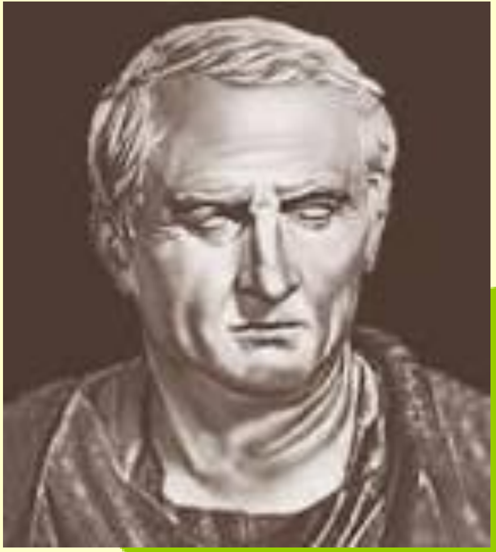
«Производная и её применение в различных областях науки, техники и практической деятельности человека.»



«Недостаточно обладать мудростью, надо уметь пользоваться ею»

Марк Ту́ллий Цицерон, древнеримский политик и философ

Проблемные вопросы учебной темы

Давно ли производная помогает математикам и физикам?
Можно ли управлять скоростью процессов?
Геометрия и производная тоже связаны?
Что увидит физик, биолог и химик в производной?

Исторические сведения

Впервые понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тартальи (около 1500 - 1557 гг.) - здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

Исторические сведения

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

1) о разыскании касательной к произвольной линии;

2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Исторические сведения

Пьер де Ферма́

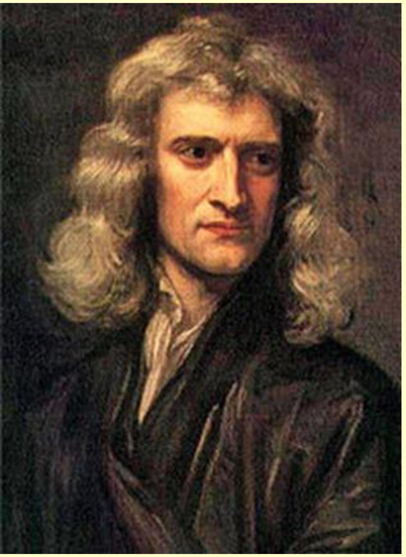
(1601-1665) —

французский математик,

один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел.

По профессии юрист.

Блестящий полиглот.



Исторические сведения

Сер **Исаа́к Нью́тон**

(1642 — 1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Исторические сведения

Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц (1646—1716) — **немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук.**

Важнейшие научные достижения:

Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.

Лейбниц создал комбинаторику как науку.

Он заложил основы математической логики.

Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.

В психологии развил учение о бессознательной психической жизни.

Исторические сведения

Леона́рд Э́йлер (1707-1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик.

Эйлер — автор более чем 850 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям.

С 1726 по 1741, а также с 1766 года был академиком Петербургской академии наук. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском. Первые русские академики-математики и астрономы были учениками Эйлера.

Некоторые из его потомков до сих пор живут в России.

Схема решения прикладных задач

1. Задача переводиться на язык функции. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию f(x).
2. Средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее ее значение на некотором промежутке.
3. Выясняется, какой практический смысл имеет полученный результат.

В биологии часто приходиться решать такие задачи.

Задача 1.

В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону $P(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}$, где t – время в часах.

Найдите максимальный размер этой популяции.

Популяция - это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.

Решение:

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$x = x(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	Приращение функции
Скорость изменения численности популяции	$\Delta x / \Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Относительный прирост в данный момент	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x / \Delta t$	Производная

$P = x'(t)$

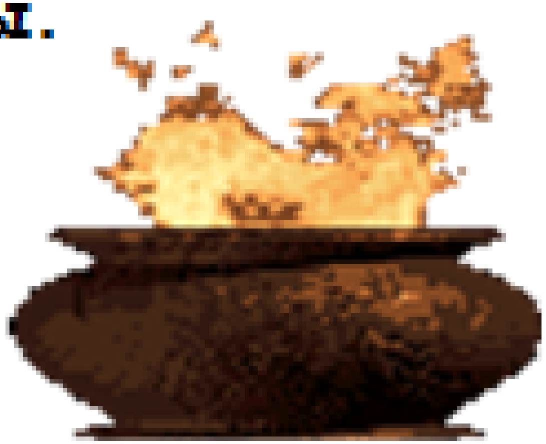
Одним из вопросов, изучаемых в химии, является вопрос скорости химической реакции.

Задача по химии:

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью:

$$p(t) = t^2/2 + 3t - 3 \text{ (моль)}$$

Найти скорость химической реакции через 3 секунды.



Решение:

Понятие на языке химии	Обозначение	Понятие на языке математики
Количество в-ва в момент времени t_0	$p = p(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение количества в-ва	$\Delta p = p(t+\ t) - p(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta p / \Delta t$	Отношение приращён. функции к приращён. аргументу

$$\boxed{V(t) = p'(t)}$$

Применение производной в алгебре.

Задача 1. Нужно огородить участок прямоугольной формы забором 200м. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Задача 2. Упростить запись функции:

$$f(x) = \sin 3x \cdot \cos^3 x + \cos 3x \cdot \sin^3 x$$

Использование производной для решения задач по экономической теории.

Задача 1. Предприятие производит Х единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накопления предприятия от объема выпуска выражается формулой $f(x)=-0{,}02x^3+600x-1000$. Исследовать потенциал предприятия.

.

Использование производной для решения задач по экономической теории

П (t) = $u'(t)$ - *производительность труда,*

где* u (t) - *объем продукции

J(x) = $y'(x)$ - *предельные издержки производства,*

***где* y– *издержки производства в зависимости от объема выпускаемой продукции* x.**

.

Использование производной для решения задач по экономической теории

Задача 2. Вычислить производительность труда во время первых 4 часов работы, если объем продукции y в течение рабочего дня представлен функцией

$y = -2t^2 + 10t + 50$, t– время, ч.

Что увидит физик в производной?

Скорость изменения функции.

Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0) = s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0. Вторая производная $a(t_0) = s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0.

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y = f(x)$.

Основные формулы из физики, применяемые при решении задач.

$I = g^{'}(t)$ Сила тока

$\omega = \varphi(t)$ Угловая скорость

$F = ma$ Сила

$E = \dfrac{mv^2}{2}$ Кинетическая энергия

$P = mv$ Импульс

Задачи на нахождение производной

1. **Тело движется по закону $x(t)=3t^4-3t^3+4t+2$. Найти скорость тела при t=1с.**

2. Тело массой 300г. Движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^3+2t-7$. Найти силу, действующую на это тело при t=3с.

3. Дождевая капля падает под действием силы тяжести; равномерно испаряясь так, что ее масса m изменяется по закону $m(t) = 1 - 2/3t$. (m изменяется в граммах, t - в секундах). Через сколько времени после начала падения кинематическая энергия капли будет наибольшей?

4. Тело массой 1кг 600г движется прямолинейно по закону $x(t)=t(3t-7)$. Найти импульс тела при t=2с.

Теплота

<u>Задача.</u>

Какое количество теплоты Q (t) необходимо для нагревания тела массой 1 кг от 0^0C до температуры 100^0 (по Цельсию), если известно, что в диапазоне $0^0C <= t <= 100^0C$, формула

$$Q(t) = 0{,}396t+2{,}081\cdot10^{-3}t^2-5{,}024\cdot10^{-7}t^3$$

дает хорошее приближение к истинному значению.

Заряд

Задача.

Количество электричества, протекающее через проводник, задаётся формулой $q(t) = t+4/t$. В какой момент времени ток в цепи равен нулю?

Выводы

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»
Н.И. Лобачевский

Аппарат производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории, физике, алгебре и геометрии, химии, биологии, технике.