**Методы решения нестандартных уравнений**

 **1 .Метод разложения на множители**

 Суть этого метода заключается в следующем: уравнение f(х)\*g(х)\*h(х)=0 можно заменить совокупностью уравнений f(х)=0; g(х)=0; h(х)=0. Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение: $ \frac{( х²+х+2)}{3х²+5х-14}$=$ \frac{х²+х+6}{3х²+5х-10}$

Δ Освободимся в уравнении от знаменателей дробей. При этом целесообразно суммы х²+х и 3х²+5х в левой и правой его частях считать за одно слагаемое : ((х²+х)+2)/((3х²+5х)-14)=((х²+х)+6)((3х²+5х)-10).

 Теперь получаем (х²+х)(3х²+5х)-10(х²+х)+2(3х²+5х)-20=(х²+х)(3х²+5х)-14(х²+х)+6(3х²+5х)-84, 4(х²+х)-4(3х²+5х)+64=0, х²+х-3х²-5х+16=0,

 2х²+4х-16=0, х²+2х-8=0.

 Корни последнего уравнения х₁ = 2, х₂ = -4. Сделаем проверку по исходному уравнению: не обращается ли какой-либо из двух знаменателей дробей в этом уравнении в нуль? Оказывается, не обращается. Значит, это корни исходного уравнения.

Ответ: 2, -4.

Пример 2. Решите уравнение: $\frac{2}{х+8}+\frac{5}{х+9}=\frac{3}{х+15}+\frac{4}{х+6}.$

Δ Представим уравнение в таком виде: $\frac{5}{х+9}-\frac{4}{х+6}=\frac{3}{х+15}-\frac{2}{х+8}.$

 Приведем разности в левой и правой частях этого уравнения к общим знаменателям: $\frac{х-6}{\left(х+9\right)\left(х+6\right)}=\frac{х-6}{\left(х+15\right)\left(х+8\right)},$

 (х-6)($\frac{1}{\left(х+9\right)(х+6)}$-$\frac{1}{\left(х+15\right)(х+8)}$)=0.

 Приравняем нулю каждый из множителей в левой части последнего уравнения. Получим х – 6 =0 или 8х= 66, учитывая при этом, что х$\ne -9$, х$\ne -6, х\ne 15, х\ne -8.Тогда х=6 или х=-\frac{33}{4}$

 Ответ: 6,-$ \frac{33}{4}$.

Пример 3.Решите уравнение: $\sqrt[3]{х-1}$+$\sqrt[3]{2х-1}$=1.

Δ Возведем обе части уравнения в куб. Будем иметь:

х-1+2х-1+3$\sqrt[3]{\left(х-1\right)(2х-1)}$\*($\sqrt[3]{х-1}$+$\sqrt[3]{2х-1}$)=1,

$\sqrt[3]{\left(х-1\right)(2х-1)}$\*($\sqrt[3]{х-1}+\sqrt[3]{2х-1}$)=1-х.

 А теперь воспользуемся исходным уравнением, на основании которого сумма в скобках равна 1: $\sqrt[3]{\left(х-1\right)\left(2х-1\right)}=1-х.$

 Последнее уравнение также возведем в куб:

(х-1)(2х-1)=(1-х)³, (х-1)(2х-1+(х-1)²)=0, (х-1)х²=0.

 Отсюда х₁=1, х₂=х₃=0.

 Проверка по первоначальному уравнению показывает, что значение х=1 ему удовлетворяет, а значение х=0 – не удовлетворяет.

 Ответ: 1.

**2.Метод введения новой переменной.**

Суть метода: если уравнение ƒ(х)=0 удалось преобразовать к виду р(q(х))=0,

то нужно ввести новую переменную u=q(х), решить уравнение p(u)=0, а затем

 решить совокупность уравнений q(х)=u₁; q(х)=u₂…; q(х)=un, где u1, u2 …un – корни уравнения p(u)=0.

 Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда завуалирована и «проявляется» лишь в процессе преобразований.

 Пример 4. Решите уравнение: (х-1)(х-2)(х-4)(х-8)=4х2.

 ΔВ левой части уравнения умножим первый множитель на четвёртый, второй на третий, получим: (х²-6х+8)(х²-6х+8)=4х².

 А дальше разделим обе части уравнения на х2, пользуясь тем, что значение х=0 не является корнем уравнения: (х-9+$ \frac{8}{х}$)(х-6+ $\frac{8}{х}$)=4.

 Введем подстановку: х-9+$ \frac{8}{ х}$=у. Будем иметь:

 y(у+3)=4, у2+3у-4=0; у1=1, у2=-4.

 В обоих случаях найдем х, решая совокупность уравнений $\left[\begin{array}{c}х-9+\frac{8}{х}=0,\\х-9+\frac{8}{х}=-4;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{c}х^{2}-10х+8=0,\\х²-5х+8=0;\end{array}\right.$ х₁,₂=5$\pm \sqrt{17}$.

Ответ: 5$\pm \sqrt{17}$.

Пример 5.Решите уравнение: (х+3)⁴+(х+5)⁴=16.

 Δ Положим х+4=y ,т. к. $\frac{\left(х+3\right)+(х+5)}{2}$=х+4.

 Имеем: (y-1)⁴+(y+1)⁴=16.

 Теперь нужно в левой части уравнения (y-1) и ( y+1) возвести в квадрат, а затем то, что получилось, ещё раз возвести в квадрат. После упрощений образуется биквадратное уравнение: y⁴+6y²-7=0.

 Его корни y₁,₂ =$\pm 1$. Отсюда х₁=-3, х₂=-5.

 Ответ: -3, -5.

 Пример 6. Решите уравнение: (х²+3х-4)³+(2х²-5х+3)³=(3х²-2х-1)³.

 ΔВведём две подстановки: х²+3х-4=y; 2х²-5х+3=$z$.

 Получим: y³ +z³= (y + z)³ , 3yz (y + z)=0,

 (х²+3х-4)(2х²-5х+3)(3х²-2х-1)=0.

Решая уравнения х²+3х-4=0, 2х²-5х+3=0 и 3х²-2х-1=0 найдём все корни

 1, 1, 1, -4, $\frac{3}{2}$, - $\frac{1}{3}$.

 Ответ: 1, 1,1, -4, $\frac{3}{2}$, - $\frac{1}{3}$.

Пример 7. Решите уравнение: $\sqrt[3]{х}+\sqrt[3]{х+19}$=5.

Δ Введем две новые переменные: $\sqrt[3]{х}$=у, $\sqrt[3]{х+19}$=z.

Получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}y+z=5\\y^{3}=х,\\z^{3}=х+19.\end{array}\right.$$

Вычтем третье из второго уравнения системы для того, чтобы исключить х: z3-у3=19.

 Для решения системы двух уравнений у+z=5, z3-у3=19

выразим z из первого уравнения и подставим это выражение во второе уравнение:

z=5-у, (5-у)3-у3=19, 125-75у+15у2-2у3=19, 2у3-15у2+75у-106=0.

 Из делителей свободного члена последнему уравнению удовлетворяет у=2. Тогда уравнение приводится к виду:

 (у-2)(2у2-11у+51)=0.

Так как дискриминант уравнения 2y² -11y+51=0 отрицателен, то других корней у уравнения нет.

Следовательно, х=у3=23=8.

Ответ: 8

 **3. Функционально-графический метод**

 Идея графического метода решения уравнения ƒ(х)=q(х) проста и понятна: нужно построить графики функций y= ƒ(х), y = q(х) и найти точки их пересечения - корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближённые , а иногда и точные значения корней. В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить опорой на какие – либо свойства функций.

 Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 8. Решите уравнение: $\sqrt{х³-х}$ +$\sqrt[4]{х-х²}$ =х³-3х+2 .

 ΔНайдём область определения D уравнения. Она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

 $\left\{\begin{array}{c}х³-х\geq 0,\\х-х²\geq 0.\end{array}\right.$

 Решением первого неравенства является множество $\left[-1;0\right]∪\left[1;\infty )\right.$,

второго отрезок $\left[0;1\right]$. Следовательно, область D состоит всего из двух точек -0 и 1. Значение х=0 не удовлетворяет уравнению, значение х=1- удовлетворяет.

 Ответ: 1.

 Пример 9. Решите уравнение: $ \sqrt{3-х}$ =$log\_{5}\left(х-3\right).$

 Δ ОДЗ этого уравнения состоит из всех х, одновременно удовлетворяющих условиям 3-х$\geq $0 и х-3$>$0, т. е. ОДЗ есть пустое множество. Следовательно , уравнение не имеет корней.

 Ответ: решений нет.

 При решении уравнений свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определённую роль. Например, если для всех x из некоторого множества М справедливы неравенства ƒ(х)$>$А и q(х)$<$А, где А некоторое число, то на множестве М уравнение ƒ(х)=q(х) решений не имеет.

 Пример 10. Решите уравнение: $ \sqrt{х²-2х+17}$ =-х²+4х.

 ΔСправедливы неравенства : х²-2х+17$\geq 16,$ -х²+4х$\leq $4.

Тогда множество значений левой части уравнения есть промежуток$ \left[4;+\infty \right.$), а правой – ($\left.-\infty ;4\right]$.Следовательно, равенство этих частей возможно только тогда, когда каждая из частей уравнения равна 4. Но левая часть равна 4 прих=1, а правая – при х=2. Это значит, что уравнение не имеет решений.

 Ответ: решений нет.

Пример 11. Решите уравнение: 10х⁴+3х³+5х²+5х+8=0.

 ΔСделаем уравнение приведённым:

 х⁴+$\frac{3}{10}$ х³+$\frac{1}{2}$ х²+$\frac{1}{2}$ х+$\frac{4}{5}$=0.

Дополним сумму х⁴ + $\frac{3}{10}$ х³ до квадрата суммы:

 (х² +$\frac{3}{20}$ х)² +($\frac{191}{400}$ х²+$\frac{1}{2}$ х +$\frac{4}{5 }$ )=0.

Дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего во вторых скобках , отрицателен, поэтому трёхчлен при х сохраняет постоянный знак, а именно положительный. Но тогда вся левая часть уравнения положительна; следовательно, уравнение не имеет решений.

 Ответ: решений нет.

Пример 12. Решите уравнение: $\sqrt[3]{х+6}$+$\sqrt[3]{х+25}$+х=7.

Δ Очевидно один корень уравнения – х=2. Имеет ли оно другие корни?

 Левая часть уравнения есть возрастающая функция, как сумма трех возрастающих функций. Но монотонная функция каждое свое значение (в данном случае значение 7) принимает в единственной точке, поэтому других корней у уравнения нет

 Ответ: 2.