**Примеры применения прикладных задач**

**на различных этапах урока.**

1. Задачи с прикладным содержанием как средство создания на учебных занятиях проблемных ситуаций.

Рассмотрим прикладную задачу, которая применяется в начале урока на этапе мотивации как средство создания проблемной ситуации.

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя. | Деятельность учеников. |
| Ребята, давайте решим такую задачу. Необходимо определить, сколько краски потребуется для покраски металлического изделия, изображенного на рисунке, если известно, что для покраски 1 м2 поверхности расходуется 200 г краски.  Что мы должны сделать в первую очередь?  В чем заключается второй этап решения задачи?  Правильно, и что нам останется сделать?  Итак, о чем идет речь в задаче?  Как называются такие задачи?  Какой метод решения прикладных задач вы знаете?  Что значит решить задачу методом математического моделирования? В чем он заключается?  Все правильно. Итак, нам нужно составить математическую модель задачи. Давайте начнем с вопроса. Что требуется найти в задаче?  Что нужно знать для нахождения массы краски?  Как, зная площадь поверхности детали, можно найти массу краски?  А можем ли мы найти площадь полной поверхности фигуры? Что нужно для этого знать?  Для решения задачи нам необходима формула вычисления площади поверхности фигуры. Известно ли нам, с какой фигурой мы имеем дело?  Удобно ли нам будет вычислять площадь всей фигуры? Может быть мы сможет как-то облегчить себе задачу?  Правильно. Итак, ребята, мы пришли к выводу, что наших знаний недостаточно, чтобы решать задачу. Что же мы должны сделать сейчас? | Нужно записать все данные и требования задачи на математическом языке, т. е. в виде уравнений или систем уравнений.  Преобразования составленных формул с помощью известных математических преобразований, пока не придем к ответу, записанном на математическом языке.  Нужно перевести ответ с математического на язык формулировки задачи.  О некотором металлическом изделии с заданными размерами, которое нужно покрасить.  Прикладные (практические) задачи.  Метод математического моделирования.  Метод состоит из трех этапов:  1). Перевод задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построение математической модели задачи.  2). Решение задачи внутри модели.  3). Интерпретация полученного решения, т. е. перевод математического ответа на естественный язык.  Нужно найти массу краски, необходимой для окраски детали.  Площадь полной поверхности детали.  Если на окраску 1м2 поверхности требуется 200 г краски, то на 5м2 нужно массу краски m = 200S г или 0,2S кг краски.  Нужно знать формулу вычисления площади, а она неизвестна.  Нет.  Удобнее будет, если разделить фигуру на две части и находить отдельно площади получившихся фигур. Затем, чтобы получить площадь поверхности исходной фигуры, нужно сложить площади двух частей и вычесть две площади круга.  Нужно выяснить, из каких фигур состоит деталь, как они называются, какими особенностями обладают. На основе этого найти формулы вычислениях площади их поверхностей. |

1. Задачи с политехнической направленностью обучения, которые поддерживают мотивацию на любом этапе урока. Сущность данной методики состоит в том, что после изучения математической теории учащиеся должны быть ознакомлены с более широким кругом применения этой теории к различным видам деятельности человека.

Приведем пример соответствующего урока-практикума:

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя | Деятельность учеников |
| Изучением каких фигур мы занимались на предыдущих уроках?  Какие фигуры вращения вы знаете? Почему они называются телами вращения?  Какие формулы для вычисления площади боковой поверхности тел вращения вы знаете?  Формулы площадей полной поверхности?  Хорошо, а теперь разделитесь на три группы. Каждая группа решает свою задачу.  1. Воронка имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого 600 и 300 мм, а высота 500 мм. Сколько жести пойдет на ее изготовление, если на припуск добавляется 5% площади поверхности воронки?  2. Найдите площадь поверхности (подлежащей изоляции) десятиметровой трубы диаметром 1420 мм. Сколько квадратных метров изоляционной ленты нужно, чтобы двукратно покрыть ей трубу газопровода Уренгой-Ужгород, длина которого 4451 км?  3. Металлическая воронка, имеющая форму конуса, получается свертыванием четверти металлического диска радиуса l=40 см. Посчитать площадь боковой поверхности полученной воронки. | Изучением фигур вращения.  Цилиндр, конус, усеченный конус.  Потому, что каждое из них можно получить путем вращения: конус – вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов, цилиндр – вращением прямоугольного треугольника вокруг одной из его сторон, усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям.  Sбок.пов-сти цил-ра= 2πrh;  Sбок.пов-сти конуса= πlr;  Sбок.пов-сти усеч.конуса= π(r+r1)l;  Sцилиндра= 2πr(r+h);  Sконуса = πr(l+r). |

После того, как задачи были решены, к доске приглашаются по представителю от каждой группы и приводит решение задачи. Затем учитель предлагает подумать над более сложной задачей.

Сколько жести пойдет на изготовление бидона, осевой срез которого показан на рисунке. Припуск – 8%.

Следующий фрагмент урока-практикума по геометрии на тему «Решение задач на вычисление объемов и поверхностей тел» дает возможность выхода из теории в практику.

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя. | Деятельность учеников. |
| Сегодня мы узнаем, как применить полученные на прошлых уроках теоретические знания на практике. Для начала я познакомлю вас с некоторыми сведениями. Для транспортировки нефти или горючих газов строят магистральные газо- и нефтепроводы, используя при этом трубы разных диаметров. Труба определенного диаметра имеет соответствующую толщину. В целях избежания коррозии трубы двукратно обматывают специальной полихлорвиниловой пленкой.  Строители газопроводов и нефтепроводов, а затем и обслуживающий персонал следят за исправностью труб и производят ремонт. Сегодня вы будете выступать в роли работников газопроводов или нефтепроводов. Вам требуется выполнить работу по изоляции труб: произвести двукратную обмотку защитной пленкой. Но прежде, необходимо выяснить, сколько пленки понадобится газовикам, а сколько – нефтяникам. Разобьемся на три группы.  *1. Задача для трубоукладчиков газопроводов*: Вычислить, какую площадь трубы необходимо обмотать пленкой, если диаметр трубы 1220 мм, а ее длина 10 км.  *2. Задача для трубоукладчиков нефтепроводов*: Вычислить, какую площадь трубы необходимо обмотать пленкой, если диаметр трубы 529 мм, а ее длина 10 км.  *3. Задача для поставщиков*: Посчитать, сколько пленки в одном рулоне и сколько нужно доставить рулонов на газопровод и нефтепровод, если высота рулона – 95 см, внешний радиус – 55 см, внутренний радиус – 3 см, толщина пленки – 3 мм. | (Задача решается внутри каждой группы, один представитель от группы приводит на доске решение.)  1. Площадь поверхности трубы представляет собой боковую поверхность цилиндра. Длина трубы - высота цилиндра. Вычислим площадь покрытия газопровода, при этом диаметр трубы берем наружный. Sбок.цил.= 2πRH = = 12200,0 π ≈ 38308,0(м2).  Для двукратного покрытия трубы нужно 38308\*2 =  = 76616,0 (м2) пленки.  Вычислим площадь покрытия трубы нефтепровода, считая, что внешний диаметр трубы 529 мм: Sбок.цил.= 2πRH = =16610,6 (м2). А для двукратного покрытия нужно в два раза больше, т. е. 332221,2 (м2) пленки.  Посчитаем, сколько квадратных метров изоляционной пленки в одном рулоне. Рулон представляет собой цилиндр, высота которого Н = 95 см, а радиус R = 55 см. Внутри он полый. Полость также является цилиндром высотой Н = 95 см и радиусом r = 3 см. Вычислим объем рулона, вычтя из объема цилиндра большего радиуса объем цилиндра меньшего радиуса. (см. рис.1)    Vрул.= πR2H - πr2H = πH(R2 - r2) = =πH(R - r)(R+r) ≈ 0,90 м3.  Если развернуть рулон, то пленка примет форму прямоуг. параллелепипеда, у которого длина х мм, ширина 950 мм, высота 0,2 мм, а объем 0,90 м3  Отсюда 0,90 = 0,95\*0,0002\*х,  т. е. х ≈ 4736,84 (м) Теперь найдем площадь S поверхности пленки. Ее поверхность представляет собой прямоугольник длиной х, шириной 950 мм (см. рис.2), где х = 4736,84 (м), т. е. S = =0,95\*4736,84 = 4499,998 ≈ 4500 (м2). Итак, в одном рулоне 4500 м2 пленки. Вычислим, сколько рулонов необходимо газовикам: 76616,0/4500 = 17,026 ≈ 17,1 рулонов, т. е. 18 целых рулонов. Нефтяникам нужно  33221,2/4500 = 7,38 ≈ 8 рулонов. |

Следующая задача будет решена, подводя итог главе «Применение производной и интеграла в практических задачах», может быть использована как средство связи с генетикой в специализированных классах.

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя. | Деятельность учеников. |
| На примере этой задачи мы увидим применение определения производной на практике.  Рассмотрим колонию микроорганизмов, обитающую в условиях неограниченных ресурсов питания. Предположим, что колония не подавляется ни каким другим видом. В силу размножения и смертности число микроорганизмов в этой колонии будет меняться с течением времени. Необходимо найти закон этого изменения.  Пусть х = х(t) обозначает число живых организмов в момент времени t, а x(t+Δt) – в момент времени t+Δt. Тогда что обозначает их разность?  Из чего складывается это приращение?  За время Δt взрослые особи произведут потомство, часть особей может погибнуть. Обозначим С – число родившихся, а Н – число умерших особей за время Δt. Чему будет равно Δх?  Как число С зависит от времени Δt?  От чего еще может зависеть число родившихся особей?  Правильно, чем больше взрослых особей, тем больше потомство. Таким образом, получили, что С – некая функция, зависящая от х и Δt, т. е. С = F(х, Δt).  Как ведет себя функция F, если х или Δt растет?  А если Δt = 0 или х = 0?  Самые простые эксперименты показывают, что она должна входить линейно (т. е. если промежуточные наблюдения увеличить, например, в два раза, то и прирост потомства микроорганизмов увеличится в два раза). Следовательно, F(х, Δt) = f(x) Δt. Вопрос о характере f(x) сложный, но что мы про нее уже можем сказать?  Этот рост существенно зависит от биологических особенностей исследуемого вида, и для его описания могут понадобиться те или иные положительные степени х, рациональная функция и т. п. Мы ограничимся самым простым случаем, когда численность потомства пропорциональна количеству «родителей»? f(x) = αx, где α = const. Этот случай реализуется, например, при делении клеток. В каком виде перепишется теперь функция С?  По аналогии запишите функцию Н.  Можем написать чему равно Δх?  Замените γ = α – β и преобразуйте выражение.  Разделим обе части на Δt и перейдем к пределу при t→∞. Что получим?  Хорошо. В результате получили . Решаем это дифференциальное уравнение???  Используем начальное условие: при t = t0, x = x(t0), где t0 – время наблюдения за колонией, а x(t0) = x0 – количество живых организмов в колони на начальный момент. Выразим С из (\*) С = х0е-γt0. Подставьте это в (\*).  Полученный закон носит пока предположительный характер. Вопрос о том, насколько эта модель соответствует реальности, решает экспериментальная проверка. Но вы с уверенностью можете сказать о том, что с ростом t …  Правильно, это следует из свойств функции ех.  Однако в реальной ситуации все происходит не так. Почему?    Таким образом, это уравнение имеет смысл только в теоретическом аспекте, либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции микроорганизмов. | Разность x(t+Δt) - х(t) = Δх обозначает приращение функции х(t) за промежуток времени от t до t+Δt.  Δх = С – Н.  Чем больше Δt, тем больше С.  От количества «родителей».  Функция растет.  То она равна нулю.  Функция f(x) равна нулю, при х = 0 и монотонно возрастает с ростом х.  С = αxΔt.  Н = βxΔt.  Да, Δх = αxΔt – βxΔt  Δх =γxΔt.  lim ,  (пользуясь определением производной).  х = Сеγt. (\*)  х = х0еγ(t - t0).    Численность поголовья растет неограниченно.  Мы делали предположение о неограниченности ресурсов питания и отсутствии подавления со стороны другого вида. |

Задача приводится на этапе поддержания мотивации в начале урока решения прикладных задач на тему «Касательная к графику функции».

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя | Деятельность учеников |
| Для начала решим устно задачу: необходимо измерить площадь этого класса. Что для этого нужно сделать?  Эта простая процедура фактически означает следующее. Имеем реальный объект – пол некоторой комнаты, заменяем его абстрактной математической моделью – прямоугольником. Прямоугольнику приписываются его размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника является искомой площади пола комнаты. Схематично это можно изобразить так:  пол→b → Sпрям-ка= ab → Sпрям-ка = Sпола.  a схема 1.  Итак, зная некоторые свойства объектов, (прямоугольная форма пола в данном случае) можем описать эти свойства на математическом языке с помощью математических понятий и соотношений, т. е. построить «математическую модель» изучаемого объекта. Она строится на некотором упрощении, как вы думаете, может ли она быть тождественной самому реальному объекту и почему?  Да, она является лишь его отражением. Но в результате замены (реальный объект → мат. модель) появляется возможность математически сформулировать задачу и воспользоваться математическим аппаратом для анализа его свойств. Математические модели давно приме5няются в физике, биологии, химии, астрономии и многих других науках.  Теперь скажите, какие вопросы будем сегодня рассматривать, чем будем заниматься?  Давайте вспомним этапы решения практических задач, опираясь на схему1.  А теперь попробуйте решить следующую задачу. Цепь висячего моста располагается по дуге параболы y = px2. пролет моста имеет длину L = 50 м, а стрела провеса b = 5 м. определить величину угла провеса α в крайней точке моста.  С чего необходимо начать решение?  Обозначим на рисунке все данные. Известно, что цепь моста располагается по параболе y = px2, попробуем изобразить угол провеса в крайней точке моста. Что нужно сделать?  Хорошо. Изобразим угол α, величину которого необходимо найти. К чему свелось решение задачи?  Правильно. Для решения поместим параболу в ПДСК так, чтобы ее вершина совпала с началом координат. Какие координаты имеет точка касания графика параболы и касательной?  Чему равен tg α?  y’ = 2px, чему равно p?  Дорешайте задачу самостоятельно и скажите ответ на языке реальной действительности. | Измерить длину и ширину класса и перемножить, т. е. найти площадь прямоугольника.  Нет не может, так как она не передает всех его особенностей.  Решать прикладные задачи, а в процессе решения строить математические модели.  1. переход от реальной ситуации к уравнению (построение математической модели);  2. применение математических методов к математической модели на основе ее свойств;  3. сопоставление полученного решения с реальной ситуацией (интерпретация результата решения).  С построения математической модели моста.  Построить касательную к параболе в крайней точке моста.  К нахождению тангенса угла наклона касательной к графику параболы.  x = 25, y = 5.  tg α = y’(25).  p = y/x2 = 5/252 = 0,008  Ответ: тангенс величины угла провеса в крайней точке моста равен 0,4. |

Данную задачу целесообразно решить в конце урока изучения темы «Площадь криволинейной трапеции и определенный интеграл».

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя | Деятельность учеников |
| Чтобы показать вам применение полученных в жизни решим следующую задачу. Плотина водохранилища имеет форму равнобочной трапеции, две горизонтальные стороны которой имеют длину соответственно 200 м и 50 м, а высота равна 10 м. вычислить величины давления на плотину, если верхнее, более длинное основание лежит на уровне свободной поверхности воды. Удельный вес воды γ считать равным 9810 кН/м3.  Как называется такая задача?  Для определения силы давления воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление ΔР на площадку ΔS, погруженную на глубину h, определяется формулой ΔP = γ\*hΔS.  С чего начинается решение подобных задач?  В данном случае, какова она будет? (ученик у доски)  Для удобства решения обычно вводится ПДСК. Каким образом лучше поместить ее на рисунке?  Хорошо. Теперь вспомните, как мы находили площадь криволинейной трапеции в начале урока?  В этой задаче мы разобьем трапецию по-другому. Прямыми, параллельными поверхности воды, разбиваем трапецию на полоски шириной Δх, отстоящие от поверхности воды на расстояние х. Чему равна высота h в этом случае?  Введем буквенные обозначения. Видим, что отрезок ОВ = 100, ВС = 10, GA = 25,  AC = 75, ED = 100-y.  Чему будет равно ΔS?  Теперь посмотрим на задачу, как на геометрическую и попробуем найти какую-нибудь зависимость, из которой можно вычислить у.  Все данные для вычисления ΔР найдены. Подставьте в формулу самостоятельно и скажите ответ.  Что осталось сделать с этим выражением, если в задаче нужно найти давление воды Р?  Посмотрим на рисунок, какие будут пределы интегрирования?  Вычисляем самостоятельно интеграл и переводим ответ на язык реальной жизни. | Прикладная задача (практическая, сюжетная).  С построения математической модели, на основе свойств, описанных в условии.  Рисуем равнобочную трапецию, отмечаем данные.  Направить ось Oy вдоль поверхности воды горизонтально, а ось Ox вертикально вниз.  Делили ее основание на n отрезков, получали прямоугольники, далее вычисляли площадь каждого. Площадью криволинейной трапеции приближенно считали сумму площадей этих прямоугольников.  Высота равна значению х.  ΔS = 2\*у\*Δx.  ΔABC ~ ΔEBD, значит  AB:ED = BC:BD, т. е. 75:(100-y) = 10:x,  отсюда y = 100-15/2x или 2y = 200-15x.  ΔР = γх(200-15х)Δх.  Нужно взять интеграл.  От 0 до 10.  Р = γ  = 9810\*5000 ≈ 49,05\*104*kH*.  Давление на плотину равно 49,05\*104*kH*. |

Следующая задача решается на применение знаний по теме «Определенный интеграл». Задачу можно решить после изучения свойств определенного интеграла на любом этапе урока для поддержания интереса учеников к изучению главы «Производная». Задача будет особенно интересной для учеников химико-биологических классов.

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя. | Деятельность учащихся. |
| Решим следующую задачу. Некоторая популяция микроорганизмов размножается со скоростью  V(t) = 100 + 25/(1 + t2), где t – время в часах. Определить, сколько особей будет насчитывать популяция по истечении суток, если в начальный момент было 1000 особей.  Предлагаю нарисовать график зависимости численности особей N от времени. В начальный момент времени t0 было 1000 особей.  Давайте обозначим N(t) – число микроорганизмов в момент времени t = T, а N(t0) - число микроорганизмов в момент времени t = t0. В нашем случае t0 = 0, T = 24, N(t) = 1000.  Если скорость роста популяции V=V(t), то каково будет приращение функции V(t) за промежуток времени от 0 до 24 часов?  Хорошо. Аккуратно считаем и записываем ответ. К доске пойдет… | N(24) – N(0) = .  Отсюда можно выразить N(24).  N(24) = 1000 + = =1000+24\*100-25/(1+24)+25 =  = 1000+2400-1+25 = 3424.  Ответ: в течение суток численность популяции будет насчитывать 3424 особей микроорганизмов. |

3Прикладные задачи как средство связи математики со смежными дисциплинами.

Задача на развитие общего интереса к предмету математики может быть дана заключительном этапе урока в качестве занимательной и отвлекающей от теории.

|  |  |
| --- | --- |
| Деятельность учителя. | Деятельность учеников. |
| А теперь давайте отдохнем и решим интересную задачу. Мы попробуем вывести *уравнение баланса энергии*. Как вы понимаете выражение «баланс энергии»? Пусть х - линейный размер растения. Это значит, что высоту растения мы будем измерять величиной х. Исходя из этого, скажите, какой величиной будем измерять площадь поверхности листьев?  А объем растения (V ствола)?  Понятно, что величина х изменяется со временем, т. е. х = х(t). Постараемся все величины, которые будут входить в уравнение баланса выразить через х.  Сначала найдем выражение для поступающей свободной энергии - Е. Эта энергия образуется благодаря фотосинтезу в зеленой части растения, и ее тем больше, чем больше поверхность зеленой части. Таким образом, можно считать, что Е пропорциональна х2, т. е.  Е = αх2, где α – коэффициент пропорциональности. Как вы думаете, от чего он зависит?  Других источников энергии нет. Мы должны проследить за расходом энергии. Энергия, прежде всего, тратиться на нужды самого фотосинтеза. Этот расход также пропорционален х2, значит в каком виде он запишется?  Сравните α и β.  Энергия расходуется на транспортировку питательной энергии во все части растения. Как связан этот расход с объемом растения.  Кроме того, этот расход связан с высотой растения. Как?  Таким образом, этот расход пропорционален как объему растения х3, так и его высоте х. Их произведение мы можем считать также пропорциональным расходу энергии. В каком виде можно записать эту зависимость?  Как вы думаете, на что еще расходуется энергия? Т. е. на увеличение массы растения. Этот расход пропорционален скорости роста, т. е. производной по времени от массы m = ρx3, где ρ – средняя плотность растения, х3 - объем. Таким образом, последний расход может быть выражен как σ.  В силу закона сохранения энергии (и всех наших гипотез) расход энергии должен быть равен ее притоку.  Какое получим уравнение?  Давайте его преобразуем  (\*)  Это и есть искомое уравнение баланса. Как вы видите оно представляет собой дифференциальное уравнение относительно х(t).Разделив (\*) на 3σρх2, и обозначив  = а,  = b,  получим  = a – bx2 ,a>0, b>0. (\*\*)  Какого знака будет производная и почему? Все это значит, что a – bx2>0, и, следовательно, х2<a/b. Поэтому, интегрируя (\*\*), получим , откуда  - дает кривую роста.  Если известны a и b (зависят от породы дерева), то по этой формуле можно посчитать средний рост дерева данной породы в зависимости от возраста (т. е. от времени t). | Отношение полученной извне энергии и той энергии, которая будет потрачена в результате жизнедеятельности.  Величиной х2.  Величиной х3.  Он зависит от размера и формы листьев, от интенсивности фотосинтеза.  βх2, где β – коэффициент пропорциональности.  α конечно больше β, иначе процесс был бы бессмыслен.  Чем больше растение, тем расход больше.  Чем выше растение, тем на большую высоту надо поднимать питательные вещества, тем больше расход.    γх3х.  На рост.  E = .  >0, так как дерево растет. |