***Аналитические методы решения линейных уравнений с параметрами.***

В работе рассмотрены различные подходы к решению линейных уравнений с параметрами. Данная тема необходима учащимся для первичного ознакомления с методами решения уравнений с параметрами, которая является опорным пунктом подготовки к ЕГЭ (решение заданий части «С5»).

*Содержание*

1. *Понятие уравнений с параметрами.*
2. *Различные виды и методы решений линейных уравнений с параметрами.*
3. *Задания для самостоятельной работы.*

*Рассмотрим уравнения, в которых некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а обозначены буквами. Такие уравнения называются уравнениями с параметрами, а буквы – параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения.*

*Решить уравнение с параметрами – значит, найти множество всех корней данного уравнения в зависимости от допустимого значения параметра. (Т.е. указать, при каких значениях параметра существуют решения, и каковы они, затем исследовать его относительно параметра)*

*Алгоритм решения уравнений с параметрами примерно таков:*

* *Разбить область изменения параметра на промежутки, где при изменении параметра в каждом из них полученные уравнения решаются одним и тем же методом.(Границами промежутков служат те значения параметра, в которых, или при переходе через которые, происходит качественное изменение уравнения. Такие значения параметра называют «особыми» или контрольными).*
* *Отдельно на каждом промежутке находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра.*
* *Ответ уравнения состоит из списков изменения параметра с указанием всех корней для каждого промежутка (или конкретных значений параметра).*

***Основные методы решения уравнений с параметрами.***

1. ***Решение простейших линейных уравнений с параметрами.***

*Исследуем линейное уравнение вида: ax =b (1)*

1. *а0, bR, то уравнение (1) имеет единственный корень х= .*
2. *а=0, b=0, уравнение (1) имеет корнем любое действительное число, т.е. хR.*
3. *а0, 0, уравнение (1) не имеет корней.*

*Пример №1: ax = 5; при a=0 имеем 0х=5, чего не может быть,*

*тогда х , при а0 х= .*

*Пример №2: 0х=а; при а=0 получим 0х=0 хR, при а0 х .*

*Пример №3: Iхl=а, при а=0 х=0; при а>0 х=а, при а х .*

*Пример №4: ах-5=х+1*

*Решение*

*Приведем уравнение к виду: х(а-1)=6;*

*если а=1, то 0х=6, нет решений;*

*если а1, то х= .*

*Ответ: при а1 х = ; при а=1 нет решений.*

1. ***Более сложные линейные уравнения с параметром, при решении которых требуется дополнительная проверка, связанная с ограничением на ОДЗ.***

*Алгоритм решения таких уравнений:*

1. *Найти ОДЗ.*
2. *Решить уравнение относительно х.*
3. *Определить контрольные значения параметра (к.з.п.)*
4. *Проверить, нет ли таких значений параметра, при которых значение х было бы равно числу, не входящему в ОДЗ.*

***Пример №1*** ***=3***

***Решение***

1. *ОДЗ: х2*
2. *К.з.п. а=0.*
3. *Решим уравнение относительно х:*

* *При а=0 уравнение имеет вид* ***=3.*** *Уравнение корней не имеет.*
* *При а0 уравнение имеет вид* *а=3(х-2), отсюда х=*

1. *Проверим, нет ли таких значений параметра а, при которых х=2, т.е. решим уравнение: =2, а=0 ( т.е. приа=0 нет решений)*

*Ответ: при а0 х=; при а=0 нет решений.*

***Пример №2***  *=(х-1) +*

***Решение***

*1.ОДЗ: хR, а0.*

*2. Решим уравнение относительно х. Умножим обе части уравнения на а0: 2(а-1)х=(х-1)а +5;*

*2ах -2х – ах = 5 – а;*

*(а-2)х = 5 – а.*

1. *К.з.п. а = 2, т.к. коэффициент при х обращается в 0 при а=2*

* *Если а=2, то 0х=3, нет решений;*
* *Если а2, то х = .*

*Ответ: при а=2 нет решений; при а2 и при а0 х = ; при а=0 уравнение не имеет смысла.*

***Примечание. Если при каком-нибудь значении параметра а=а0 данное уравнение не имеет смысла, то нет и решений при а=а0. Обратное утверждение не верно. Бывает, что при контрольном значении параметра уравнение имеет корни, но они не входят в ОДЗ.***

***3.Уравнения, сводящиеся к линейным***

*Пример №1 Решить уравнение: m = +*

*Решение*

1. *ОДЗ: т0, х1.*
2. *Решим уравнение относительно х. Умножим обе части уравнения на т(х-1)0, получим т2(х-1) = х – 1 + т – 1;*

*Х( т2 – 1) = т2+ т – 2;*

*Х(т-1)(т+1) = (т-1)(т+2).*

1. *К.з.п. т= 1*

* *Если т=1, то 0х=0, следовательно, х-любое действительное число, где х 1.*
* *Если т=-1, то 0х=-2, нет решений.*
* *Если т1 и т то х= .*
* *Если т = 0, то нет решений.*

1. *Проверим, нет ли значений параметра а, при которых найденное значение х равно 1:*

*= 1, т+2=т+1, 0т=1, нет решений.*

*Ответ: при т=0 и т=-1 нет решений; при т=1 х(-∞;1) (1;+∞); при т1 и*

*т х= .*

*Пример №2 Решить уравнение: = .*

*Решение*

1. *ОДЗ: 𝑏0, х1.*

*2)Решим уравнение относительно х: (a+b)х = a – b.*

*3) К.з.п.: a+b = 0, a = -b.*

* *Если a = -b, то нет решений.*
* *Если a-b, то х = .*

1. *Найдем значения параметров а и b, при которых полученное значение х=1:*

*1 = , 2b = 0, b = 0. Следовательно, при b = 0 нет решений.*

*Ответ: при a-b и b0 х = ; при a = -b и b=0 нет решений.*

*Пример №3 (МГУ, 2002) При каких значениях параметра b уравнение*

*9х+ b2 – (2 - )b - 2 = b4х – b2(b + ) не имеет корней?*

***Решение***

1. *ОДЗ: х .*
2. *Решим уравнение относительно х:*

*(b4 – 9)х = b3 + (1+ ) b2 – (2 - )b -2,*

*Линейное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда*

*Первое уравнение системы имеет два корня: b1= , b2= - .*

1. *Подставим во второе уравнение системы b1= , получим: 2+6 ;*

*b2= - , получим 0=0. Т.е. второму условию удовлетворяет b1= .*

*Ответ: при b= уравнение корней не имеет.*

***Решить самостоятельно уравнения***

*1) (а+5)(а-3)х=а2- 25 ( при аи а х= ; при а=3 ; при а=-5 х∊R)*

*2) а2х = а(х+2) – 2 ( при аи а х= ; при а=0 ∅; при а=1 х∊R)*

*3) = - ( при а=-3, а=-2, а=1/2 ∅; при а и а х= )*

*4)1+ = - ( при а и а х= ; при а=-3, а=0, а=1∅ )*

*5) Для каких значений а решение уравнения 10х-15а = 13- 5ах = 2а больше 2? (МГУ, 1982)*

*( х∊ ( -∞; -2) ( 1; +∞)*

*Используемая литература:*

* *Г.А. Ястребинецкий. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. М. Просвещение.1972.*
* *А.Г. Корянов. Задачи с параметрами. Брянск.2010.*
* *М.А. Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. Углубленное изучение математики. М. Просвещение. 1992.*