ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ

для проведения школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников

 по математике для учащихся 11 классов

Учитель: Васильева Ирина Борисовна

Пояснительная записка

Основная цель проведения школьной олимпиады по математике:

- расширение кругозора учащихся;

- развитие интереса учащихся к изучению математики;

- выявление одарённых учащихся для организации индивидуальной работы с ними, подготовки к участию в городской олимпиаде.

Задания составлены на основе учебных программ по математике, реализуемых на уровне среднего общего образования.

Главные принципы при формировании комплектов заданий:

1. Нарастание сложности заданий от первого к последнему. При этом их трудность должна быть такой, чтобы с первым заданием могли успешно справиться примерно 70% участников, со вторым – более 50%, с третьим – около 20%, а с последними – несколько участников олимпиады.
2. Тематическое разнообразие заданий: в комплект должны входить задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике, в старших классах желательно включение задач по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу.
3. Обязательная новизна задач для участников олимпиады.
4. Недопустимость включения в задания задач по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
5. Включённые задачи взяты из разных разделов школьного курса математики. Не включены задачи с длительными выкладками.

 Сложность – это объективная характеристика задачи, определяемая её структурой. Сложность зависит от:

- объёма информации, необходимого для её решения;

- числа данных в задаче;

- числа связей между ними;

- количества возможных выводов из условия задачи;

- количества непосредственных выводов, необходимых для решения задачи;

- количества взаимопроникновений при решении задачи;

- длины рассуждений при решении задачи;

- общего числа шагов решений, привлечённых аргументов и пр.

Трудность задачи зависит от:

- сложности задачи (сложная задача является как правило более трудной);

- времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте;

- практики в решении подобных задач;

- уровня развития ученика;

- возраста учащегося.

Критерии оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность ) решения |
| 7 | Полное верное решение |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.  |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения , помогающие в решении задачи. |
| 0-1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Решение считается неполным, если оно:

- содержит основные идеи, но не доведено до конца;

- при верной общей схеме рассуждений содержи пробелы, т.е.явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными.

11 класс

 Задание №1.

 Решите уравнение:



 Решение:

sin9x + ($\frac{1}{2} $cos3x+$\frac{\sqrt{3}}{2}$sin3x)=0,

sin9x+cos ($\frac{π}{3}-3x)=0,$

2cos ($\frac{5π}{12}-6x)\cos(\left(\frac{π}{12}-3x\right)=0,)$

$x\_{1}=-\frac{π}{72}-\frac{π}{6}k, x\_{2}=-\frac{5π}{36}-\frac{π}{3}n, $ где $k, n\in Z$

Задание №2.

 Докажите, что 2a+$\frac{1}{a^{2}}>3 $ при $0<а<1$.

 Решение: Найдём производную функции f(a) =2a+$\frac{1}{a^{2}}$ : $f^{/}=2-\frac{2}{a^{3 }}<0 при a\in \left(0;1\right).$

Значит, f(a) убывает на (0;1), а поэтому f(0) $>f(1)$ , где f(1) =3, т.е. 2a+$\frac{1}{a^{2}}>3 $ при $a\in \left(0;1\right).$

Задание №3.

 В равнобедренной трапеции даны основания а=21 см, b=9 см и h=8 см. Найдите радиус описанного круга.

Решение: пусть ABCD - данная трапеция, BK и CM - высоты.

 В С

 А D

M

K

Тогда $S\_{ABC}=\frac{abc}{4R}$; AK=DM=6 см; BD=$\sqrt{BK^{2}+KD^{2}}$; BD = 17 см; AB=$\sqrt{AK^{2}+BK^{2}}$; AB=10 см. $S\_{ABD}= \frac{1}{2}AD∙BK; S\_{ABD}= \frac{1}{2}8∙21=84 см^{2}; $ R =$\frac{abc}{4S}$. Отсюда R=10$\frac{5}{8}$ см.

Задание №4.

Найдите все положительные решения системы:

 , , , .

Решение:

Сложим все уравнения, предварительно умножив второе и четвёртое уравнения на 4.

Получим или 

 отсюда следует, что .

Задание №5.

Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то полученное число делится на 19.

Решение: выпишем последовательность чисел, которые получаются из числа 12008: 120308, 1203308, …., 12033…308 (n троек), …. Первое число равно 9$∙6332, т.е.оно делится на 19. $Далее предположим, что и число с количеством троек в записи n-1 делится на 19 . Докажем, что и число с количеством троек n также делится на 19.. В самом деле, $а\_{n}-a\_{n-1}=$12033…308-12033…308=1083000…0. Но 1083 делится на 19, поэтому и $а\_{n}$ также делится на 19.