**Задания для подготовки к олимпиадам**

**9 класс**

**Вариант №1**

1. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100  101  102 … 998  999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?
2. По определению, ***n ! = 1 · 2 · 3 · … · n .*** Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения ***1! · 2! · 3! · … · 20!***, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?
3. С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.
4. Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20°?
5. На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй – любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**Ответы и решения задач варианта №1**

1. Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20.  Таких чисел 9: 120, 220, …, 920. Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, …, 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.
2. Заметим, что1! · 2! · 3! · 4! ·…· 20! = (1! · 2!) · (3! · 4!) ·…· (19! · 20!) =
= (1! · 1! · 2) · (3! · 3! · 4) · (5! · 5! · 6) ·…· (17! · 17! · 18) · (19! · 19! · 20) =
= (1!)2 · (3!)2 · (5!)2 ·…· (19!)2 ·  (2 · 4 · 6 · 8 ·…· 18 · 20) =
= (1!)2 · (3!)2 · (5!)2 ·…· (19!)2 · (2 · (2 · 2) · (3 · 2) ·…· (10 · 2)) =
= (1! · 3! ·…· 19!)2 · 210 · (1 · 2 · 3 ·…· 2 · 10) = (1! · 3! ·…· 19!)2 (25)2 · 10!

Мы видим, что первые два множителя – квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат. Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата.

**Ответ: 10!**

1. Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из них. Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: A, N, B, M и рассмотрим треугольники АВС и NМС. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника АВС принадлежит и биссектрисе угла С. Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника NМС также лежит на биссектрисе угла С. Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой ﮮС.
2. Есть только один треугольник, в котором угол 20° лежит между сторонами 5 см и 6 см. Попробуем построить треугольник, в котором сторона 6 см прилегает к углу 20°, а сторона 5 см лежит против него. Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, не совпадающем с вершиной. Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см (это расстояние равно катету угла в 20°). Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках, причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла, и мы получим два разных треугольника.

Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см, то вершина угла окажется внутри построенной окружности, и мы получим только одну точку пересечения, а следовательно, и один треугольник.

Итак, мы получили всего 4 треугольника.

1. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет.  Каждым следующим, если второй игрок берет *х* монет, то первый игрок должен взять 101 – *х* монет (он всегда может это сделать, потому что если *х* – четное число от 2 до 100, то (101 – *х*) – нечетное число от 1 до 99). Так как 2005=101· 19 + 85 + 1, то через **19** таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

**Вариант №2**

1. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.
2. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно 1/2, 1/3, 1/4 и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2007 переливаний?
3. Решите неравенство .
4. Решите уравнение x2 + 2005x – 2006 = 0.
5. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

**Ответы и решения задач варианта №2**

1. Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ∆АСМ - равносторонний. Но это значит, что ∆АОD и ∆ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ∆АОВ = ∆СОD, откуда имеем, что AB = CD.
2. **«**Просчитав» несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих сосудах будет по ½ л воды. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером 2k-1 в сосудах было по ½ л, то при следующем переливании из второго сосуда берется 1/(2k + 1) часть, так что в первом сосуде оказывается - 1/2 + (2/ 2(2k + 1)) = (k + 1)/(2k + 1) (л). При следующем переливании, имеющем номер 2k+1, из него берется 1/(2k + 2) часть и остается (k + 1)/(2k + 1)-(k + 1)/((2k + 1)(2k + 1)) = 1/2 (л). Поэтому после седьмого, девятого и вообще любого нечетного переливания в сосудах будет  по ½   л воды.
3. Заметим, что все решения исходного неравенства  существуют, если подкоренные выражения неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии x2 – 4x + 3 = 0. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.
4. Исходное уравнение имеет очевидный корень 1. Второй корень найдем по формулам Виета. Так как x1x2 = -2006 и x1 = 1, то x2 = 2006.
5. Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

**Вариант №3**

1. В параллелограмме АВС биссектриса угла С пересекает сторону А в точке М и прямую АВ  в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если АК = 12, СМ = 24, МК = 18.
2. Постройте график функции y = |x - 1| - |2 - x| + 2.
3. Вычислите  .
4. Решите уравнение x4 + 2006x2 – 2007 = 0.
5. Токарь и его ученик, работая одновременно, обычно выполняют задание за 4 часа. При этом производительность труда токаря в 2 раза выше производительности ученика. Получив такое же задание, и, работая по очереди, они справились с заданием за 9 часов работы. Какую часть задания выполнил ученик токаря.

**Ответы и решения задач варианта №3**

1. Ответ: 88.1) Из подобия треугольников ∆ AMK и ∆ DMC:
MK/MC = AK/DC ⇒ 18/24 = 12/CD, т. е. CD = (24 · 12)/18 = (24 · 2) /3 = 16.
2)ﮮ BCM = ﮮ MCD (CM – биссектриса ﮮ BCD), ﮮ BKM = ﮮ DCM как накрест лежащие при параллельных прямых BK и DC, и секущей KC. Следовательно, ∆ BKC – равнобедренный.
3)Таким образом, PABCD= 2 ∙ (16 + 28) = 88.
2. Ответ: 
3. Ответ: 4 016 011. Пусть n = 2004, тогда . Преобразовав, получим 
4. Ответ: 1, -1.
5. Ответ: ½ часть задания выполнит ученик.

**Вариант №4**

1. Докажите, что число  20082 + 20082 ×  20092 + 20092  является ли квадратом целого числа.
2. Рассматриваются функции вида *y = x*2 *+ ax + b,* где  а *+ b* = 2008. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.
3. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Спартак»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» - 50%, а про ЦСКА – 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»?
4. В выпуклом пятиугольнике *ABCDE*  ﮮА = ﮮB =ﮮD = 90°. Найдите ﮮ*ADB*, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.
5. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов четно. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой - в синий, а остальные – в белый. Назовем расстояние между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2008 км.

**Ответы и решения задач варианта №4**

1. Рассмотрим выражение n2 + n2 (n + 1)2  + (n + 1)2 = n4+ 2n3 + 2n2 + (n + 1)2 = n4+ 2n2 (n + 1) + (n + 1)2 = (n2 + n + 1)2. Данное число есть значение этого выражения при n = 2008. Значит, 20082 + 20082∙20092 + 20092 = (20082 + 2009)2 – квадрат целого числа.
2. *y(*1*) =* 1 *+ a + b =* 2009. Следовательно, каждый из данных графиков проходит через точку с координатами (1; 2009).
3. Пусть *x*% жителей острова составляют лжецы. Тогда (100 – *х*)% составляют рыцари. Так как каждый рыцарь утвердительно ответил ровно на один из вопросов, а каждый лжец – на три, то (100 – *х*) + 3*х* = 40 + 30 + 50, откуда *х* = 10. Так как ни один из жителей острова не сказал, что болеет за ЦСКА, то все лжецы болеют за ЦСКА. Каждый из них заявил, что болеет за «Спартак», поэтому действительно болеют за «Спартак» 40% - 10% = 30% жителей.
4. Пусть *О* - центр окружности, вписанной в пятиугольник *АВСDE*. Проведем перпендикуляры *ОК, ОL, OM, ON* и *OT* к сторонам *AB, BC, CD, DE* и *EA*соответственно. Поскольку проведенные отрезки являются радиусами окружности, то четырехугольники *AKOT, KBLO* и *OMDN* - равные квадраты. Диагонали  *OA, OB* и *OD* рассмотренных квадратов равны, поэтому *О* – центр окружности, описанной около ∆ *ADB*. Следовательно, ﮮADB = 1/2ﮮAOB = 45°. *(Учащиеся могут предложить и другие способы нахождения угла ADB,например, используя свойства отрезков касательных и формулу для нахождения суммы внутренних углов выпуклого пятиугольника).*
5. Пусть на кольцевой дороге – 2*n* столбов. Вычислим сумму расстояний от синего столба до всех остальных: 2(1 + 2 + …+ (*n*– 1)) + *n* = 2((1 + n -1)/2) n + n = n2 (км). Следовательно, *n*2 > 2008. Учитывая, что *n* – натуральное число, получим, что *n* ≥ 45*.* Так как расстояние от синего столба до желтого не превосходит *n,* то *n*2 – *n* ≤ 2008 *n*(*n* – 1) ≤ 2008. Несложно проверить, что *n* = 45 удовлетворяет этому неравенству, а любое натуральное *n*, начиная с 46, - не удовлетворяет. Тогда *n*2 = 2025, следовательно, расстояние от синего столба до желтого равно 2025 – 2008 = 17.
Ответ:17 км.