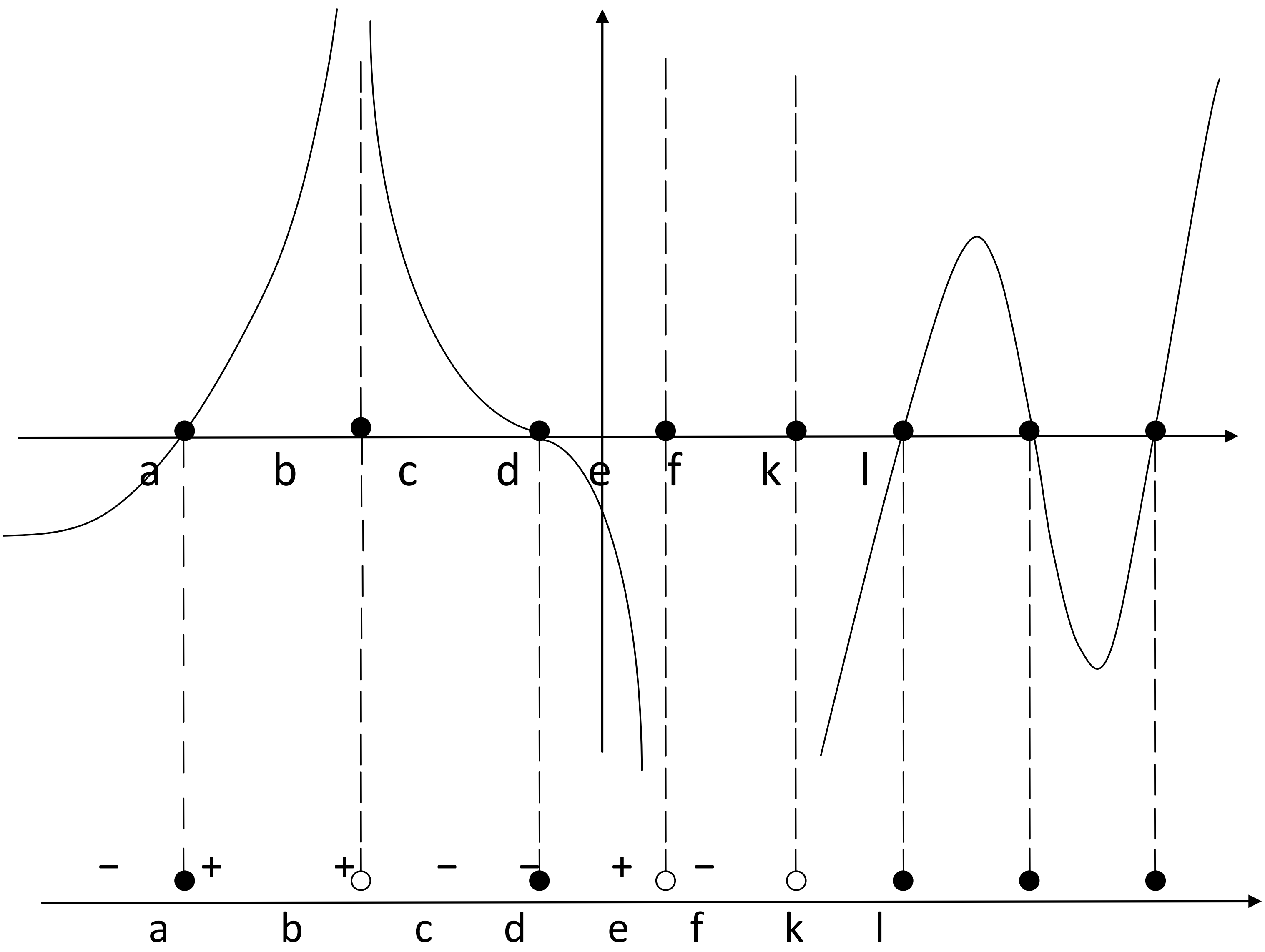
Метод интервалов - наиболее часто используемый в курсе математики метод решения неравенств с одной переменной.

Суть метода интервалов основана на следующей теореме, которая доказывается в курсе алгебры и математического анализа 10 класса: если функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]* и не обращается в нуль внутри этого отрезка, то она имеет один и тот же знак во всех его внутренних точках. Из этой теоремы следует, что на тех промежутках, где функция непрерывна и не обращается в нуль, она сохраняет постоянным свой знак. Это утверждение можно проиллюстрировать следующим образом:



Пусть дан график некоторой функции *y=f(x).* На числовой прямой отметим область определения функции, нули функции, точки разрыва, и тогда видно, что на каждом из полученных промежутков области определения функция имеет определенный знак.

Точки *a, c, f, k, l* изображают нули функции, и если неравенство нестрогое (*f(x) ≥0*; *f(x)≤0*), то точки закрашиваем и эти значения переменной включаем в ответ. На рисунке показано, что в точках *b, d, e, a* также на промежутке *(d;e)* функция не существует, поэтому указанные точки изображаются как «выколотые». Следует обратить внимание, что знаки на промежутках не всегда чередуются.

Делаем вывод, что при решении неравенства методом интервалов в правой части неравенства, нужно получить нуль (*«+», «−»* - это сравнение значений функции с нулем, определение ее знака), а левая часть неравенства должна быть по возможности разложена на множители.

Из вышесказанного можно сделать вывод об этапах решения неравенства этим методом.

Пусть дано неравенство f(x)>0 (f(x)<0).
1. Рассмотрим функцию *y=f(x).*
2. Найдем область ее определения *D(f).*
3. Найдем нули функции.
4. На числовой прямой отметим область определения и нули функции.
Обозначим интервалы, на которые отмеченные точки делят *D(f).*
5. Методом «пробных точек» определим знак функции на каждом из полученных интервалов.
6. Запишем ответ.

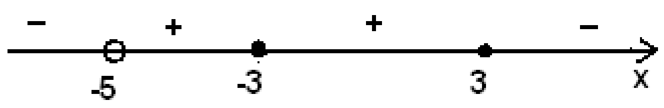
I. Учащимся можно сказать, что при решении сложных неравенств подробно этапы решения не описываем, но при решении более сложных, подробная запись этапов необходима и позволяет избежать многих ошибок.

Например, при решении приведенных ниже неравенств подробная запись решения не обязательна.

а) $\frac{(x-1)(3-x)}{5+x} \geq 0$; б) x^2-2x-3<0; в) $\frac{-x^2+9}{x+5} \leq 0$.

Стоит обратить внимание учащихся, что не всегда знак на крайнем правом промежутке будет «+».

Покажем, например, решение последнего **неравенства** $\frac{(3-x)(3+x)}{x+5} \leq 0.$



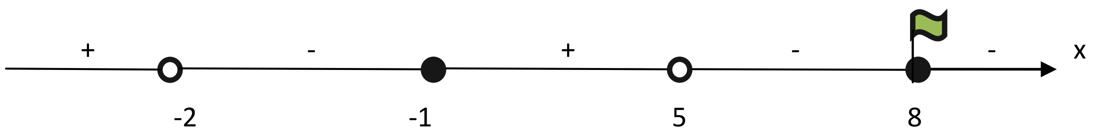
$x \in (-\infty;-5) \cup [3;+\infty).$

II.Знаки на промежутках не всегда чередуются. Можно доказать следующее утверждение: если каждый линейный множитель в левой части неравенства стоит в нечетной (в том числе и первой), то знаки чередуются. Если хотя бы один из таких множителей стоит в четной степени, то знаки чередоваться не будут.

Например, решим неравенство $\frac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)(5-x)} \geq 0$

Разложив квадратный трехчлен в левой части неравенства на множители, получим :

$$\frac{(x+1)(x-8)^4}{(x+2)(5-x)} \geq 0$$



$$x \in (-\infty;-2) \cup [-1;5) \cup \{8\}.$$

Заметим, что множитель (x-8) стоит в четной степени и при переходе через точку x=8 знак не изменился.

III. Может оказаться, что не все рациональные множители степени выше первой раскладываются на линейные множители, или встречаются множители, не являющиеся рациональными.

Если выражение в нуль не обращается , то при всех допустимых значениях переменной ,оно будет либо положительным, либо отрицательным, а это нужно обосновать и затем учитывать при определении знаков на промежутках.

1) Например, решим неравенство $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-x^2-2} \geq 0.$

Рассмотрим функцию $y = -x^2 + x - 2$. Чтобы найти нули этой функции определим D.

$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7. \quad D < 0.$

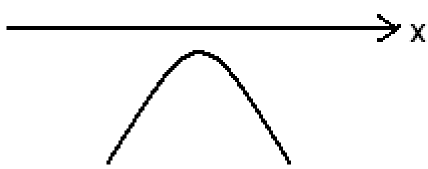
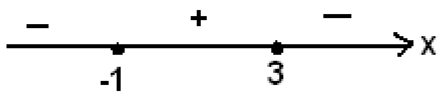


График функции с осью абсцисс не пересекается. Изображая схематически этот график, получим, что при любом X∈R $-x^2 + x - 2 < 0.$

С учетом этого результата решим данное неравенство методом интервалов.

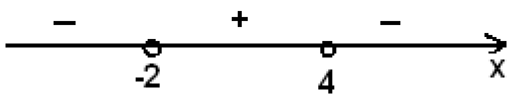


$x \in [-1;3].$

2)Решим неравенство $\frac{(\sin x - 5)(x^2+1)(x-4)}{x+2} < 0$

Известно что $x^2 \geq 0$ **при любом** $x \in \mathbf{R}.$ Следовательно $x^2 + 1 > 0.$

-1 ≤ sinX ≤ 1, поэтому -6 ≤ sinX- 5≤ -4 при любом X∈R, тогда, решая неравенство методом интервалов,



получим, что X∈ (-∞;-2)U(4;+∞)

В более сложных случаях, чтобы избежать ошибок, желательно подробно записывать решение неравенства по тому алгоритму, который был рассмотрен выше. $\frac{\sqrt{x+2}\,(x^2-2x-15)}{1-x} \geq 0$

1.Расмотрим функцию y= $\frac{\sqrt{x+2}\,(x^2-2x-15)}{1-x}$.

2.Найдем $D(y):\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

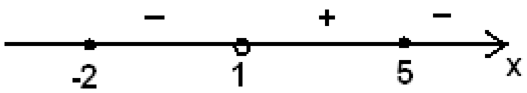
$x \in [-2;1) \cup (1;+\infty).$

3.Найдём нули функции:

$\sqrt{x+2}\,(x^2-2x-15) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 0, \\ (x+3)(x-5) = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = -3, \\ x = 5; \end{array}\right.$ x=-3 нулём функции не является, так как не входит в D(y)

4.Изображаем нули функции на её области определения и методом пробных точек на каждом из полученных промежутков определяем знак функции.

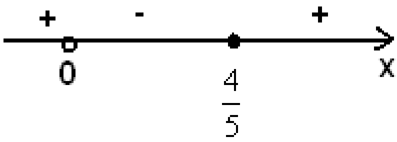


5.Ответ: $x \in (1;5] \cup \{-2\}$.

V. Методом интервалов можно решать и более сложные неравенства, встречающиеся во второй части ЕГЭ. Приведем такие примеры. Решим неравенство $x\sqrt{5-\frac{4}{x}} \le -3.$

1.Рассмотрим функцию $y = x\sqrt{5-\frac{4}{x}}+3.$

2.Найдем D(y): $5-\frac{4}{x} \ge 0, \quad \frac{5x-4}{x} \ge 0.$



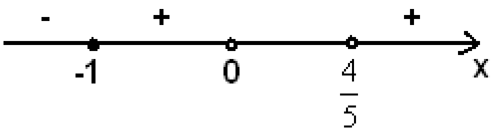
$x \in (-\infty;0) \cup \left[\frac{4}{5};+\infty\right).$

3.Найдем нули функции:

$$x\sqrt{5-\frac{4}{x}}+3=0, \quad \begin{cases} x<0, \\ 5-\frac{4}{x}=\frac{9}{x^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} 1{,}8, \\ -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

x=1,8 – нуль функции, x= -1 нулем функции не является, так как не входит в D(y).

4.



$\frac{4}{5}$ входит в D(y), но нулем функции не является. Ответ: $x \in (-\infty;-1]$.

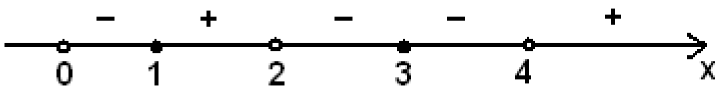
Покажем решение еще одного неравенства $\frac{\log_2 \log_4 (x+1)}{x^2-6x+8} \cdot \left(25^x - 130 \cdot 5^x + 625\right) \ge 0.$

1.Рассмотрим функцию $y = \frac{\log_2 \log_4 (x+1)}{x^2-6x+8} \cdot \left(25^x - 130 \cdot 5^x + 625\right).$

2.Найдем D(y): $\begin{cases} x+1>0, \\ \log_4 (x+1) > 0, \\ x^2-6x+8 \ne 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ x \ne 2, \\ x \ne 4. \end{cases}$

3.Найдем нули функции: $\left[\begin{array}{l} \log_2 \log_4 (x+1) = 0, \\ 25^x - 130 \cdot 5^x + 625 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1. \end{array}\right.$

4.



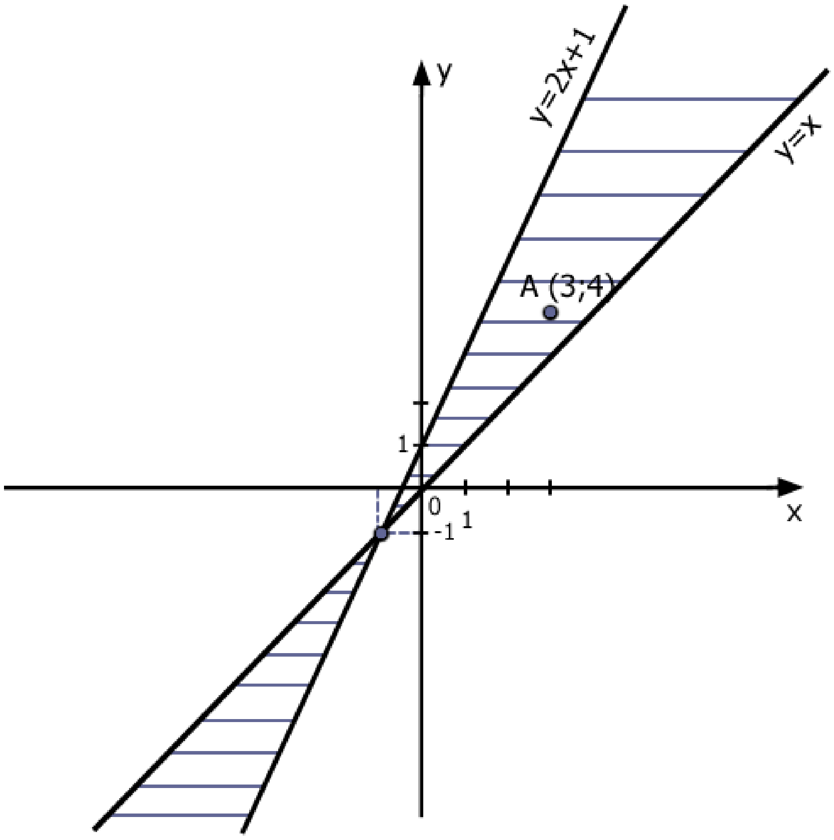
Ответ: $x \in [1;2) \cup \{3\} \cup (4;+\infty).$

VI. Можно применять метод интервалов и к решению неравенств с двумя переменными. Иногда его называют обобщённым методом интервалов. Рассмотрим примеры.

1) **$3xy - 2x^2 - y^2 - x + y \geq 0$.**

Разложив левую часть неравенства на множители, получим, что $(x - y)(y - 2x - 1) \geq 0$. (1)

По аналогии с тем, как мы отмечали нули функции на числовой прямой, построим в декартовой системе координат линии $x - y = 0$ и $y - 2x - 1 = 0$, которые разбивают плоскость на части.

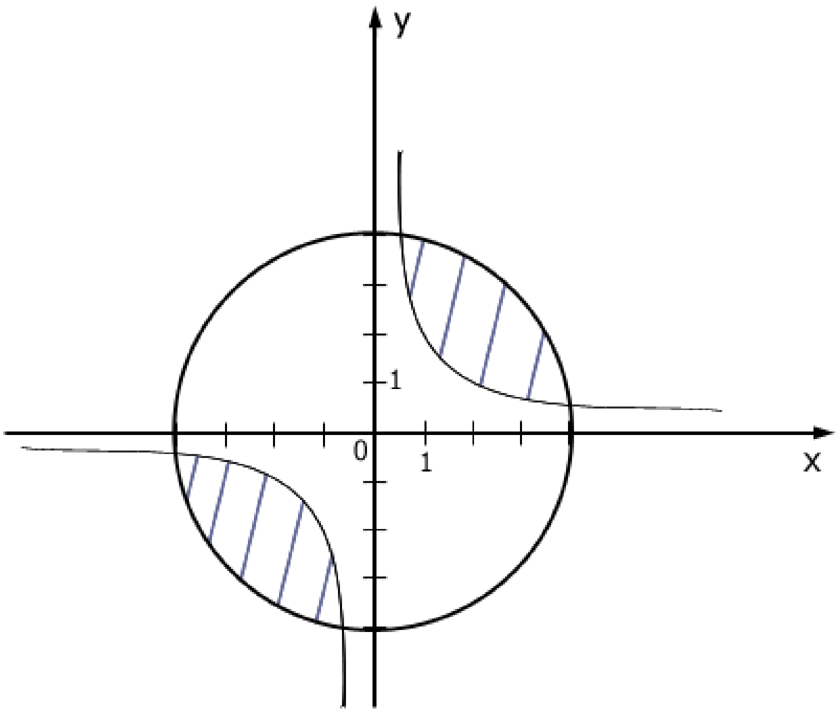


В каждой из полученных частей берём «пробную» точку с координатами $(x_0;y_0)$ и, подставляя эти координаты в неравенство (1), определяем его истинность. Например, подставляя координаты точки А (3;4), получим $(3 - 4)(4 - 2*3 - 1) = 3 > 0$ – верно.

Подобно тому, как точки разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет постоянным свой знак, так и линии в системе координат разбивают плоскость на части, в каждой из которых левая часть неравенства будет сохранять свой знак. Закрасим эти части плоскости. Решением неравенства будут являться координаты точек закрашенной части плоскости, включая границы (если неравенство строгое, то координаты точек, лежащих на построенных линиях, в ответ не включаются).

2) **Решим неравенство $(x^2 + y^2 - 16)(xy - 2) < 0$.**

Построим графики уравнений $x^2 - y^2 - 16 = 0$ (1) и $xy - 2 = 0$ (2) в системе координат. Графиком уравнения (1) является окружность с центром в начале координат и радиусом 4, графиком уравнения (2) – гипербола.



Методом пробных точек определяем, что решением неравенства являются координаты закрашенной части плоскости, не включая границы.

МБОУ ЛИЦЕЙ №4

М Е Т О Д   И Н Т Е Р В А Л О В

Учитель ВКК Назаренко Е.Я.

Учитель ВВК Борисова Е.А.

г.ВОРОНЕЖ

2012 г.

Т Е З И С Ы   С Т А Т Ь И

«МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ»

Метод интервалов – один из основных методов решения неравенств в школьном курсе математики. В работе приводится алгоритм метода и его обоснование. На конкретных примерах показано применение метода интервалов, начиная с решения несложных квадратных, дробно-рациональных неравенств и заканчивая неравенствами, содержащими тригонометрические логарифмические, показательные, иррациональные выражения и их комбинации.

Стать предназначена для обобщающего повторения при подготовке к экзаменам, в том числе ЕГЭ в 11 классе.

.

VI. Метод интервалов широко применяется не только в математике. Рассмотрим его применение при решении физической и экономической задач.

1) Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t)=-4t^2+22t$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее со времени броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 10 метров?

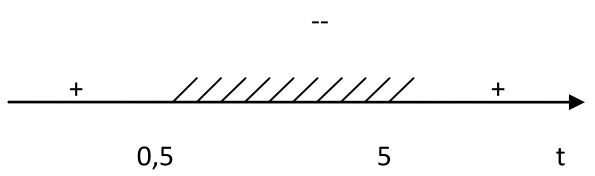
$$-4t^2+22t\geq 10,$$

$$2t^2-11t+5\leq 0$$

$$2(t-5)(t-0.5)\leq 0$$

где $t\geq 0$

Решим неравенство методом интервалов.



t є [0.5;5], следовательно, в течение 4,5 секунд (5-0,5=4,5) камень находился на высоте не менее 10 метров.

2) Для одного из предприятий зависимость объема спроса на продукцию q (единицу в месяц) от ее цены p (в тыс. руб.) задается формулой: q=450-25p. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц

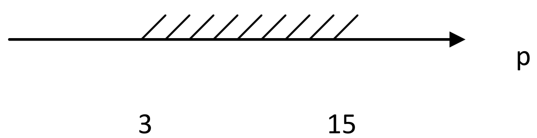
r=q*p будет составлять не менее 1125 тыс. рублей.

Составим и решим неравенство $(450-25p)*p \geq 1125$;

где $p>0$

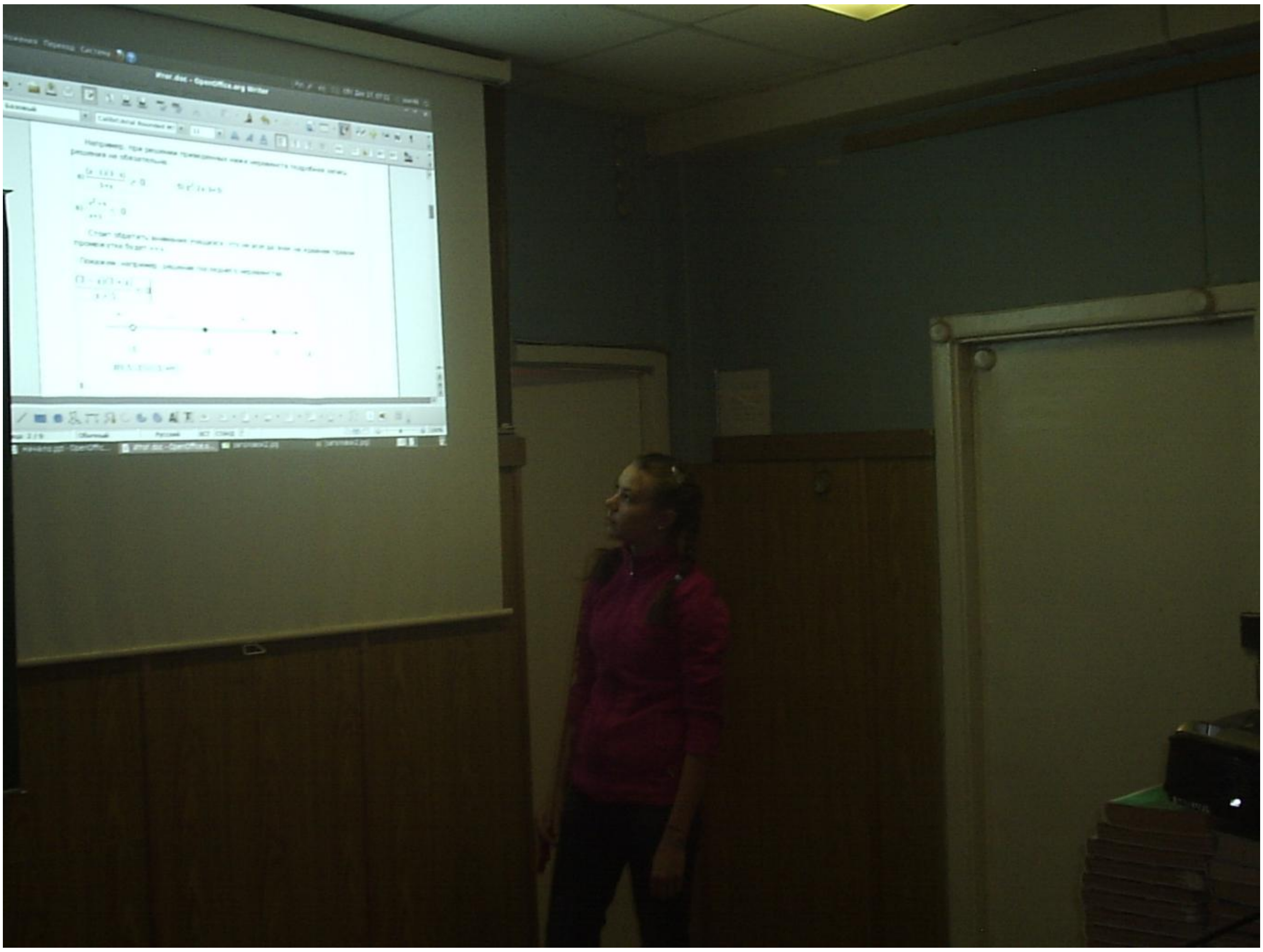
$p^2-18p+45\leq 0$;

$(p-5)(p-3)\leq 0$



p є [3;15]

Наибольший уровень цены p=15 (тыс. руб.).



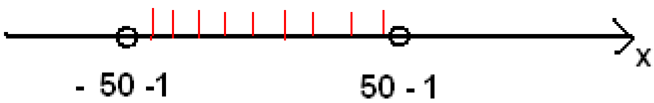
Метод интервалов может применяться и в информатике.

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(50 < X \cdot X) \rightarrow (50 > (X+1) \cdot (X+1))$$

Решение (вариант 1):

1) это операция импликации между двумя отношениями $A = (50 < X^2)$ и $B = (50 > (X+1)^2)$
2) попробуем сначала решить неравенства
   $A: 50 < X^2 \Rightarrow |X| > \sqrt{50}$, $B: 50 > (X+1)^2 \Rightarrow |X+1| < \sqrt{50}$
3) обозначим эти области на оси X:



$$-\sqrt{50} - 1 < x < \sqrt{50} - 1$$

4) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$; область истинности выделена зеленым цветом

6) поэтому наибольшее целое число, удовлетворяющее условию – это первое целое число, меньшее $\sqrt{50} \approx 7{,}1$, то есть, 7

таким образом, верный ответ – 7 .

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(10 < X \cdot (X+1)) \to (10 > (X+1) \cdot (X+2))$$

Решение (в целых числах):

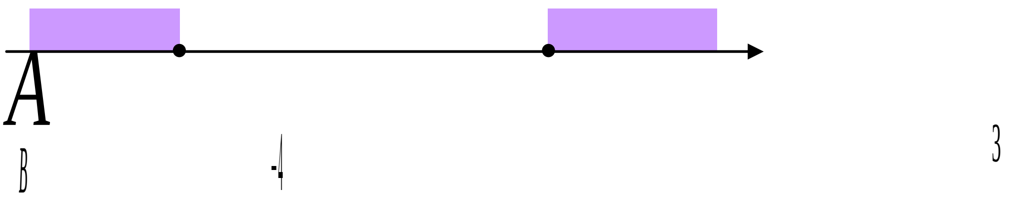
1) это операция импликации между двумя отношениями:

$A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ и $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$

2) конечно, здесь можно применить тот же способ, что и в предыдущем примере, однако при этом понадобится решать квадратные уравнения (*не хочется…*)
3) заметим, что по условию нас интересуют **только целые числа,** поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (как понятно из предыдущего примера, точные значения корней нас совершенно не интересуют!)
4) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
5) легко проверить, что в области $X \geq 0$ высказывание A_0 истинно при всех целых $X \geq 3$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \leq -4$ (чтобы не запутаться, удобнее использовать **нестрогие неравенства**, $\leq$ и $\geq$, вместо $<$ и $>$)
6) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение

$$A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$$

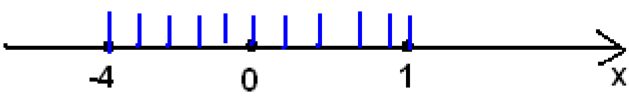
7) область истинности выражения A – объединение двух бесконечных интервалов:



8) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
9) в области $X \geq 0$ высказывание B_0 истинно при всех целых $X \leq 1$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \geq -4$, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение

$$B = (-4 \leq X) \cdot (X \leq 1)$$

10) область истинности выражения B – закрытый интервал



11) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

12) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A=1$ и $B=0$; область истинности выделена на рисунке зеленым цветом;

13) обратите внимание, что значение $X=3$ уже **не** входит в зеленую зону, потому что там $A=1$ и $B=0$, то есть импликация дает 0

14) по схеме видно, что максимальное целое число в зеленой области – 2

15) таким образом, верный ответ – 2.

Таким образом, мы рассмотрели применение метода интервалов при решении задач разных видов и рассмотрели особенности его применения, что принесет несомненную пользу при решении более сложных уравнений и подготовке к экзаменам.