**Методы решения нестандартных уравнений**

**1 .Метод разложения на множители**

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение f(х)\*g(х)\*h(х)=0 можно заменить совокупностью уравнений f(х)=0; g(х)=0; h(х)=0. Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение: =

Δ Освободимся в уравнении от знаменателей дробей. При этом целесообразно суммы х²+х и 3х²+5х в левой и правой его частях считать за одно слагаемое : ((х²+х)+2)/((3х²+5х)-14)=((х²+х)+6)((3х²+5х)-10).

Теперь получаем (х²+х)(3х²+5х)-10(х²+х)+2(3х²+5х)-20=(х²+х)(3х²+5х)-14(х²+х)+6(3х²+5х)-84, 4(х²+х)-4(3х²+5х)+64=0, х²+х-3х²-5х+16=0,

2х²+4х-16=0, х²+2х-8=0.

Корни последнего уравнения х₁ = 2, х₂ = -4. Сделаем проверку по исходному уравнению: не обращается ли какой-либо из двух знаменателей дробей в этом уравнении в нуль? Оказывается, не обращается. Значит, это корни исходного уравнения.

Ответ: 2, -4.

Пример 2. Решите уравнение:

Δ Представим уравнение в таком виде:

Приведем разности в левой и правой частях этого уравнения к общим знаменателям:

(х-6)(-)=0.

Приравняем нулю каждый из множителей в левой части последнего уравнения. Получим х – 6 =0 или 8х= 66, учитывая при этом, что х, х

Ответ: 6,-.

Пример 3.Решите уравнение: +=1.

Δ Возведем обе части уравнения в куб. Будем иметь:

х-1+2х-1+3\*(+)=1,

\*()=1-х.

А теперь воспользуемся исходным уравнением, на основании которого сумма в скобках равна 1:

Последнее уравнение также возведем в куб:

(х-1)(2х-1)=(1-х)³, (х-1)(2х-1+(х-1)²)=0, (х-1)х²=0.

Отсюда х₁=1, х₂=х₃=0.

Проверка по первоначальному уравнению показывает, что значение х=1 ему удовлетворяет, а значение х=0 – не удовлетворяет.

Ответ: 1.

**2.Метод введения новой переменной.**

Суть метода: если уравнение ƒ(х)=0 удалось преобразовать к виду р(q(х))=0,

то нужно ввести новую переменную u=q(х), решить уравнение p(u)=0, а затем

решить совокупность уравнений q(х)=u₁; q(х)=u₂…; q(х)=un, где u1, u2 …un – корни уравнения p(u)=0.

Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда завуалирована и «проявляется» лишь в процессе преобразований.

Пример 4. Решите уравнение: (х-1)(х-2)(х-4)(х-8)=4х2.

ΔВ левой части уравнения умножим первый множитель на четвёртый, второй на третий, получим: (х²-6х+8)(х²-6х+8)=4х².

А дальше разделим обе части уравнения на х2, пользуясь тем, что значение х=0 не является корнем уравнения: (х-9+)(х-6+ )=4.

Введем подстановку: х-9+=у. Будем иметь:

y(у+3)=4, у2+3у-4=0; у1=1, у2=-4.

В обоих случаях найдем х, решая совокупность уравнений

х₁,₂=5.

Ответ: 5.

Пример 5.Решите уравнение: (х+3)⁴+(х+5)⁴=16.

Δ Положим х+4=y ,т. к. =х+4.

Имеем: (y-1)⁴+(y+1)⁴=16.

Теперь нужно в левой части уравнения (y-1) и ( y+1) возвести в квадрат, а затем то, что получилось, ещё раз возвести в квадрат. После упрощений образуется биквадратное уравнение: y⁴+6y²-7=0.

Его корни y₁,₂ =. Отсюда х₁=-3, х₂=-5.

Ответ: -3, -5.

Пример 6. Решите уравнение: (х²+3х-4)³+(2х²-5х+3)³=(3х²-2х-1)³.

ΔВведём две подстановки: х²+3х-4=y; 2х²-5х+3=.

Получим: y³ +z³= (y + z)³ , 3yz (y + z)=0,

(х²+3х-4)(2х²-5х+3)(3х²-2х-1)=0.

Решая уравнения х²+3х-4=0, 2х²-5х+3=0 и 3х²-2х-1=0 найдём все корни

1, 1, 1, -4, , - .

Ответ: 1, 1,1, -4, , - .

Пример 7. Решите уравнение: =5.

Δ Введем две новые переменные: =у, =z.

Получаем систему уравнений:

Вычтем третье из второго уравнения системы для того, чтобы исключить х: z3-у3=19.

Для решения системы двух уравнений у+z=5, z3-у3=19

выразим z из первого уравнения и подставим это выражение во второе уравнение:

z=5-у, (5-у)3-у3=19, 125-75у+15у2-2у3=19, 2у3-15у2+75у-106=0.

Из делителей свободного члена последнему уравнению удовлетворяет у=2. Тогда уравнение приводится к виду:

(у-2)(2у2-11у+51)=0.

Так как дискриминант уравнения 2y² -11y+51=0 отрицателен, то других корней у уравнения нет.

Следовательно, х=у3=23=8.

Ответ: 8

**3. Функционально-графический метод**

Идея графического метода решения уравнения ƒ(х)=q(х) проста и понятна: нужно построить графики функций y= ƒ(х), y = q(х) и найти точки их пересечения - корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближённые , а иногда и точные значения корней. В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить опорой на какие – либо свойства функций.

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 8. Решите уравнение: + =х³-3х+2 .

ΔНайдём область определения D уравнения. Она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

Решением первого неравенства является множество ,

второго отрезок . Следовательно, область D состоит всего из двух точек -0 и 1. Значение х=0 не удовлетворяет уравнению, значение х=1- удовлетворяет.

Ответ: 1.

Пример 9. Решите уравнение: =

Δ ОДЗ этого уравнения состоит из всех х, одновременно удовлетворяющих условиям 3-х0 и х-30, т. е. ОДЗ есть пустое множество. Следовательно , уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

При решении уравнений свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определённую роль. Например, если для всех x из некоторого множества М справедливы неравенства ƒ(х)А и q(х)А, где А некоторое число, то на множестве М уравнение ƒ(х)=q(х) решений не имеет.

Пример 10. Решите уравнение: =-х²+4х.

ΔСправедливы неравенства : х²-2х+17 -х²+4х4.

Тогда множество значений левой части уравнения есть промежуток), а правой – (.Следовательно, равенство этих частей возможно только тогда, когда каждая из частей уравнения равна 4. Но левая часть равна 4 прих=1, а правая – при х=2. Это значит, что уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 11. Решите уравнение: 10х⁴+3х³+5х²+5х+8=0.

ΔСделаем уравнение приведённым:

х⁴+ х³+ х²+ х+=0.

Дополним сумму х⁴ + х³ до квадрата суммы:

(х² + х)² +( х²+ х + )=0.

Дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего во вторых скобках , отрицателен, поэтому трёхчлен при х сохраняет постоянный знак, а именно положительный. Но тогда вся левая часть уравнения положительна; следовательно, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 12. Решите уравнение: ++х=7.

Δ Очевидно один корень уравнения – х=2. Имеет ли оно другие корни?

Левая часть уравнения есть возрастающая функция, как сумма трех возрастающих функций. Но монотонная функция каждое свое значение (в данном случае значение 7) принимает в единственной точке, поэтому других корней у уравнения нет

Ответ: 2.