***Аналитические методы решения линейных уравнений с параметрами.***

 В работе рассмотрены различные подходы к решению линейных уравнений с параметрами. Данная тема необходима учащимся для первичного ознакомления с методами решения уравнений с параметрами, которая является опорным пунктом подготовки к ЕГЭ (решение заданий части «С5»).

 *Содержание*

1. *Понятие уравнений с параметрами.*
2. *Различные виды и методы решений линейных уравнений с параметрами.*
3. *Задания для самостоятельной работы.*

 *Рассмотрим уравнения, в которых некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а обозначены буквами. Такие уравнения называются уравнениями с параметрами, а буквы – параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения.*

 *Решить уравнение с параметрами – значит, найти множество всех корней данного уравнения в зависимости от допустимого значения параметра. (Т.е. указать, при каких значениях параметра существуют решения, и каковы они, затем исследовать его относительно параметра)*

 *Алгоритм решения уравнений с параметрами примерно таков:*

* *Разбить область изменения параметра на промежутки, где при изменении параметра в каждом из них полученные уравнения решаются одним и тем же методом.(Границами промежутков служат те значения параметра, в которых, или при переходе через которые, происходит качественное изменение уравнения. Такие значения параметра называют «особыми» или контрольными).*
* *Отдельно на каждом промежутке находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра.*
* *Ответ уравнения состоит из списков изменения параметра с указанием всех корней для каждого промежутка (или конкретных значений параметра).*

***Основные методы решения уравнений с параметрами.***

1. ***Решение простейших линейных уравнений с параметрами.***

*Исследуем линейное уравнение вида: ax =b (1)*

1. *а*$\ne $*0, b*$∊$*R, то уравнение (1) имеет единственный корень х=*$\frac{b}{a}$ *.*
2. *а=0, b=0, уравнение (1) имеет корнем любое действительное число, т.е. х*$∊$*R.*
3. *а*$=$*0,* $ b\ne $*0, уравнение (1) не имеет корней.*

*Пример №1: ax = 5; при a=0 имеем 0х=5, чего не может быть,*

 *тогда х* $∊∅$*, при а*$\ne $*0 х=*$\frac{5}{a}$ *.*

*Пример №2: 0х=а; при а=0 получим 0х=0* $ =>$ *х*$∊$*R, при а*$\ne $*0 х* $∊∅$*.*

*Пример №3: Iхl=а, при а=0 х=0; при а>0 х=*$\pm $*а, при а*$<0$ *х* $∊∅$*.*

*Пример №4: ах-5=х+1*

 *Решение*

*Приведем уравнение к виду: х(а-1)=6;*

*если а=1, то 0х=6, нет решений;*

*если а*$\ne $*1, то х=* $\frac{6}{а-1}$ *.*

 *Ответ: при а*$\ne $*1 х =* $\frac{6}{а-1}$*; при а=1 нет решений.*

1. ***Более сложные линейные уравнения с параметром, при решении которых требуется дополнительная проверка, связанная с ограничением на ОДЗ.***

*Алгоритм решения таких уравнений:*

1. *Найти ОДЗ.*
2. *Решить уравнение относительно х.*
3. *Определить контрольные значения параметра (к.з.п.)*
4. *Проверить, нет ли таких значений параметра, при которых значение х было бы равно числу, не входящему в ОДЗ.*

***Пример №1*** $\frac{a}{х-2}$***=3***

 ***Решение***

1. *ОДЗ: х*$\ne $*2*
2. *К.з.п. а=0.*
3. *Решим уравнение относительно х:*
* *При а=0 уравнение имеет вид* $\frac{0}{х-2}$***=3.*** *Уравнение корней не имеет.*
* *При а*$\ne $*0 уравнение имеет вид* *а=3(х-2), отсюда х=*$\frac{а+6}{3}$
1. *Проверим, нет ли таких значений параметра а, при которых х=2, т.е. решим уравнение:* $\frac{а+6}{3}$*=2, а=0 ( т.е. приа=0 нет решений)*

*Ответ: при а*$\ne $*0 х=*$\frac{а+6}{3}$*; при а=0 нет решений.*

***Пример №2*** $\frac{2\left(а-1\right)х}{а}$*=(х-1) +* $\frac{5}{а}$

 ***Решение***

 *1.ОДЗ: х*$∊$*R, а*$\ne $*0.*

*2. Решим уравнение относительно х. Умножим обе части уравнения на а*$\ne $*0: 2(а-1)х=(х-1)а +5;*

*2ах -2х – ах = 5 – а;*

*(а-2)х = 5 – а.*

1. *К.з.п. а = 2, т.к. коэффициент при х обращается в 0 при а=2*
* *Если а=2, то 0х=3, нет решений;*
* *Если а*$\ne $*2, то х =* $\frac{5-а}{а-2}$*.*

*Ответ: при а=2 нет решений; при а*$\ne $*2 и при а*$\ne $*0 х =* $\frac{5-а}{а-2}$*; при а=0 уравнение не имеет смысла.*

***Примечание. Если при каком-нибудь значении параметра а=а0 данное уравнение не имеет смысла, то нет и решений при а=а0. Обратное утверждение не верно. Бывает, что при контрольном значении параметра уравнение имеет корни, но они не входят в ОДЗ.***

***3.Уравнения, сводящиеся к линейным***

*Пример №1 Решить уравнение: m =* $\frac{1}{m}$ *+* $\frac{m-1}{m(х-1)}$

 *Решение*

1. *ОДЗ: т*$\ne $*0, х*$\ne $*1.*
2. *Решим уравнение относительно х. Умножим обе части уравнения на т(х-1)*$\ne $*0, получим т2(х-1) = х – 1 + т – 1;*

 *Х( т2 – 1) = т2+ т – 2;*

 *Х(т-1)(т+1) = (т-1)(т+2).*

1. *К.з.п. т=* $\pm $*1*
* *Если т=1, то 0х=0, следовательно, х-любое действительное число, где х* $\ne $*1.*
* *Если т=-1, то 0х=-2, нет решений.*
* *Если т*$\ne \pm $*1 и т* $\ne 0,$ *то х=* $\frac{m+2}{m+1}$*.*
* *Если т = 0, то нет решений.*
1. *Проверим, нет ли значений параметра а, при которых найденное значение х равно 1:*

$\frac{m+2}{m+1}$ *= 1, т+2=т+1, 0т=1, нет решений.*

*Ответ: при т=0 и т=-1 нет решений; при т=1 х*$ ∊ $*(-∞;1)*$∪$ *(1;+∞); при т*$\ne \pm $*1 и*

 *т* $\ne 0,$ *х=* $\frac{m+2}{m+1}$*.*

*Пример №2 Решить уравнение:* $\frac{1+х}{1-х}$ *=* $\frac{a}{b}$*.*

 *Решение*

1. *ОДЗ: 𝑏*$\ne $*0, х*$\ne $*1.*

 *2)Решим уравнение относительно х: (a+b)х = a – b.*

 *3) К.з.п.: a+b = 0, a = -b.*

* *Если a = -b, то нет решений.*
* *Если a*$\ne $*-b, то х =* $\frac{a – b}{a+b}$ *.*
1. *Найдем значения параметров а и b, при которых полученное значение х=1:*

*1 =* $\frac{a – b}{a+b}$*, 2b = 0, b = 0. Следовательно, при b = 0 нет решений.*

*Ответ: при a*$\ne $*-b и b*$\ne $*0 х =* $\frac{a – b}{a+b}$*; при a = -b и b=0 нет решений.*

 *Пример №3 (МГУ, 2002) При каких значениях параметра b уравнение*

*9х+ b2 – (2 -* $\sqrt{3}$ *)b - 2*$\sqrt{3}$ *= b4х – b2(b +* $\sqrt{3}$*) не имеет корней?*

 ***Решение***

1. *ОДЗ: х* $∊R$*.*
2. *Решим уравнение относительно х:*

*(b4 – 9)х = b3 + (1+* $\sqrt{3}$*) b2 – (2 -* $\sqrt{3}$*)b -2*$\sqrt{3}$*,*

*Линейное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда*

$\left\{\begin{array}{c}b^{4 }-9=0,\\b^{3}+ \left(1+ \sqrt{3}\right)b^{2} – \left(2 - \sqrt{3}\right)b -2\sqrt{3} \ne 0\end{array}\right.$

 *Первое уравнение системы имеет два корня: b1=*$ \sqrt{3}$ *, b2= -*$\sqrt{3}$ *.*

1. *Подставим во второе уравнение системы b1=*$ \sqrt{3}$ *, получим: 2*$\sqrt{3}$*+6* $\ne 0$*;*

*b2= -*$\sqrt{3}$ *, получим 0=0. Т.е. второму условию удовлетворяет b1=*$ \sqrt{3}$ *.*

*Ответ: при b=*$ \sqrt{3}$ *уравнение корней не имеет.*

 ***Решить самостоятельно уравнения***

*1) (а+5)(а-3)х=а2- 25 ( при а*$\ne 3 $*и а*$\ne -5$ *х=* $\frac{a-5}{a-3}$*; при а=3* $∅$*; при а=-5 х∊R)*

*2) а2х = а(х+2) – 2 ( при а*$\ne 0 $*и а*$\ne 1$ *х=* $\frac{2}{a}$*; при а=0 ∅; при а=1 х∊R)*

*3)* $\frac{a+3}{a+2}$*=* $\frac{2}{х}$ *-* $\frac{5}{\left(a+2\right)х}$ *( при а=-3, а=-2, а=1/2 ∅; при а*$\ne -3 ;$$a\ne -2 $*и а*$\ne 1/2,$ *х=* $\frac{2a-1}{a+3}$*)*

*4)1+*$ \frac{1}{ aх}$ *=* $\frac{1}{х}$ *-* $\frac{3}{a}$ *( при а*$\ne -3 ;$$a\ne 0 $*и а*$\ne 1$$,$ *х=* $\frac{a-1}{a+3}$ *; при а=-3, а=0, а=1∅ )*

*5) Для каких значений а решение уравнения 10х-15а = 13- 5ах = 2а больше 2? (МГУ, 1982)*

 *( х∊ ( -∞; -2)* $∪$*( 1; +∞)*

*Используемая литература:*

* *Г.А. Ястребинецкий. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. М. Просвещение.1972.*
* *А.Г. Корянов. Задачи с параметрами. Брянск.2010.*
* *М.А. Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. Углубленное изучение математики. М. Просвещение. 1992.*