«Методика преподавания и организация работы с текстовыми задачами»

Подготовила: КОЛОМЫЙЧЕНКО ИННА БОРИСОВНА,
учитель математики
МБОУ «Лицей №1 г. Инты».

2015 г.
г. Инта

ОГЛАВЛЕНИЕ:

I глава. «Методические особенности изучения темы»

***Основные функции* этой темы:**

обучающая – формирование систем математических ЗУН в процессе их усвоения;

воспитывающая – интерес к предмету, навыки учебного труда;

развивающая – развитие мышления, формирование приёмов умственной деятельности;

контролирующая – определение уровня усвоения, развития, способность к самостоятельному изучению.

***Способы решения задач*:**

Арифметический

Алгебраический

Табличная форма записи условия и решения задач.

Задача 1. **«За первый год было построено $\frac{8}{27}$ дороги от колхоза к шоссе, за следующий год построили $\frac{4}{9}$ дороги, а за третий год – остальные $5\frac{1}{4}$км. Какой длины построенная дорога?»**

Решение: **I СПОСОБ.**

1) $\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{8}{27}+\frac{12}{27}=\frac{20}{27}$ (дороги) – построено за два первых года;

2) $1 - \frac{20}{27}=\frac{7}{27}$ (дороги) – осталось построить за третий год;

3) $5\frac{1}{4}:\frac{7}{27}=\frac{21\cdot 27}{4\cdot 7}=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4}=20{,}25$ (км) – длина построенной за три года дороги.

Ответ: 20,25 км.

II СПОСОБ.

Пусть длина всей построенной за три года дороги *x* км, тогда за первый год построили $\frac{8}{27}x$ км, за второй год построили $\frac{4}{9}x$ км.

Зная, что за третий год построили оставшиеся 5 ¼ км дороги, составлю и решу уравнение:

$$x-\frac{8}{27}x-\frac{4}{9}x=5\frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{27}x=5\frac{1}{4}$$

$$x=20{,}25$$

20,25(км) – длина построенной за три года дороги.

Ответ: 20,25 км.

Задача 2. «Сплав состоит из 19 частей алюминия и 2 частей магния (по массе). Какова масса сплава, если в нём магния на 34 кг меньше, чем алюминия?»

Решение: **I СПОСОБ.**

1) $19 - 2 = 17$ (частей) – разница;
2) $34 : 17 = 2$ (кг) – масса одной части;
3) $19 \cdot 2 = 38$ (кг) – масса алюминия в сплаве;
4) $2 \cdot 2 = 4$ (кг) – масса магния в сплаве;
5) $38 + 4 = 42$ (кг) – масса всего сплава.

Ответ: 42 кг.

II СПОСОБ.

Пусть масса одной части *x* кг, тогда масса 19 частей алюминия - 19x кг, а масса 2 частей магния - 2x кг. Зная, что магния в сплаве на 34 кг меньше, чем алюминия, составлю и решу уравнение:

1) $19x - 2x = 34$

$17x = 34$

$x = 2$

2(кг) – масса одной части.

2) $19 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 42$ (кг) – масса всего сплава.

Ответ: 42 кг.

Задача 3. **«Через реку построен мост длиной 234 м. Он имеет пять пролётов, четыре из которых имеют одинаковую длину, а пятый на 14 м длиннее каждого из остальных. Какова длина каждого пролёта моста?»**

Решение: **I СПОСОБ.**

1) 234 – 14 = 220 (м) – длина пяти пролётов вместе, если бы они были все одинаковые;
2) 220 : 5 = 44 (м) – длина одного из четырёх равных пролёта;
3) 44 + 14 = 58 (м) – длина самого большого пятого пролёта.

Ответ: четыре пролёта по 44 м и один пролёт 58 м.

II СПОСОБ.

Пусть длина одного их четырёх равных пролётов - x м, тогда длина пятого пролёта – (x + 14) м.
Зная, что мост имеет четыре равных и один длинный пролёт, и длина всего моста равна 234 м, составлю и решу уравнение:

1) $4x + (x + 14) = 234$
$5x = 234 - 14$
$5x = 220$
$x = 44$
44 (м) – длина одного из четырёх равных пролётов;
2) 44 + 14 = 58 (м) – длина пятого пролёта.

Ответ: четыре по 44 м и один 58 м.

II глава. «Методика обучения решению задач на составление уравнений»

Структуры текстовых задач:

постоянная – имеющая только один способ решения.

Например: «Мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько, сколько вам сейчас. Нам обоим сейчас 63 года. Сколько лет каждому из нас?»

переменная – имеющая несколько способов решения;

Например: «Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, ученик должен был читать по 40 стр. в день, а он читал на 15 стр. меньше, и поэтому сдал книгу на 6 дней позже срока. За сколько дней ученик должен был прочитать книгу?»

В большей своей части текстовые задачи имеют **конечное число** различных по сложности способов решений.

Задача 4. «Мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько, сколько вам сейчас. Нам обоим сейчас 63 года. Сколько лет каждому из нас?»

Решение:

Пусть мне x лет, вам - y лет, тогда

1) Зная, что нам обоим сейчас 63 года, составлю I уравнение: $x + y = 63$;

2) Зная, что мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько, сколько вам сейчас, составлю II уравнение: $x = 2(y - (x - y))$

3) Составлю и решу систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y=63; \\ x=2(y-(x-y)); \end{cases} \begin{cases} x+y=63; \\ x=2y-2x+2y; \end{cases} \begin{cases} x+y=63; \\ 3x-4y=0; \end{cases} \begin{cases} x=63-y; \\ 189-3y-4y=0; \end{cases} \begin{cases} x=63-y; \\ 189-7y=0; \end{cases} \begin{cases} x=36; \\ y=27. \end{cases}$$

Мне сейчас 36 лет, а вам – 27 лет.

Ответ: 36 лет и 27 лет.

Задача 5. «Расстояние между городами А и В пароход проходит по течению реки на час быстрее, чем он проходит такое же расстояние в стоячей воде, и на 2,5 часа быстрее, чем против течения. За какое время пароход покрывает расстояние от А до В по течению?».

Решение:

Пусть собственная скорость парохода равна x км/ч, а скорость течения - y км/ч.

Обозначим за t время, за которое пароход преодолеет расстояние от А до В по течению (то есть то, что спрашивается).

По условию задачи заполню таблицу:

	S	V	t
По течению	t(x + y) км	(x + y) км/ч	**t ч**
Против течения	(t + 2,5)(x - y) км	(x – y) км/ч	**(t + 2,5) ч**
По озеру	**x(t + 1) км**	**x км/ч**	**(t + 1) ч**

Зная, что расстояние не меняется, составлю и решу систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} t(x+y)=x(t+1); \\ t(x+y)=(t+2{,}5)(x-y); \end{cases} \begin{cases} tx+ty=tx+x; \\ tx+ty=tx-ty+2{,}5x-2{,}5y; \end{cases} \begin{cases} x=ty; \\ 2ty=2{,}5x-2{,}5y; \end{cases} \begin{cases} x=ty; \\ 2{,}5y=0{,}5ty; \end{cases} \begin{cases} x=ty; \\ t=5. \end{cases}$$

5 (ч) – время по течению.

Ответ: за 5ч пароход пройдёт расстояние от А до В по течению.

Задача 6. **«Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, ученик должен был читать ежедневно по 40 страниц, но он читал в день на 15 страниц меньше и сдал книгу на 6 дней позже срока. За сколько дней ученик должен был прочитать эту книгу?»**

Решение: **I СПОСОБ.**

1) 40 – 15 = 25 (стр.) – читал в день;
2) $25 \cdot 6 = 150$ (стр.) – недочитанных в срок;
3) 150 : 15 = 10 (дней) – срок чтения книги.

Ответ: ученик должен был прочитать книгу за 10 дней.

II СПОСОБ.

	Количество в день	Количество дней	Всего страниц
По плану	**40 стр.**	**х дней**	**40х стр.**
Вне плана	**(40 – 15) стр.**	**(х + 6) дней**	**25(х + 6) стр.**

Зная, что количество страниц в данной книге не изменилось, составлю и решу уравнение: 40х = 25(х + 6)

15х = 150

х = 10

10 (дней) – срок для прочтения книги.

Ответ: за 10 дней.

III СПОСОБ.

Пусть по плану ученик должен был прочитать книгу за **х** дней,
а он её прочитал за **у** дней, тогда

1) зная, что разница в количестве дней равна шести, составлю первое уравнение: **у – х = 6.**
2) зная, что по плану в день ученик должен был читать 40 стр., а он читал на 15 стр. меньше и то, что количество всех страниц в книге не меняется, составлю второе уравнение: **40х = (40 – 15)у.**
3) составлю и решу систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 6; \\ 40x = (40-15)y; \end{cases} \begin{cases} y = 6 + x; \\ 40x - 25(6+x) = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 16; \\ x = 10. \end{cases}$$

Ответ: за 10 дней.

Затруднения, с которыми сталкиваются учащиеся при решении текстовых задач:

1. **В выявлении связей и зависимостей между величинами (данными и искомыми).**
2. **В символической записи этих связей при составлении уравнения по условию задачи**

Полезны упражнения:

а) упражнения в чтении и записи выражений с переменными:

Например: **«Запишите произведение частного a и b и их суммы»**

б) упражнения в составлении выражений и формул по условию задачи:

Например: **«Через одну трубу в бассейн выливается a гектолитров воды за 6 часов, а через другую b гектолитров за 8 часов. Сколько воды поступит в бассейн за 11 часов совместной работы?»**

$$\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{8}\right)\cdot 11$$

«Запишите скорость в М/С, если она равна V КМ/Ч; или наоборот»

V КМ/Ч = 0,28V М/С
V М/С = 3,6V КМ/Ч

в) упражнения в истолковании выражений для различных условий задачи.

Общая схема решения текстовых (сюжетных) задач:

1. **Выбор и обозначение неизвестных для составления уравнений;**
2. **Выражение остальных неизвестных через выбранные и заданные в задаче фиксированные значения величин;**
3. **Составление из полученных выражений уравнений или систем;**
4. **Решение уравнений или систем уравнений;**
5. **Исследование результата в соответствии с условием задачи.**

Такая же схема пригодна для решения текстовых задач, приводящих к *неравенствам, системам неравенств, уравнений и неравенств*, а также для решения *текстовых задач начал анализа* (только на третьем этапе составляется не алгебраическая, а аналитическая модель: функция, дифференциальное уравнение и др.)

III глава. «Практика»

Текстовые задачи :

1). Задачи «на движение»

2). Задачи «на работу»

3). Задачи «на смеси и сплавы»

4). Задачи на «проценты»

5). Задачи на «числовые зависимости»

6). Нестандартные задачи

Для тем: «на движение», «на смеси и сплавы» рассматривается какие надо принимать ДОПУЩЕНИЯ:

Задачи «на движение»

- **Если нет специальных оговорок, то движение считать равномерным;**
- **Скорость считается величиной положительной;**
- **Всякие переходы на новый режим движения, на новое направление движения считают происходящим мгновенно;**
- **Движение по течению, против течения определяется как $(v + u)$ и $(v – u)$.**

Задачи «на движение» рассматриваются по темам:

- **Равномерное движение по прямой;**
- **Движение по окружности с постоянной скоростью**

Пример: «Часы показывают полночь. Через сколько минут часовая и минутная стрелки снова совпадут?»

Ответ: 65 5/11 мин.

- **Равноускоренное (равнозамедленное) движение**

Для каждой из 6 тем записаны:

- *ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ;*
- *КАКУЮ ИЗ ВЕЛИЧИН ОБЫЧНО ВЫБИРАЮТ В КАЧЕСТВЕ НЕИЗВЕСТНОЙ*

Задачи «на движение»

Принятые обозначения:

расстояние - S; L;
скорости тел - U; V; W; … или V1; V2; …;
время движения - t; T.

Обычно в качестве неизвестных выбирают расстояние и скорости движущихся тел. Время в качестве неизвестного выбирается достаточно редко, так как в этом случае запись условий задачи получается громоздкой.

Задачи «на работу»

Принятые обозначения:

работа - A; V;
производительность труда (работа в единицу времени - N;
время работы - t.
При этом $A = N \cdot t$.

В качестве неизвестных обычно выбирают работу и производительность труда – её роль такова же, как роль скорости в задачах на движение.

Задачи «на смеси и сплавы»

Принятые обозначения:

Объём вещества - V;
Масса вещества - m;
Концентрация вещества - C;
Процентное содержание вещества – P.

В задачах на смеси, растворы и сплавы в качестве неизвестных удобно выбирать либо весь вес (или объём) вещества, которое нас интересует в смеси, либо его концентрацию, т.е. вес (или объём) данного вещества в единице веса (или объёма) смеси.

Задача 7. **«Петя съедает банку варенья за 6 часов, Катя – такую же банку за 5 часов. Успеют ли дети съесть банку варенья, если родители ушли из дома на 2 часа 50 минут? Как при этом съесть варенье за наименьшее время?»**

Решение:

Если каждый ребёнок съест по половине банки, то Петя потратит на это 3 часа, Катя – 2,5 часа. Следовательно, Катя успеет съесть свою долю и избежать наказания. Петю ожидает другая участь. Поэтому нужно есть варенье вместе (независимо от того, кому, сколько достанется). Найду время поедания в этом случае.

I СПОСОБ. (АРИФМЕТИЧЕСКИЙ)

1) НОК(5;6) = 30;
2) Пусть дети имеют в своём распоряжении 30ч.
30:6 = 5 (банок варенья) - за это время успеет съесть Петя,
30:5 = 6 (банок варенья) – за это время успеет съесть Катя.
Таким образом, за 30 часов можно съесть 11 банок.

3) $\frac{30}{11} = 2\frac{8}{11} \approx 2ч44мин.$ - за это время можно съесть вдвоём одну банку.

Ответ: да, дети успеют съесть банку варенья до прихода родителей; варенье надо есть вместе одновременно.

II СПОСОБ. (АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ)

1) Пусть в банку входит А кг варенья, тогда
$\frac{A}{6}(кг)$ - за один час съест Петя, а
$\frac{A}{5}(кг)$ - за один час съест Катя.

2) $\frac{A}{6} + \frac{A}{5} = \frac{11A}{30}(кг)$ - варенья съедят дети вдвоём за один час;

3) $A : \frac{11A}{30} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}(ч)$ - за это время дети вдвоём съедят полную банку варенья;

4) $2ч50мин. = 2\frac{5}{6}ч \rangle 2\frac{8}{11}ч$, т. к. $2\frac{5}{6} - 2\frac{8}{11} = \frac{5}{6} - \frac{8}{11} = \frac{55}{66} - \frac{48}{66} = \frac{7}{66} \rangle 0.$

Таким образом: дети вполне успевают съесть банку варенья до прихода родителей.

Ответ: да, дети успеют съесть банку варенья до прихода родителей; варенье надо есть вместе одновременно.

Задача 8. **«Определите процентное содержание спирта в растворе, полученном в результате смешивания пяти литров 20%-го и шести литров 35%-го растворов спирта».**

Решение:

Важно учесть, что объёмы «чистого» спирта и «чистой» воды при таком смешивании не изменяются.

По условию задачи составлю таблицу:

	V	V (спирта)	p
I раствор	5 л	0,2 · 5 л	**20%**
II раствор	6 л	0,35 · 6 л	**35%**
Новый раствор	**(5 + 6) л**	$11 \cdot \frac{x}{100}$ **л**	**x%**

Запишу уравнение для объёмной концентрации x спирта в полученном растворе:

$$0{,}2 \cdot 5 + 0{,}35 \cdot 6 = 11 \cdot \frac{x}{100}$$

$$1 + 2{,}1 = \frac{11x}{100}$$

$$x = \frac{310}{11}$$

$\frac{310}{11} = 28\frac{2}{11}$ % - процентное содержание спирта в новом растворе.

Ответ: $28\frac{2}{11}$ **%.**

<u>допущения</u>:

- **Все, рассматриваемые смеси (сплавы, растворы), однородны.**
- **Не делаются различия между литром как единицей емкости и литром как единицей массы.**

Задачи на «проценты»

Решение любых задач «на проценты» сводится к *<u>основным трём действиям с процентами</u>*:

1) ***нахождению процентов от числа.***
2) ***нахождению числа по его процентам.***
3) ***нахождению процентного отношения чисел.***

Принятые обозначения:

<u>формула процентов</u> $p = \frac{a}{b} \cdot 100\%$

Сюжетные задачи «на проценты», включённые в ЕГЭ, можно разделить на три группы:

- Задачи, связанные с изменением влажности объекта (продуктов, строительных материалов и т.д.);
- Задачи об изменении плана выпуска продукции, величины зарплаты или стоимости товара, акций;
- Задачи о содержании компонентов в растворе или сплаве.

понятий *<u>простых и сложных процентов.</u>*

Соответствующая формулы:

$a_n = a \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot n)$, где n – количество начислений процентов (эта формула задаёт арифметическую прогрессию).

$a_n = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$, где n – количество начислений процентов (эта формула задаёт сумму n первых членов геометрической прогрессии).

Искомая концентрация вычисляется по формуле: $C_n = \frac{p}{100} \cdot \left(1 - \frac{a}{V}\right)^n$.

Пример: **«Сосуд объёмом V заполнен p – процентным раствором соли. Из сосуда выливают - a литров смеси и доливают - a литров дисцилированной воды, после чего раствор тщательно перемешивают. Эта процедура повторяется n раз. Найдите концентрацию полученного раствора».**

Задача 7. **«Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через два года?»**

Решение:

Эта задача на так называемые *«сложные проценты»*. В задаче идёт речь о поэтапном изменении некоторой величины.

I СПОСОБ.

1) 0,03 · 1000 = 30 (руб.) – начисленные проценты после первого года;
2) 1000 + 30 = 1030 (руб.) – сумма на счету после первого года;
3) 0,03 · 1030 = 30,9 (руб.) – начисленные проценты после второго года;
4) 1030 + 30,9 = 1060,9 (руб.) – сумма вклада после двух лет;
5) 1060,9 – 1000 = 60,9 (руб.) – разница.

Ответ: первоначальный вклад был увеличен на 60,9 рублей.

II СПОСОБ.

Рассмотрим формулу $a_n = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$, применим её для нашей задачи.

1) $a_2 = 1000 \cdot (1 + \frac{3}{100})^2 = 1000 \cdot 1{,}03^2 = 1000 \cdot 1{,}0609 = 1060{,}9$ (руб.) – сумма вклада после двух лет;
2) 1060,9 – 1000 = 60,9 (руб.) – увеличение первоначального вклада через 2 года.

Ответ: на 60,9 рублей.

Задачи на «числовые зависимости»

Принятые обозначения:

При решении задач «на числовые зависимости» полезны следующие *сведения*:

1) ***Натуральное число n делится на (натуральное) число k, если и только если найдётся такое натуральное l, что n = k·l.***

Например: а) число n – чётно n = 2l, n, l є ;
б) n делится на 3 n = 3l.
и т. д.

2) ***Натуральное число n – нечётно, если найдётся натуральное l: n = 2l + 1.***
Число n даёт при делении на k остаток r n = lk + r, где l є .

Например: а) число n даёт при делении на 3 остаток 1, n = 3l + 1, l є ;
б) число n даёт при делении на 4 остаток 3, n = 4l + 3, l є ;
и т. д.

3) ***Если a_0, a_1, … , a_n – цифры (т. е. числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),то тот факт, что число записывается цифрами (порядок именно такой, черта наверху ставится, чтобы отличить это число от произведения), означает, что это число равно $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.***

Например: а) $\overline{xy} = 10x + y$;

б) $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

4) ***Любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановок) раскладывается на простые множители.***

5) ***Если xy делится на z и x взаимно просто с z, то y делится на z.***

Например: если 7x делится на 3, то и x делится на 3, т. к. НОД(7; 3) = 1.

При решении текстовых задач такого типа часто используют и признаки делимости натуральных чисел, понятия простых, составных и взаимно простых чисел.