^2 + \frac{a^2r}{R} - r^2 = a^2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Отсюда $BM = a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}$.

2-*й способ решения*. Продолжим AB до пересечения с окружностью S_2 в точке E (см. рис. 63). Треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные и подобные, так как $\angle O_1AB = \angle EAO_2$. Следовательно, $\frac{AE}{AB}=\frac{r}{R}$ и $AE=\frac{ar}{R}$.

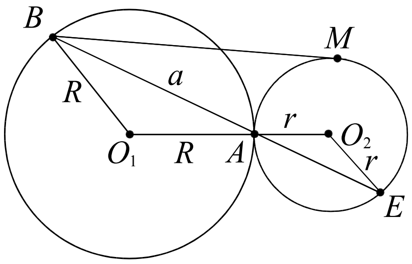


Рис. 63

По теореме о секущей и касательной имеем

$$BM^2 = BA\cdot BE,\ BM^2 = BA\cdot(BA+AE),$$

$$BM^2 = a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right),$$

$$BM = \sqrt{a\cdot\left(a+\frac{ar}{R}\right)} = a\cdot\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

2. Пусть окружности касаются внутренним образом (см. рис. 64). Тогда, проводя аналогичные вычисления, получим $BM = a\cdot\sqrt{1-\frac{r}{R}}$.

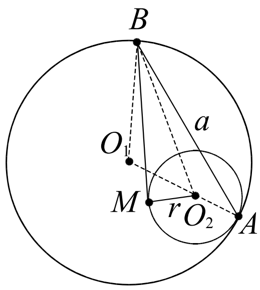


Рис. 64

Ответ: $a\cdot\sqrt{1\pm\frac{r}{R}}$.

Пример 32. *Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем* $\angle CDA = 120^\circ$. *Найти радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если* $OD=\sqrt{3}$.

Решение. Возможны два случая расположения указанной окружности в зависимости от типа касания с данной окружностью. В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла ADC (см. рис. 65).

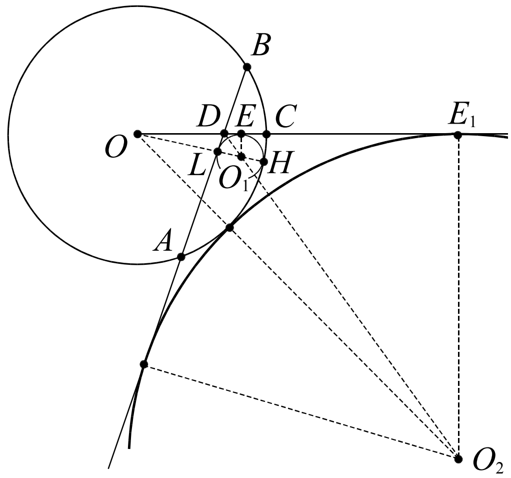


Рис. 65

1. Рассмотрим внутреннее касание окружностей. Пусть радиус искомой окружности с центром в точке O_1 равен r. E – точка касания этой окружности с радиусом OC. В прямоугольном треугольнике DEO_1 $\angle EDO_1 = 60^\circ$ (O_1D – биссектриса угла ADC)

$$DE = r\cdot\text{ctg}60^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Используя теорему о секущей и касательной, получим

$$OL\cdot OH = OE^2,$$

$$(2-2r)\cdot 2 = \left(\sqrt{3}+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$r^2+18r-3=0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень $r = 2\sqrt{21}-9$.

2. В случае внешнего касания искомая окружность радиуса R с центром в точке O_2 касается продолжений сторон DC и DA и данной окружности. Тогда, проводя аналогичные вычисления, получим $R = 3+2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$.

расположение центров окружностей относительно общей хорды

В условии задач этого типа фигурируют две пересекающиеся окружности, но не указано расположение центров окружностей относительно их общей хорды (см. рис. 66*а* и 66*б*).

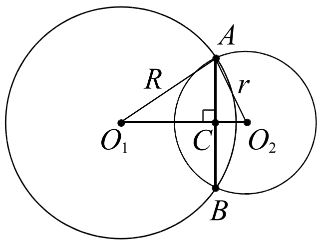


Рис. 66*а*

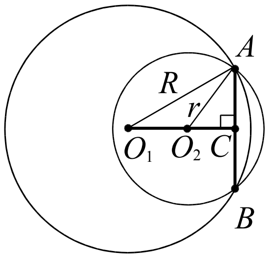


Рис. 66*б*

При решении подобных задач полезно вспомнить следующие факты.

- *Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.*
- *Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.*

Пример 33. *Окружности радиусов* 10 *и* 17 *пересекаются в точках A и B. Найти расстояние между центрами окружностей, если* $AB = 16$.

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому задача допускает два вида чертежа.

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 66*а*). Линия центров O_1O_2 перпендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам. Это следует из равенства треугольников O_1AO_2 и O_1BO_2 по трем сторонам и совпадения оснований высот, опущенных из точек A и B. Тогда из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем:

$$O_1C = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

и

$$O_2C = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Искомое расстояние между центрами равно $O_1O_2 = O_1C + O_2C = 15 + 6 = 21$.

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (см. рис. 66*б*). Аналогично поступая, находим $O_1O_2 = O_1C - O_2C = 15 - 6 = 9$.

***Ответ*: 21 или 9.**

Пример 34. *Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что* $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. *Найти радиусы окружностей.*

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. В условии не указано расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому задача допускает два вида чертежа.

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB (см. рис. 67*а*). Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, то линия центров является биссектрисой углов AO_1B и AO_2B. Получаем

$$\angle AO_1C = 45°,\ \angle AO_2C = 30°.$$

Пусть $AC = x$. Треугольник AO_1C прямоугольный, $\angle AO_1C = \angle CAO_1 = 45°$. Значит $O_1C = AC = x$. Для треугольника AO_2C имеем $O_2C = AC \cdot \text{ctg}30° = x\sqrt{3}$.

Тогда $O_1O_2 = O_1C + O_2C$ или $a = x + x\sqrt{3}$. Отсюда находим $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}+1}$.

Тогда

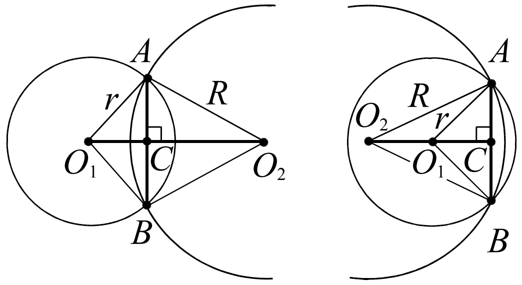
$$O_1A = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},$$

$$O_2A = 2AC = 2x = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды AB (см. рис. 67*б*).

Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$O_1A=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},\quad O_2A=\frac{2a}{\sqrt{3}-1}.$$



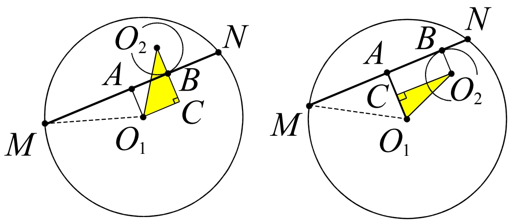
а б

Рис. 67

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},\ \dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},\ \dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности

В условии задач следующего типа фигурируют две окружности, одна из которых расположена внутри другой и касается хорды окружности большего радиуса (см. рис. 68).



а б

Рис. 68

Полезно вспомнить следующее.

- *Вычисления в этой задаче сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике O_1O_2C, при этом расстояние O_1A находится из теоремы Пифагора для треугольника MAO_1* (см. рис. 68*а*, *б*).

Пример 35. *Окружности радиусов* 20 *и* 3 *касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найти длины отрезков AM и MB, если* $AB=32$.

Решение. Пусть точка N – середина хорды AB, тогда расстояние от центра O окружности радиуса 20 до хорды AB равно

$$ON=\sqrt{OB^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12.$$

Рассмотрим два случая.

1. Центры O и O_1 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды AB (см. рис. 69*а*), $O_1M=3$.

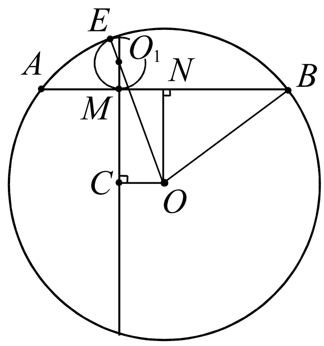


Рис. 69*а*

Продолжив перпендикуляр O_1M к хорде AB за точку M и опустив на него перпендикуляр из центра O, получим прямоугольный треугольник OO_1C, в котором $OO_1=20-3=17$, $O_1C=O_1M+$ $+MC=O_1M+ON=3+12=15$ и $OC=MN$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем

$$OC=\sqrt{OO_1^2-O_1C^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8.$$

Тогда

$$AM=AN-MN=16-8=8$$

и

$$MB=MN+NB=8+16=24.$$

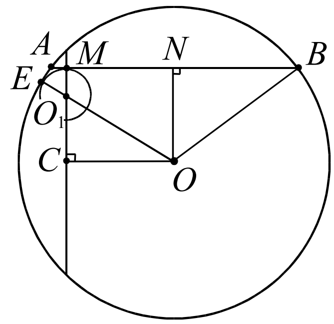


Рис. 69*б*

2. Центры O и O_1 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды AB (см. рис. 69*б*). Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем

$$OC=\sqrt{OO_1^2-O_1C^2}=\sqrt{17^2-9^2}=4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$AM=AN-MN=16-4\sqrt{13} \text{ и}$$
$$MB=MN+NB=4\sqrt{13}+16.$$

Замечание. В данной задаче можно рассмотреть еще два случая, когда точка касания M расположена правее точки N. В этом случае ответы будут $AM=24$ и $MB=8$ или $AM=16+4\sqrt{13}$ и $MB=16-4\sqrt{13}$.

Ответ: 24 и 8; $16+4\sqrt{13}$ и $16-4\sqrt{13}$.

Пример 36. *Расстояние между центрами двух окружностей равно 5r. Одна из окружностей имеет радиус r, а вторая – 7r. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении* $1:6$. *Найти длину этой хорды.*

Решение. Воспользуемся рисунком 68. Пусть хорда $MN=7x$. Тогда расстояние от центра O_1 равно

$$O_1A=\sqrt{MO_1^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=7\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}},$$

а $AB=AN-NB=\dfrac{7x}{2}-x=\dfrac{5x}{2}$.

Рассмотрим два случая.

1. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды MN. Так как $O_1O_2=5r$, $O_2B=r$, то, продолжив перпендикуляр O_2B к хорде MN за точку B и опустив на него перпендикуляр из O_1, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором

$$O_2C=O_2B+BC=r+7\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}} \quad \text{и}$$

$O_1C=AB$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем

$$O_1C^2=O_1O_2^2-O_2C^2 \text{ или}$$

$$\frac{25x^2}{4}=25r^2-\left(r+7\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}\right)^2.$$

Возводя в квадрат выражение, стоящее в скобках, получаем уравнение

$$6x^2-25r^2=14r\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}$$

или

$$\begin{cases}36x^4-251x^2r^2+429r^4=0,\\ 6x^2-25r^2\ge 0.\end{cases}$$

Последняя система не имеет решения, так как корни уравнения $x_1=r\sqrt{3}$ и $x_2=\dfrac{\sqrt{143}}{6}r$ не удовлетворяют условию $6x^2-25r^2\ge 0$. Это значит, что такой случай невозможен.

2. Центры O_1 и O_2 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды MN. Так как $O_1O_2=5r$, $O_2B=r$, то, опустив на отрезок O_1A перпендикуляр из центра O_2, получим прямоугольный треугольник O_1O_2C, в котором

$$O_1C=AO_1-AC=7\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}-r \quad \text{и}$$

$O_2C=AB$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2C получаем

$$CO_2^2=O_1O_2^2-O_1C^2 \text{ или}$$

$$\frac{25x^2}{4}=25r^2-\left(7\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}-r\right)^2.$$

Возводя в квадрат выражение, стоящее в скобках, получаем уравнение

$$25r^2-6x^2=14r\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}$$

или

$$\begin{cases}36x^4-251x^2r^2+429r^4=0,\\ 25r^2-6x^2\ge 0.\end{cases}$$

Получаем два решения $x_1=r\sqrt{3}$ и $x_2=\dfrac{\sqrt{143}}{6}r$. Отсюда находим два значения $MN=7\sqrt{3}r$ и $MN=\dfrac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Ответ: $7\sqrt{3}r$ или $\dfrac{7\sqrt{143}}{6}r$.

расположение точек касания окружности и прямой

Перед решением задач этого типа полезно еще раз вспомнить следующую опорную задачу.

Опорная задача. *Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен* $2\sqrt{Rr}$.

Пример 37. *На стороне BA угла ABC, равного* 30°, *взята такая точка D так, что* $AD = 2$ *и* $BD = 1$. *Найти радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.*

Решение. Центр искомой окружности *O* – точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку *AD* и перпендикуляра к прямой *BC*, восставленного из точки касания *E* (см. рис. 70) окружности и прямой. Возможны два варианта положения окружности. В первом случае окружность касается луча *BC*, во втором точка касания E_1 лежит на продолжении луча *BC* за точку *B*.

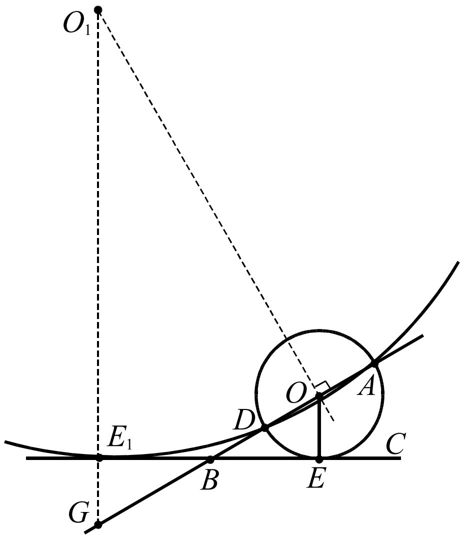


Рис. 70

1. Пусть точка касания лежит на луче *BC*. Тогда по теореме о касательной и секущей имеем

$$BE^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

откуда $BE = \sqrt{3}$.

В треугольнике *BDE* $\angle DBE = 30°$, $BD = 1$, $BE = \sqrt{3}$. Тогда из теоремы косинусов

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2 \cdot DB \cdot BE \cdot \cos(\angle ABE)$$

получаем $DE = 1$ Так как $BD = DE$, то треугольник *BDE* – равнобедренный и $\angle BED = 30°$. Поскольку этот угол образован касательной *BE* и хордой *DE*, то дуга окружности *DE* равна 60°. Следовательно, искомый радиус окружности равен хорде $DE = 1$. Тогда центр *O* окружности совпадает с серединой отрезка *AD*.

2. В случае, когда точка касания лежит на продолжении луча *BC* за точку *B* (см. рис. 70), аналогично имеем

$$BE_1^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

откуда $BE_1 = \sqrt{3}$. Сравнивая прямоугольные треугольники BE_1G и BEO, находим $BG = BO = 2$, $GE_1 = OE = 1$, $\angle BGE_1 = 60°$. Из прямоугольного треугольника GO_1O, в котором $\angle OGO_1 = 60°$, $GO = 4$, находим $GO_1 = 8$. Радиус второй окружности равен $GO_1 - GE_1 = 8 - 1 = 7$.

Ответ: 1 или 7.

Пример 38. *Точка O – центр окружности радиуса* 2. *На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что* $\angle OAK = 60°$. *Найти радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.*

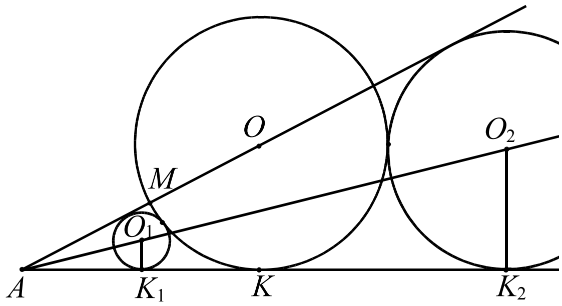


Рис. 71

Решение. Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла *A*, поэтому

$\angle O_1AK_1 = 30°$ (см. рис. 71). K_1 – точка касания этой окружности с прямой *AK*. Из треугольника O_1AK_1 находим $AK_1 = r\cdot \mathrm{ctg}30° = r\sqrt{3}$, где r – радиус искомой окружности. Из треугольника OAK находим

$$AK = OK\cdot \mathrm{ctg}60° = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрение случаев в данной задаче связано с расположением точки касания искомой окружности с прямой *AK* относительно точки касания *K* (левее, правее).

Отрезок внешней касательной окружностей с центрами *O* и O_1 равен

$$2\sqrt{OK\cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}$$

(см. опорную задачу в примере 25). Тогда получаем

$$AK = AK_1 + K_1K$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}.$$

Решаем квадратное уравнение

$$3t^2 + 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0,$$

где $t = \sqrt{r}$. Получаем единственный положительный корень $t = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$. Тогда

$$r = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{2}}{3}.$$

Еще один случай расположения окружностей рассмотрите самостоятельно.

Ответ: $2\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

3. Найдите радиус окружности, вписанной в угол *MKN* равный $2\arcsin 0{,}6$ и касающейся окружности, радиуса 4 также вписанной в угол *MKN*.

4. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

5. Расстояние между центрами двух окружностей равно 10*r*. Одна из окружностей имеет радиус 5*r*, другая 6*r*. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках *A* и *B* и касается большей в точке *C*. Найдите длину хорды.

6. Две окружности радиусов *R* и *r* $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

7. Угол *ABC* равен $60°$, причем $AB = BC = a$. Окружность S_1 касается *AB* в точке *A*, а окружность S_2 касается *BC* в точке *C*, кроме того, эти окружности касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

8. В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда *AB* = 24. Точка *C* лежит на хорде *AB* так, что $AC:BC = 1:2$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды *AB* в точке *C*.

9. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найти радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

Ответы. 3. 1 и 16. **4.** $\dfrac{17}{2}$ или $\dfrac{41}{10}$. **5.** $2r\sqrt{21}$ или $6r$. **6.** $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$.

7. $\dfrac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ и $\dfrac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$, или $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, или $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, или $\dfrac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ и $\dfrac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$. **8.** $\dfrac{8}{3}$ или $\dfrac{32}{3}$. **9.** 1,44 или 36.

3.3. Интерпретация аналитического способа решения задачи

Применение аналитического способа решения геометрической задачи может привести к многовариантности. Наличие нескольких корней уравнения подсказывает о возможном существовании нескольких случаев геометрической конфигурации, которые требуют дальнейшего исследования с целью реализации условия для каждого из полученных корней уравнения.

интерпретация решения уравнения $\sin x = a$

Методический комментарий. Если в составленном уравнении неизвестной является величина угла, то в конечном итоге решение его сводится к одному из простейших тригонометрических уравнений. Только одно уравнение вида $\sin x = a$, $0 < a < 1$, определенное на множестве чисел $(0;\pi)$, имеет два корня α или $\pi-\alpha$. Следующие простые задачи дают интерпретацию каждого из корней вышеприведенного уравнения.

1. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: $45°$ или $135°$.

2. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

Ответ: $30°$ или $150°$.

Пример 39. *Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найти угол AMC.*

Решение. В равнобедренном треугольнике AOC ($OC = OA = R$) угол при вершине равен $60°$. Следовательно, треугольник AOC – равносторонний и $AC = R$.

Используя следствие обобщенной теоремы синусов, получаем

$$AC = 2R\sin B,\ R = 2R\sin B,\ \sin B = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\angle B = 30°$ или $\angle B = 150°$.

1. Пусть $\angle B = 30°$ (см. рис. 72), тогда $\angle A + \angle C = 150°$. Центр вписанной окружности M, лежит на пересечении биссектрис треугольника, значит $\angle MAC + \angle MCA = 150° : 2 = 75°$. Тогда $\angle AMC = 180° - 75° = 105°$.

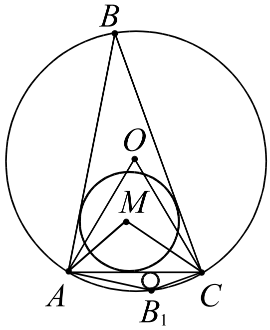


Рис. 72

2. Случай, когда $\angle B_1 = 150°$ (см. рис. 72), решается аналогично.

Ответ: $165°$ или $105°$.

Пример 40. *Трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найти высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и* $\sin\angle AOB = 0{,}6$.

При решении подобных задач полезно напомнить учащимся следующие факты.

- *Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).*
- *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

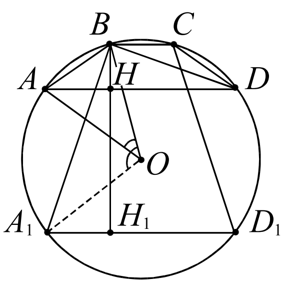


Рис. 73

Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$ (см. рис. 73). Проведем высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Так как вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BHD найдем высоту $BH = HD \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Используем формулу тангенса половинного угла $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1. Рассмотрим случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – острый. Находим

$$\cos\alpha = 0{,}8 \text{ и } BH = \frac{3\cdot 0{,}6}{1+0{,}8} = 1.$$

2. Второй случай, когда $\angle AOB = \alpha$ – тупой, рассмотрите самостоятельно.

***Ответ*: 9 или 1.**

интерпретация решения алгебраического уравнения

Методический комментарий. Если в составленном уравнении неизвестной является длина отрезка, то составленное алгебраическое уравнение (чаще квадратное) может иметь два положительных корня, которые удовлетворяют условию задачи, то есть ситуация, реализованная в условии, не определяется однозначно (см. пример 39).

Интересным является появление отрицательного корня уравнения, интерпретация которого может быть проведена вполне разумно. Для заострения проблемы учителю необходимо предлагать учащимся задачи, в которых получаются посторонние, на первый взгляд, корни, но их появление можно и нужно объяснить.

Пример 41. *Дана окружность радиуса* 13. *Точка M – середина радиуса OK. Хорда AC перпендикулярна радиусу OK. Найти расстояние BM, если известно, что* $AB - BK = 4$ (см. рис. 74).

Решение. Обозначим BM через x (см. рис. 74*а*), тогда имеем $OB = 6{,}5 - x$ и $BK = 6{,}5 + x$. Используя теорему Пифагора для треугольника AOB, находим $AB = \sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2}$. Исходя из равенства $AB = BK + 4$ получаем уравнение

$$\sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2} = 10{,}5 + x$$

или

$$x^2 + 4x - 8{,}25 = 0\,.$$

Отсюда находим корни $x_1 = 1{,}5$ и $x_2 = -5{,}5$.

Положительный корень соответствует ситуации рисунка 74*а*.

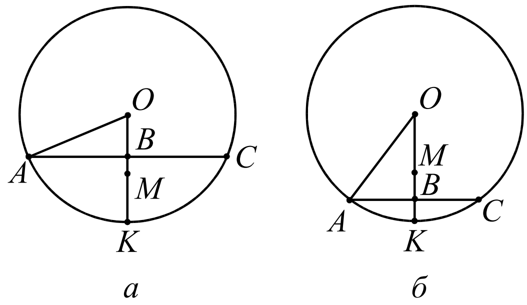


Рис. 74

Интерпретируем отрицательный корень: точка B расположена между точками M и K, т. е. отрезок MB с длиной 5,5 откладывается в противоположном направлении (см. рис. 74*б*).

***Ответ*: 1,5 или 5,5.**

Пример 42. (ЕГЭ, 2011). *Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна* 36, *касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что BC* = 9. *Найти сторону AB.*

Решение. Обозначим $AB = x$, $AC = y$, p – полупериметр треугольника ABC. Пусть точки M и N – середины сторон AB и AC соответственно (см. рис. 75). Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$.

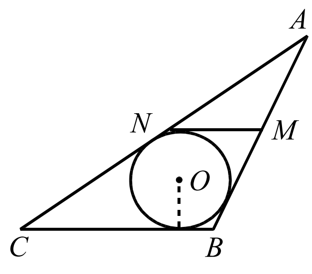


Рис. 75

В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$$

Значит

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 27;$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 9}{2} = 18.$$

По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} =$$
$$= \sqrt{18(18 - x)(18 - y)(18 - 9)} =$$
$$= 9\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 36.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 4.$$

Возводя обе его части в квадрат и учитывая равенство $x + y = 27$, имеем

$$(18 - x)(18 - y) = 8,$$
$$(18 - x)(18 - 27 + x) = 8,$$
$$x^2 - 27x + 170 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 10$ или $x = 17$. Получаем $y = 17$ при $x = 10$ и $y = 10$ при $x = 17$. Это означает, что условию задачи соответствует треугольник со сторонами 10, 17, 9. Полученные значения x соответствуют двум способам обозначения вершин буквами.

Ответ: 10 или 17.

Задачи для самостоятельного решения

10. (ЕГЭ 2011) Диаметр окружности, вписанный в треугольник *PQR*, площадь которого равна 132, в три раза меньше высоты, проведенной из вершины *P*. Известно, что $QR = 11$. Найдите сторону *PQ*.

11. (ЕГЭ 2011) Окружность, вписанная в треугольник *KLM*, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне *ML*. Известно, что $ML = 11$. Найдите *MK*.

12. (ЕГЭ 2011). Дана трапеция *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 36, *CD* = 34 и верхним основанием *BC* = 10. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите *BD*.

13. Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.

Ответы. 10. 25 или 30. **11.** 13 или 20. **12.** 36 или $8\sqrt{19}$. **13.** $30°$ или $150°$.

Упражнения

1. Окружность *S* радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности *S*.

2. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол $60°$. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

3. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

4. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

5. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.

6. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических окружностей радиусов 3 и 5.

7. Точка *M* делит среднюю линию треугольника *ABC*, параллельную стороне *BC*, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка *N* также делит сторону *BC* на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая *MN* делит площадь треугольника *ABC*?

8. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника со сторонами 12, 18, 18 проведена прямая, разбивающая треугольник на части, площади которых относятся как 1:2. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника.

9. В треугольник *ABC* со сторонами $AB = 18$ и $BC = 12$ вписан параллелограмм *BKLM*, причем точки *K*, *L*, *M* лежат на сторонах *AB*, *AC* и *BC* соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $4/9$ площади треугольника *ABC*. Найдите стороны параллелограмма.

10. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

11. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 2 и 5. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

12. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

13. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника AMB.

14. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.

15. Пусть AB и AC – равные хорды, MAN – касательная, градусная мера дуги BC, не содержащей точки A, равна 200°. Найдите углы MAB и NAC.

16. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

17. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

18. Точка B – середина отрезка AC, причем $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.

19. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

20. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

21. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведенной касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.

22. Дана трапеция $ABCD$, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30°. Известно, что $\angle BAC = \angle CDB$, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

23. Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 27$, $CD = 28$ и основанием $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

24. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

25. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна ее площадь?

26. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

27. В треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка D лежит на прямой

BC так, что $BD:DC=1:5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

28. Площадь равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равна 36. Найдите длину стороны AC, если $BC=\sqrt{97}$.

29. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу треугольника, подобного данному, если один из катетов равен 10.

30. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM, пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N. Известно, что радиус окружности равен 2, $KM=\sqrt{8}$ и $\angle MNK+\angle KML=4\angle LKM$. Найдите длину касательной MN.

31. Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что радиус окружности равен 2, $AC=\sqrt{12}$ и $\angle CDA+\angle ACB=2\angle BAC$. Найдите длину секущей AD.

32. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает сторону BC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N. Прямая MN перпендикулярна AB и $MN=\frac{1}{\sqrt{3}}AB$. Найдите углы треугольника ABC.

33. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

34. На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причем $AO=7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

35. AB и AC – равные хорды, MAN – касательная, угловая величина дуги BC, не содержащей точки A, равна $200°$. Найдите углы MAB и NAC.

36. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $MN=BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Определите углы треугольника ABC.

37. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение оснований $AD:BC=3$; на прямой, пересекающей продолжение основания AD за точку D, расположен отрезок EF так, что $AE\parallel DF$, $BE\parallel CF$ и $AE:DF=CF:BE=2$. Определить площадь треугольника EFD.

38. В треугольнике ABC с углом $\angle ABC=60°$, биссектриса угла A пересекает BC в точке M. На стороне AC взята точка K так, что $\angle AMK=30°$. Найдите $\angle OKC$, где O – центр окружности, описанной около треугольника AMC.

39. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

40. В треугольник, периметр которого равен 18, вписана окружность, к которой проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной, заключенный внутри треугольника, равен 2. Вычислите основание треугольника.

41. На окружности радиуса 5 расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно 7. Вычислите сторону квадрата.

42. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N. Найдите AB, если $AC=8$ и $MN=3$.

43. Трапеция, боковые стороны которой равны 13 и 15, описана около окружности. Радиус окружности равен 6. Найдите основания трапеции.

44. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

45. Вычислите высоту *CH* тупоугольного треугольника *ABC*, если $\angle C = 45°$, $AH = 6$ и $BH = 1$.

46. Найдите величину угла при основании равнобедренного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $4/9$.

47. Дан квадрат *ABCD*. В плоскости квадрата взята точка *M*, такая, что $BM = CM$ и $\angle AMB = 75°$. Найдите величину угла *BMC*.

48. Из вершины тупого угла ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами равно половине диагонали ромба. Найдите углы ромба.

49. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка *C*, а на другой – точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

50. Медиана в треугольнике, выходящая из одной вершины, равна высоте, опущенной из другой вершины, и равна 1. Высота, опущенная из третьей вершины, равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

51. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AM* и *CN*. Чему равен угол *ABC*, если $AC = 2MN$?

52. Биссектриса внешнего угла при вершине *B* треугольника *ABC* равна биссектрисе внешнего угла при вершине *A* и равна стороне *AB*. Найдите углы треугольника *ABC*.

53. В параллелограмме *ABCD* угол *ACD* равен $30°$. Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников *ABD* и *BCD*, расположены на диагонали *AC*. Найдите угол *ABD*.

54. Боковые стороны треугольника равны 25 и 30, а высота, проведенная к основанию, равна 24. Найдите основание.

55. В треугольнике *ABC* сторона *AB* = = 6, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найдите сторону *AC*.

56. Дан треугольник *ABC*, в котором $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45°$. Найдите угол *BAC*.

57. Точки *M* и *N* лежат на стороне *AC* треугольника *ABC* на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины *A*. Найдите радиус окружности, проходящей через *M* и *N* и касающейся прямой *AB*, если угол *BAC* равен $30°$.

58. Внутри прямого угла дана точка *M*, расстояния которой от сторон угла равны 4 и 8. Прямая, проходящая через точку *M*, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найдите катеты треугольника.

59. В равносторонний треугольник *ABC* вписан прямоугольник *PQRS* так, что основание прямоугольника *RS* лежит на стороне *BC*, а вершины *P* и *Q* – на сторонах *AB* и *AC* соответственно. В каком отношении точка *Q* должна делить сторону *AC*, чтобы площадь прямоугольника *PQRS* составляла $\frac{45}{98}$ площади треугольника *ABC*?

60. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины *A* и *B* прямоугольника *ABCD*. Длина касательной, проведенной из точки *C* к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите *BC*.

61. Биссектрисы углов *B* и *C* параллелограмма пересекаются в точке *O*. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$, $OD = 5$.

62. Точки *P*, *R* и *Q* лежат на сторонах соответственно *EF*, *FG* и *EG* треугольника *EFG*, причем *EPRQ* – параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{8}{25}$ площади треугольника *EFG*. Найдите диагональ *PQ* параллелограмма, если известно, что $EF = 15$, $EG = 10$ и $\angle FEG = 60°$.

63. В треугольнике *ABC* сторона *AB* = = 24, $\angle BAC = 60°$, радиус описанной окружности равен 13. Найдите сторону *AC*.

64. В окружности радиуса $\sqrt{6}$ проведены хорда *MN* и диаметр *MP*. В точке *N* проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра *MP* в точке *Q* под углом $60°$. Найдите медиану *QD* треугольника *MQN*.

65. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие – на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45?

66. (**МГУ, 1995**). В трапеции *KLMN* известны боковые стороны *KL* = 36, *MN* = 34, верхнее основание *LM* = 10 и $\cos(\angle KLM) = -\frac{1}{3}$. Найдите диагональ *LN*.

67. (**МГУ, 1998**). В окружности проведены хорды *KL*, *MN*, *PS*. Хорды *KL*, *PS* пересекаются в точке *C*, хорды *KL*, *MN* пересекаются в точке *A*, хорды *MN* и *PS* пересекаются в точке *B*, причем $AL = CK$, $AM = BN$, $BS = 5$, $BC = 4$. Найдите радиус окружности, если величина угла *BAC* равна $45°$.

68. (**МГУ, 1984**). Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках *A* и *B*. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

69. В треугольнике *ABC* проведены медиана *AM* и высота *AH*. Известно, что $\frac{MH}{BH} = \frac{3}{2}$, а площадь треугольника *AMH* равна 24. Найдите площадь треугольника *ABC*.

70. В треугольнике *ABC* $AB = 21$, $BC = 15$, *BD* – биссектриса. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABD*, если $\cos\angle BAC = \frac{5}{7}$.

71. Точка *H* – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку *H* проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке *M*. Найдите *HM*.

72. В окружность радиуса $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

73. Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении $2:3$. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна 60.

74. В равнобедренной трапеции *ABCD* $(AD \parallel BC)$ расстояние от вершины *A* до прямой *CD* равно длине боковой стороны. Найдите углы трапеции, если $AB : BC = 5$.

75. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности, как 5:2. Найдите площадь треугольника, если один его катетов равен *a*.

76. Площади двух треугольников с общим основанием равны S_1 и S_2, где $S_1 \neq S_2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах их боковых сторон.

77. В трапеции основания равны *a* и *b*, диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α. Найдите площадь трапеции.

78. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *CE*. Найдите *AC*, если $BC = a$, $AB = b$, $DE : AC = k$.

79. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные *a* и *b*. Найдите основание треугольника.

80. Две окружности радиусов *R* и *r* $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

81. Окружности радиусов *R* и *r* касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная; A и B – точки касания. Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом данных окружностей и касающейся прямой AB.

82. Внутри угла величины α с вершиной в точке O взята точка A. Расстояние от точки A до одной из сторон угла равно a, а проекция OA на другую его сторону равна b. Найдите OA.

83. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle BAH = \alpha$, $\angle ABH = \beta$.

84. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $60°$. Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a.

85. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция, периметр которой равен $2p$. Найдите большее основание трапеции.

86. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

87. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB = 1$, $BC = a$. Найдите AC.

88. Дан отрезок a. Три окружности радиуса R имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

89. В окружность радиуса R вписана трапеция. Прямые, проходящие через концы одного основания параллельно боковым сторонам, пересекаются в центре окружности. Боковая сторона видна из центра под углом α. Найдите площадь трапеции.

90. В трапеции $ABCD$ дано: $AB = BC = CD = a$, $DA = 2a$. На прямых AB и AD взяты точки E и F, отличные от вершин трапеции, так, что точка пересечения высот треугольника CEF совпадает сточкой пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите площадь треугольника CEF.

91. На двух смежных сторонах квадрата построены во внешнюю часть две полуокружности и к ним проведены касательные, параллельные диаметрам. Найдите радиус окружности, касающейся этих полуокружностей и указанных касательных, если сторона квадрата равна $2a$.

92. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

93. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. В точке M к окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, перпендикулярная к стороне BC. D – точка пересечения касательной со стороной BC. Определите площадь треугольника ABC, если радиус вписанной окружности равен r, а площадь треугольника MBD равна S.

94. (МИЭТ, 2003). Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM = 28$, $MB = 4$, а радиус большей окружности равен 20.

95. (МИЭТ, 2003). Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую окружность в точках A и B. Найдите радиус первой окружности, если известно, что $AB = 12$, $MB = 6$, а радиус второй окружности равен 10.

96. (МИЭТ, 2000). Сторона квадрата равна a. Найдите радиус окружности, касающейся стороны квадрата и окружностей радиуса a с центрами в вершинах квадрата, принадлежащих одной из его сторон.

97. (МИЭТ, 2000). Два квадрата $ABCD$ и $AMHK$, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $45°$. Известно, что площадь пересечения квадратов равна 8,5, а площадь их объединения равна 34,5. Найдите площадь каждого из квадратов.

98. (МИЭТ, 2000). Два равнобедренных треугольника *ABC* и *AMH*, расположены так, что стороны *AB* и *AM* образуют угол в $45°$. Известно, что площадь пересечения треугольников равна 49, а площадь их объединения равна 213. Найдите площадь каждого из треугольников.

99. Две окружности, касающиеся прямой в точках *A* и *B*, пересекаются в точках *C* и *D*, причем $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану *CE* треугольника *ABC*.

100. Три окружности радиуса *r* попарно касаются друг друга. Найдите радиус окружности, касающейся всех этих окружностей.

101. Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что отрезок *CH* равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол *ACB*.

102. Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол *ACB*.

Ответы и указания

1. 3 или $4/3$. **2.** 12 или $12\sqrt{3}$. **3.** $8\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$, $10\sqrt{21}$ или 48, 40, 40. *Указание.* Применить формулу Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d – расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. **4.** 3 или 4. **5.** 3 или 6. **6.** 1 или 4. **7.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{9}{11}$. **8.** $\sqrt{97}$ или $\sqrt{57}$. **9.** 6; 8 или 4; 12. **10.** $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. **11.** $7-2\sqrt{5}$ или $7+2\sqrt{5}$. **12.** $8\sqrt{3}$ или 24. *Указание.* Коэффициент подобия треугольников *AMN* и *ABC* равен $|\cos\angle A| = 0{,}5$ (см. задачу 60 гл. 1). $\angle BOC = \pi - \frac{\angle B + \angle C}{2}$. **13.** $40°$; $80°$; $60°$ или $60°$; $20°$; $100°$. **14.** $35°$ или $55°$. **15.** $\angle MAB = \angle NAC = 40°$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140°$. **16.** 12 или $3\sqrt{2}$. **17.** $165°$ или $105°$. **18.** $\frac{9}{20}$ или $\frac{9}{10}$. **19.** $3:2$ или $1:2$. **20.** $90°$; $45°$; $45°$ или $90°$; $\mathrm{arctg}3$; $\mathrm{arcctg}3$. **21.** 15 или 3. **22.** $\frac{3S}{2}$ или $\frac{S}{2}$. **23.** 28 или $2\sqrt{181}$. **24.** $40°$ или $80°$. **25.** 900 или 780. **26.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$ или $\sqrt{\frac{19}{3}}$. **27.** 4,5 или 6. **28.** 8 или 18. **29.** $\frac{125}{12}$ или $\frac{250}{7}$. **30.** $\frac{\sqrt{2}}{\sin 15°} = 2(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{\sqrt{2}}{\sin 105°} = 2(\sqrt{3}-1)$. **31.** $\frac{3}{\sin 15°} = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ или $\frac{3}{\sin 75°} = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. *Указание.* Угол между касательной и секущей имеет градусную меру, равную половине разности градусных мер большей и меньшей дуг, высекаемых сторонами этого угла и заключенным между ними. **32.** $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 30°$ или $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 30°$. **33.** $36°$, $36°$, $108°$ или $60°$, $60°$, $60°$. **34.** 4 или 12. **35.** $\angle MAB = \angle NAC = 40°$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140°$. **36.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$. **37.** $\frac{S}{4}$ или $\frac{9S}{20}$. **38.** $30°$ или $150°$. *Указание.* Пусть *N* – точка пересечения прямой *MK* с рассматриваемой окружностью. Докажите подобие треугольников *NAK* и *KMC* и то, что точки *A*, *K*, *O* лежат на окружности с центром в точке *N*. **39.** $45°$ или $135°$. *Указание.* Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. **40.** 3 или 6. *Указание.* Ввести в качестве неизвестных сторону основания и радиус вписанной окружности и выразить площадь данного треугольника двумя способами. **41.** 6 или 8. **42.** 4 или 12. **43.** 7; 21 или 12; 16. **44.** 6,4 или 8. **45.** 2 или 3. **46.** $\arccos\frac{1}{3}$ или $\arccos\frac{2}{3}$. **47.** $60°$ или $150°$. **48.** $60°$; $120°$ или $30°$; $150°$. **49.** $\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$. **50.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sqrt{3}$. **51.** $60°$ или $120°$. **52.** $\angle A = \angle B = 36°$, $\angle C = 108°$ или $\angle A = 132°$, $\angle B = 12°$, $\angle C = 36°$ или $\angle A = 12°$, $\angle B = 132°$, $\angle C = 36°$. **53.** $30°$ или $60°$. **54.** 11 или 25. **55.** $3\sqrt{3} \pm 4$. **56.** $30°$ или $150°$. **57.** 2 или 14. **58.** 20; 10 или

5; 40. **59.** $AQ:QC=5:9$ или $AQ:QC=9:5$. **60.** $\frac{3(\sqrt{5}\pm 1)}{2}$. **61.** 24 или 72. *Указание.* Применить теорему косинусов для треугольников *ABO* и *OCD*. **62.** 7 или $2\sqrt{31}$. **63.** $12\pm 5\sqrt{3}$. **64.** $\sqrt{5\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}}$. **65.** 10; 25 или 7,5; 18,75. **66.** 36 или $8\sqrt{19}$. **67.** $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$. *Указание.* Показать, что центр данной окружности совпадает с центром окружности, проходящей через точки A, B и C. Рассмотреть случаи расположения точек:
1) точка B лежит между S и C; 2) точка C лежит между S и B. **68.** $6+2\sqrt{2}$. **69.** 80 или 16. **70.** $\frac{\sqrt{6}(14-\sqrt{79})}{6}$ или $\frac{\sqrt{6}(21-\sqrt{105})}{8}$. **71.** $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$. **72.** $\frac{24\pm 3\sqrt{29}}{14}$. **73.** 150 или 100. **74.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; $180^\circ-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; $180^\circ-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. **75.** $\frac{3a^2}{8}$ или $\frac{2a^2}{3}$. **76.** $\frac{|S_1-S_2|}{2}$ или $\frac{S_1+S_2}{2}$. **77.** $\frac{ab(a+b)\mathrm{tg}\alpha}{2|a-b|}$. **78.** $\sqrt{a^2+b^2\pm 2abk}$. **79.** $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$. **80.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$. **81.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$. **82.** Если $0^\circ<\alpha<90^\circ$, то $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$; если $90^\circ<\alpha<180^\circ$, то $-\frac{\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\sin\alpha}}{\cos\alpha}$; если $\alpha=90^\circ$, то при $a=b$ будет $OA>a$, при $a\neq b$ решений нет. **83.** $90^\circ-\alpha$, $90^\circ-\beta$, $\alpha+\beta$, если $\alpha<90^\circ$, $\beta<90^\circ$; $\alpha-90^\circ$, $90^\circ+\beta$, $180^\circ-\alpha-\beta$, если $\alpha>90^\circ$, $\beta<90^\circ$; $90^\circ+\alpha$, $\beta-90^\circ$, $180^\circ-\alpha-\beta$, если $\alpha<90^\circ$, $\beta>90^\circ$. **84.** $a(\sqrt{3}+1)$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ или $a(\sqrt{3}-1)$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$. **85.** При $p>4r$ $\frac{p+\sqrt{p^2-16r^2}}{4}$; при $p=4r$ трапеция превращается в квадрат. **86.** $\frac{1}{2}|a-b|$. **87.** Если $a<\sqrt{3}/2$, то решений нет; если $a=\sqrt{3}/2$, то одно решение $AC=0{,}5$; при $\sqrt{3}/2<a<1$ два $AC=\frac{1\pm\sqrt{4a^2-3}}{2}$; при $a\geq 1$ одно $AC=\frac{1+\sqrt{4a^2-3}}{2}$. **88.** Если $\frac{a}{4}<R<\frac{a}{2}$, то одно решение $\frac{a^2}{16R}$; если $0<R\leq\frac{a}{4}$ или $R\geq\frac{a}{2}$, то два $\frac{a^2}{16R}$ или $\frac{a^2}{8R}$. *Указание*. Пусть O и r – центр и радиус четвертой окружности соответственно. Расстояния от O до A, B и C равно $R+x$ или $|R-x|$. Рассмотрите случаи: 1) два расстояния равны $R+x$, одно равно $|R-x|$; 2) два расстояния равны $|R-x|$, одно $R+x$. **89.** Если $\alpha<\frac{\pi}{3}$, то два решения $R^2\sin\alpha\left(1\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; если $\frac{\pi}{3}\leq\alpha<\pi$, то одно $R^2\sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **90.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ или $2a^2\sqrt{3}$. *Указание*. *AC* и *BD* – биссектрисы углов *A* и *D*, сами углы равны 60°. Треугольники *CKE* и *FKO* прямоугольные и подобные, где $K=AC\cap EF$, $O=AC\cap BD$. **91.** $2(2-\sqrt{3})a$ или $2a$. **92.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$ или $\frac{\sqrt{730}}{3}$. **93.** $\frac{\left(\sqrt{4S^2+4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$ или $\frac{\left(\sqrt{4S^2-4Sr^2+2r^4}+r^2\right)^2}{2S-r^2}$. **94.** 7 или 1,75. **95.** 3 или 27. **96.** $\frac{a}{16}$ или $\frac{3a}{8}$, или $\frac{a}{6}$. **97.** $S_{ABCD}=25$; $S_{AMHK}=18$ или $S_{ABCD}=18$; $S_{AMHK}=25$. **98.** $S_{ABC}=100$; $S_{AMH}=162$ или $S_{ABC}=162$; $S_{AMH}=100$. **99.** 16 или 1. **100.** $r\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pm 1\right)$. **101.** 60° или 120°. *Указание.* См. пример 24. **102.** 45° или 135°. *Указание.* См. пример 23.

Список и источники литературы

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 148 с.

2. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. – 240 с.

3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2010.

4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

5. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

6. Корянов А.Г. Математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С4. Многовариантные задачи по планиметрии. http://www.alexlarin.net.ru/ege/2010/C4agk.pdf

7. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи). 39 стр. http://www.alexlarin.net/ege/2011/C4-2011.pdf

8. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 5–8. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 100 с. http://edu.1september.ru/courses/11/010/02.pdf

9. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

10. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. – К. «Магистр», 1996, – 256 стр. (*глава IV «Многовариантные задачи»*).

11. Прокофьев А.А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия). – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: МИЭТ, 2007, 232 стр.

12. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

13. Цукарь А.Я. О полезности интерпретации решения задачи // Математика в школе, №7, 2000, с. 34-37.

14. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.: ил.

15. О полезности интерпретации решения задачи / А.Я. Цукарь. – Математика в школе, №7, 2000.

16. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

17. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2012 (открытый банк заданий).

18. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

19. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.