**Комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**

I.Организационный момент

II. Введение

Мы никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы.

Платон

III. Актуализация знаний.

Решите квадратное уравнение.

1. $2x^{2}+x-6=0 $ (ответ: $x\_{1}= -2$; $x\_{2}= -1,5$)
2. $x^{2}+4x+4=0$ (ответ: $x\_{1}= -2$ $x\_{2}= -2$)
3. $4x^{2}+11x-10=0$ (ответ: решений нет, т.к. D $\leq $ 0)

Мы видим, что одно уравнение имеет два корня, один корень или два одинаковых корня, и не имеет решений в множестве действительных чисел.

Сегодня мы с вами узнаем, что и это уравнение решить можно, только для этого нам придется познакомиться еще с одним множеством чисел.

Давайте вспомним, а какие множества чисел мы с вами знаем? (Вспоминаем беседуя)

1. Вы совсем маленькие, и только учитесь считать 1, 2, 3….?

Множество натуральных чисел обозначается латинской буквой ***N*** ={1,2,3,....}

1. Зима, мороз, холодно… Температура за окном? - 10 градусов. Так вы познакомились с отрицательными числами и ноль

**3)**Множество целых чисел состоит из трех частей – натуральные числа, отрицательные целые числа (противоположные натуральным числам) и число 0. Целые числа обозначаются латинской буквой ***Z***={…-3,-2,-1,0,1,2,3,....}.

**4)** Вы взяли и разрезали яблочко на три равные части. Каждая часть составляет$ \frac{1}{3}$

Рациональные числа – это числа, представимые в виде дроби, где m — целое число, а n — натуральное число. Для обозначения рациональных чисел используется латинская буква ***Q***. Все натуральные и целые числа – рациональные. В качестве примеров рациональных чисел можно привести: ,,.

**5)** Потом оказалось, что вычисляя длину диагонали квадрата или гипотенузу прямоугольного треугольника, мы получили число под знаком корня.$ Например \sqrt{5}$, такие числа мы стали называть иррациональными.

Все перечисленные множества чисел вместе мы стали называть множеством действительных чисел.

**Вывод:**  Для перечисленных выше множеств чисел справедливо следующее высказывание:  . Его можно проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера.



**6)** Что вы слышали о **комплексных** числах?

 Рассмотрим квадратное уравнение x2 = – 1. Оно на множестве действительных чисел решений не имеет, так как среди действительных чисел нет такого числа, квадрат которого отрицателен.

Таким образом, действительных чисел явно недостаточно, чтобы построить такую теорию квадратных уравнений, в рамках которой каждое квадратное уравнение было бы разрешимо. Это приводит к необходимости расширять множество действительных чисел до множества, в котором было бы разрешимо **любое** квадратное уравнение. Такое множество называется множеством комплексных чисел и обозначается **С.**

Мы пришли к введению понятия мнимой единицы *i*=. Т.е. множество действительных чисел расширяется до множества комплексных чисел за счет мнимой единицы.

Давайте подробнее поговорим о ней **и попробуем вычислить:** i2 , i4, i3, i5.

i2=-1, тогда i4=-1∙(-1)=1

i3=()3=-1∙=-=-i, i5=()5= =i

В ходе урока вы подробнее познакомитесь с действиями над мнимой единицей.

**Опр. Комплексным числом**  называется число вида , где  и  – действительные числа,  –*мнимая единица*. Число  называется *действительной частью* *()* комплексного числа , число  называется *мнимой частью* *()* комплексного числа .

Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт.

 В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа  (мнимой единицы), т.е. i2=-1.

 Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году.

 **Задание:** Назовите мнимую и действительную часть комплексного числа.

|  |  |
| --- | --- |
| а) 7 +2i | г) 9i |
| б) зi $-$ 5 | д) $-$ 17i |
| в) 6 – 3i | е) 21 |

Какой можно сделать вывод?

Любое действительное число можно назвать комплексным с мнимой частью равной 0!

1.  Действительное число  *а*  может быть также записано в форме комплексного числа:  *a+* 0 *i* или *a –* 0 *i*.Например, записи  7 + 0 *i*  и  7 – 0 *i*  означают одно и то же число  7 .

2.  Комплексное число 0*+ bi*  называется *чисто мнимым* *числом*.Запись *bi* означает то же самое, что и  0*+ bi*.

3.  Два комплексных числа  *a+ bi* и *c+ di* считаются равными, если  *a= c* и *b= d*.

Так же как и с действительными числами с мнимымы можно выполнять арифметические операции.

**Сложение комплексных чисел**

$z\_{1}=a+bi, z\_{2 }=c+di$**;** $z\_{1 }+ z\_{2 }=a+ c+\left(b+d\right)i$

Пример 1

Сложить два комплексных числа Z1 = 5 + 8i Z2 = 4 $- $3i

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: Z=9+5i

Пример 2

Самостоятельно: Z1 = $-$4 + 10i Z2 = 6 + 7i Ответ: Z = 2 + 17i

**Вычитание комплексных чисел**

$z\_{1}=a+bi, z\_{2 }=c+di$**;** $z\_{1 }+ z\_{2 }=(a- c)+\left(b-d\right)i$

Пример 3

Найти разности комплексных чисел и, если, Z1 = 10 - 25i Z2 = 1-3i

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

Z = (10 $- $25i) $- $(1$- $3i) = (10 $- 1) - $25i + 3i = 9 $–$ 22i

Пример 4 Самостоятельно: Z1 = $-$5+10i Z2 = 1+ 3i Ответ: Z = $- $6+7i

**Умножение комплексных чисел**

*Правило умножения.*Комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что .

Пример 5

Найти произведение комплексных чисел  Z1 = 1$-$ i; Z2 = 3 + 6i

$Z\_{1}∙Z\_{2}$ = (1 $- i)∙(3+6i)=3+6i -3i -6i^{2}=3+3i -6(-1)=9+3i$

 Z1∙Z2= Z2∙Z1 – от перестановки множителей произведение не меняется.

Пример 6 Самостоятельно: Z1 = 5 $- $2i Z2 = 1 $-$4i Ответ: Z = $1$3 $- $22i

Пример 7 Самостоятельно: ( 2+ 8i )( 2 – 8i )= 2 2 + 82

Вывод: ( *a+ bi* )( *a – bi* )*= a* 2 *+ b* 2*.* Следовательно, *произведение* *двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному* *положительному числу.*

**Деление комплексных чисел**

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Пример 8.   Найти  $\frac{3+i}{4+i}$ = $\frac{ \left(3+i\right)(4 -i)}{\left(4+i\right)(4 -i)}$ = $\frac{12 -3i+4i -i^{2}}{4^{2}+ 1^{2}}$ =$\frac{13+i}{17}$

(Умножаем числитель и знаменатель на  (4 -i))

Пример 9   Найти  $\frac{8+i}{2-3i}=\frac{13+26i}{13}=1+2i$

Пример 10   Вычислить:$ \frac{3-i}{1+i}$ - (2+7i)(1 - i)= - 8 - 7i

Пример 11  Вычислить:$ \frac{-7-12i}{-12+7i} -\frac{13+i}{7-6i}$ = -1

**Работа в парах**

**Вариант 1.**

1. Даны два комплексных числа Z1= (10 + 2i ) и Z2=(1 – 6i ). Найдите их сумму, разность, произведение и частное.

2. Проверьте правильность следующих утверждений:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: Z1=2i, Z2=-3i

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=-5i, Z2=3i

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=10i

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=7i, Z2=3

которых равны 2.

Фамилия, имя:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Оценка:\_\_\_\_\_\_\_

Фамилия, имя:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Оценка:\_\_\_\_\_\_\_

**Работа в парах**

**Вариант 2.**

Даны два комплексных числа z1= (12 + 2i ) и z2=(3 – 4i ). Найдите их сумму, разность, произведение и частное.

2. Проверьте правильность следующих утверждений:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: Z1=2i, Z2=-3i

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=-5i, Z2=3i

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=10i

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: Z1=7i, Z2=3

Фамилия, имя:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Оценка:\_\_\_\_\_\_\_

Фамилия, имя:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Оценка:\_\_\_\_\_\_\_

**Ответы:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1****1.** Z1+ Z2=11 – 4i 2. Z1- Z2=9 +8i3. Z1 Z2=22 -58i4. $\frac{Z\_{1}}{Z\_{2}}=-\frac{2}{37}+\frac{62}{37}i$ | **Вариант 2****1.** Z1+ Z2=15 – 2i 2. Z1- Z2=9 +6i3. Z1 Z2=44 -42i4. $ \frac{Z\_{1}}{Z\_{2}}=\frac{28}{ 25}+\frac{54}{25}$ |

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Z1=2i, Z2=-3i , Z1+Z2=-i, Z1-Z2=5i

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Z1=-5i, Z2=3i , Z1 ∙Z2=15

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Z=10i , Z2=-100

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Z1=7i, Z2=3, Z1 ∙Z2=21i

**Давайте, вспомним, с чего мы начинали урок?** Как вы думаете, теперь мы с вами можем решить любое квадратное уравнение?

**Решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел**

ax2 + bx + c = 0

1 cлучай: D>0, 2 корня, х1,2 =$\frac{ -в\pm \sqrt{D}}{2a}$

2 случай D=0, 1 коре нь, х =$ \frac{-в}{2a}$

3 cлучай: D<0, 2 корня, х1,2 =$\frac{ -в\pm \sqrt{D}}{2a}$

1. Решите уравнение x2 – 4x + 5 = 0.

Решение. D = – 4 < 0, $\sqrt{D}=\pm 2i , $уравнение имеет мнимые корни:   2+i, 2-i

2. Решите уравнение x2 – x + 10 = 0.

Решение. D = – 39 < 0,$ \sqrt{D}=\pm \sqrt{39}i $ , уравнение имеет мнимые корни:   $\frac{1\pm \sqrt{39}i}{2}$

3. Решите уравнение x2 – 4x + 13 = 0.

Решение. D = – 36 < 0, $\sqrt{D}=\pm 6i , $уравнение имеет мнимые корни:   2+3i, 2-3i

1. Решите уравнение x2 – 2x + 15 = 0.

Решение. D = – 56 < 0,$ \sqrt{D}=\pm \sqrt{56}i=\pm 2\sqrt{14}i$ , уравнение имеет мнимые корни:   $1\pm \sqrt{14}i$

**Домашнее задание:**

**На «3»:**

1. Даны два комплексных числа z1= (4 + 2*i* ) и z2=(1 – 3*i* ). Найти их сумму, разность, произведение и частное.

**На «4»:**

1.Даны два комплексных числа z1= (5 + 2*i* ) и z2=(2 – 5*i* ). Найти их сумму, разность, произведение и частное.

2.Вычислить: $\left(1+i\right)\left(2+i\right)+\frac{5}{1+2i} $ Ответ:a) 2 + i

**На «5»:**

 Решить уравнения:

1. *х*2 + (5 – 2i) *x* + 5(1– *i*) = 0;

2. *х*2 + (1 – 2*i*) *х* – 2*i* = 0;

Рефлексия

* Мне больше всего удалось…
* Для меня было открытием то, что …
* За что ты можешь себя похвалить?
* Что на ваш взгляд не удалось? Почему? Что учесть на будущее?
* Мои достижения на уроке.