Функция и параметр

(типовые задания С5)

 *Прокофьев А.А.* *Корянов А.Г.* 

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение…………………………..….	2
Глава 1. Функции, заданные в явном виде …………………………..	3
1.1. Область определения функции..	3
1.2. Непрерывность функции………	5
1.3. Дифференцируемость функции..	5
1.4. Нули функции…………………..	5
1.5. Промежутки знакопостоянства функции……………………………....	8
1.6. Четность, нечетность функции..	9
1.7. Периодичность функции………	10
1.8. Монотонность функции……….	10
1.9. Экстремум функции……………	12
1.10. Наибольшее (наименьшее) значение функции………………………	15
1.11. Множество значений функции	20
1.12. График функции………………	23
Упражнения	26
Глава 2. Применение свойств функции……………………………..	28
2.1. Выражения…..………………….	28
2.2. Уравнения………………………	30
2.3. Системы уравнений…………….	35
2.4. Неравенства……………………..	38
2.5. Системы неравенств…………....	41
Упражнения	44
Глава 3. Функции, заданные в неявном виде……………………….	47
3.1. Формула расстояния между точками……………...…...................	47
3.2. Уравнение прямой……………....	48
3.3. Уравнение окружности…............	52
3.4. Уравнение параллелограмма…..	63
Упражнения	66
Глава 4. Решение задач разными способами ……………………………	69
Ответы и указания…..………………	76
Список и источники литературы.....	78

Введение

Последние годы в вариантах ЕГЭ задание С5 – задача с параметром. В 2010 году процент выпускников, приступивших к ее выполнению, составил 11,8%, а в 2011 году – 12,1%. Задание С5 оценивается в 4 балла. В 2010 году от 1 до 4 баллов за задачу С5 смогли получить только 2,71% участников экзамена, а в 2011 – 6,02%.

При проверке задачи С5 выставление баллов производится в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Обоснованно найдены верные значения параметра, однако в ответ включены посторонние значения, полученные в других случаях, не соответствующих условию задачи (либо рассмотрены необходимые случаи, но значения параметра признано не подходящим условию задачи).	2
Решение содержит – или верное описание необходимых ситуаций в соответствии с условием задачи; – или верный переход к уравнениям (неравенствам) относительно параметра.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание С5 по своей постановке было алгебраическим, однако в процессе решения требовались функциональные и наглядно-геометри-ческие представления. Развитию и закреплению подобных представлений у учащихся и посвящено данное пособие.

Учащиеся основной школы при изучении линейной и квадратичной функций узнают, что изменение того или иного коэффициента в формуле, задающей функцию, влияет на изменение свойств этой функции. Таким образом, школьники уже готовы к восприятию термина «параметр» при изучении темы «Функции». Например, в формуле $y = ax + b$, задающей линейную функцию, имеется два параметра a и b, в формуле $y = ax^2 + bx + c$ – три параметра a, b и c.

Основной вопрос, связанный с функцией, заданной формулой, относится к изучению ее свойств и построению её графика. Поэтому первый тип задачи, который мы будем рассматривать, можно сформулировать следующим образом: исследовать свойства (область определения, монотонность и т.д.) функции $y = f(x, a)$ в зависимости от значений параметра a, принимающего допустимые числовые значения. Аналогично формулируются задачи для функций с несколькими параметрами.

Формулировки свойств функции в точке или на промежутке позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции. Например, при всех значениях t исследовать на монотонность функцию $y = x^2 - 5x + 6$ на промежутке $[t;\ t+2]$. Подобные задачи отнесем ко второму типу задач.

Третий тип рассматриваемых нами задач связан с наличием дополнительных условий на свойства функции (количество нулей функции, ограничение на наибольшее значение функции и т.д.).

Решение задач четвертого типа опирается непосредственно на определение свойства функции (непрерывность, дифференцируемость, экстремум).

Отметим некоторые особенности решения задач с параметрами выделенных типов.

1) Так как в дальнейшем в основном рассматриваются функции, заданные формулой, то все комментарии для выражений с параметрами переносятся и на функции с параметрами. Например, вид функции $y = ax^2 - 3x + 5$ зависит от параметра a: при $a \neq 0$ имеем квадратичную функцию, при $a = 0$ получаем линейную функцию $y = -3x + 5$.

2) Выражение $f(x,a)$ при каждом фиксированном значении параметра a задает функцию $y_a(x)=f(x,a)$, а при всех допустимых значениях параметра a – семейство функций. Наличие параметра в формуле означает задание семейства графиков функций на координатной плоскости Oxy. Например, функция $y=x^2+a$ задает семейство парабол, отличающихся от параболы $y=x^2$ смещением вдоль оси y на a единиц вверх при $a>0$, вниз – при $a<0$.
3) Одним из основных методов решения рассматриваемых задач является аналитический, приводящий данную задачу к решению уравнений или неравенств с параметрами.
4) Задачи по рассматриваемой теме позволяют широко применять графическую иллюстрацию, поэтому в некоторых случаях удобнее и эффективнее будет использование функционально-графических методов решения (на координатных плоскостях Oxy или Oxa).
5) В некоторых примерах на этапе аналитической записи ответа полезно одновременно приводить его изображение на координатной плоскости.

Перейдем теперь к рассмотрению задач, связанных с тем ли иным свойством функции.

Глава 1. Функции, заданные в явном виде

Если функция задана уравнением $y=f(x)$, разрешенным относительно y, то функция задана в явном виде (явная функция).

В первой главе будет рассмотрены задачи с параметрами, в формулировке которых фигурируют свойства функций.

Довольно часто задачу можно переформулировать и свести ее к уравнению, неравенству или системе уравнений (неравенств), для решения которых используют аналитический или функционально-графический способы (графическую интерпретацию). В последнем случае требуется обоснование, основанное на использовании свойств и графиков рассматриваемых функций.

1.1. Область определения функции

Уравнения, неравенства, системы, да и просто заданные функции, входящие в формулировку задач с параметрами, имеют свою область определения, и анализ условий, определяющих ее, часто является необходимой частью решения. Иногда подобный анализ позволяет существенно сократить количество рассматриваемых случаев, тем самым упростить решение задачи.

Говорят, что на числовом множестве X определена ***числовая функция*** $f(x)$, если каждому элементу x из этого множества поставлено в соответствие единственное число. Множество X называется ***областью определения*** функции и обозначают $D(f)$.

В задачах с параметром под областью определения уравнения, неравенства, системы, содержащие выражения вида $f(x,a)$, понимается множество всех упорядоченных пар чисел (x,a), каждая из которых такова, что после подстановки соответствующих значений x и a во все входящие в задачу выражения они будут определены.

Пример 1. *При всех значениях параметра a найти область определения функции*

$$y(x)=\frac{x-a}{3x+a}+\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Решение. Для функции $f(x)=\dfrac{x-a}{3x+a}$ областью определения является множество тех значений аргумента, для которых знаменатель дроби не обращается в нуль, т.е. $x\ne -a/3$. Функция $g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ определена на множестве тех значений x, для которых $a^2-x^2\ge 0$. Область определения функции $y(x)=f(x)+g(x)$ есть пересечение областей определения функций f и g, и, значит, она состоит из значений x, являющихся решениями смешанной системы:

$$\begin{cases}x\ne -a/3,\\ a^2-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -a/3,\\ (x-a)(x+a)\le 0.\end{cases}$$

Графическое решение системы представлено на рисунке 1. Условию задачи при каждом значении параметра a удовлетворяют все точки, лежащие на пересечении прямой $a=\text{const}$ с выделенной фоном областью на плоскости Oax.

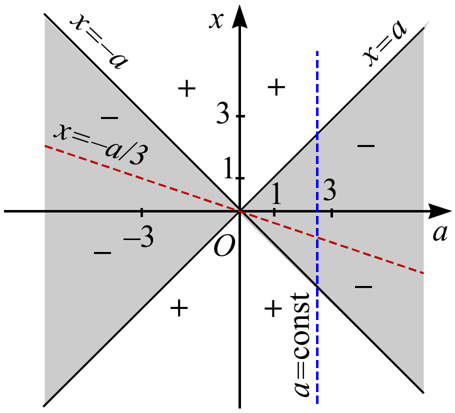


Рис. 1

Ответ. Если $a<0$, то $D(y)=[a;-a/3)\cup(-a/3;-a]$; если $a=0$, то $D(y)=\varnothing$; если $a>0$, то $D(y)=[-a;-a/3)\cup(-a/3;a]$.

Замечание. В данной задаче графическая интерпретация необязательна и представлена исключительно для демонстрации области определения функции на плоскости Oax.

Пример 2. (**ЕГЭ, 2003**). *Из области определения функции*

$$y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$$

взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения a, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

Решение. 1. Так как $D(\log_7)=R_+$, то имеем

$$a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}>0.$$

Отсюда, используя метод рационализации, получаем:

$$(a-1)\left(a-\frac{7x+4}{x+4}\right)>0,\ \text{где}\ a>0.$$

2. Обозначим $F(x;a)=(a-1)\left(a-\dfrac{7x+4}{x+4}\right)$.

График уравнения $F(x;a)=0$, состоящий из прямой $a=1$ (пунктирная линия) и гиперболы $a=\dfrac{7x+4}{x+4}$ (пунктирная линия), разбивает первый координатный угол ($a>0$ и переменная x принимает натуральные значения) на три области. Применяя метод областей, получаем необходимое множество точек плоскости: области D_1 и D_3 (см. рис. 2).

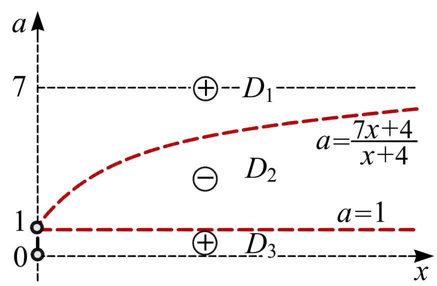


Рис. 2

3. Решим уравнение $a=\dfrac{7x+4}{x+4}$ относительно переменной x и найдем $x=\dfrac{4-4a}{a-7}$. При $0<a<1$ решением является промежуток $(0;+\infty)$, который содержит все натуральные числа. Эти зна-

чения параметра a не удовлетворяют условию задачи.

При $a>1$ решением является промежуток $\left(0;\dfrac{4-4a}{a-7}\right)$. Рассмотрим суммы: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; 1+2+3+4+5=15. Согласно условию задачи имеем неравенство $4<\dfrac{4-4a}{a-7}\le 5$. Так как $a-7<0$, то получаем

$$\begin{cases}4(a-7)>4-4a,\\ 4-4a\ge 5(a-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>4,\\ a\le\dfrac{13}{3}.\end{cases}$$

Ответ. $\left(4;4\dfrac{1}{3}\right]$.

1.2. Непрерывность функции

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $(a;b)$, называется ***непрерывной в точке*** $x_0\in(a;b)$, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) он равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Доказательство непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в проверке равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 3. *Найти все значения параметра a такие, что функция $f(x)$ является непрерывной на всей числовой прямой, если* $f(x)=\begin{cases}ax^2, \text{ при } x>2,\\ x+a^2-2, \text{ при } x\le 2.\end{cases}$

Решение. При $x>2$ функция $f(x)=ax^2$ – непрерывна при всех значениях x и $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4a$.

При $x\le 2$ функция $f(x)=x+a^2-2$ – непрерывна при всех значениях x и $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=a^2$.

Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на $\mathbf{R}$, если выполняется равенство $a^2=4a$, т.е. при $a=0$ или $a=4$.

Ответ. $a=0$ или $a=4$.

Напомним важное свойство непрерывной функции, которое будет использовано во второй главе: *если на отрезке* $[a;b]$ *наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции равны соответственно A и B, то для любого значения $C\in[A;B]$ найдется значение $c\in[a;b]$ такое, что $C=f(c)$*. Это означает, что множество значений непрерывной функции на отрезке $[a;b]$ будет весь отрезок $[A;B]$.

1.3. Дифференцируемость функции

Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в некотором промежутке, если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ конечна в каждой точке этого промежутка.

Отметим важное свойство дифференцируемой функции: *функция, дифференцируемая в точке* (*на промежутке*) *непрерывна в этой точке* (*на этом промежутке*).

Пример 4. *Найти все значения параметров a и b, при каждом из которых функция*

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ если } x\ge 1,\\ ax^2+bx, \text{ если } x<1\end{cases}$$

дифференцируема в точке $x=1$.

Решение. Так как функция дифференцируема в точке $x=1$, то она непрерывна в ней. Из условия непрерывности получаем первое равенство $a+b=1$. Для дифференцируемости функции в точке $x=1$ должно выполняться равенство $x'=(ax^2+bx)'$ при $x=1$, то есть $2a+b=1$. Решая систему двух уравнений, получим ответ $a=0$, $b=1$.

Ответ. $a=0$, $b=1$.

1.4. Нули функции

Нули функции $y_a(x)=f(x,a)$ – значения аргумента x, при которых выражение $f(x,a)=0$. Решением этого уравнения является значения x, в зависимости от a. При каждом фиксированном a количество нулей функции $y_a(x)$ равно количеству корней уравнения $f(x,a)=0$.

Геометрически *нуль функции* $y_a(x)$ *также как и в случае без параметра – это абсцисса точки пересечения графика функции* $y_a(x)$ *с осью* Ox.

Пример 5. Для *каждого значения параметра a найти все нули функции*

$$f(x) = ||5x| - 10| - 3x - a.$$

Решение. Переформулируем задачу: *для каждого значения a найти все решения уравнения*

$$||5x| - 10| - 3x = a.$$

Построим график функции (см. рис. 3)

$$a(x) = ||5x| - 10| - 3x = \begin{cases} -8x - 10, \text{ если } x \le -2, \\ 2x + 10, \text{ если } -2 \le x \le 0, \\ -8x + 10, \text{ если } 0 \le x \le 2, \\ 2x - 10, \text{ если } x \ge 2, \end{cases}$$

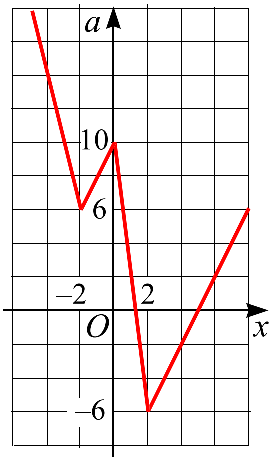


Рис. 3

который имеет точки «перелома»: $(-2;6)$, $(0;10)$ и $(2;-6)$.

Проводя прямые, параллельные оси x, определяем абсциссы (значение корней уравнения) общих точек с данным графиком.

Из рисунка видно, что при $a < -6$ данное уравнение не имеет корней. Для $a = -6$ уравнение имеет один корень $x = 2$. Если $-6 < a < 6$, то из двух уравнений $-8x + 10 = a$ и $2x - 10 = a$ получаем два корня $x = \frac{10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$. В случае $a = 6$ уравнение имеет три корня $x = -2$, $x = 0{,}5$ или $x = 8$. Если $6 < a < 10$, то имеем четыре корня $x = \frac{-10 - a}{8}$, $x = \frac{a - 10}{2}$, $x = \frac{10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$. В случае $a = 10$ уравнение имеет три корня $x = -2{,}5$, $x = 0$ или $x = 10$. При $a > 10$ получаем два корня $x = \frac{-10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$.

***Ответ*:** при $a < -6$ нет нулей функции; при $a = -6$ один нуль $x = 2$; при $-6 < a < 6$ два нуля $x = \frac{10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$; при $a = 6$ нули $x = -2$; $x = 0{,}5$; $x = 8$; при $6 < a < 10$ четыре нуля $x = \frac{-10 - a}{8}$, $x = \frac{a - 10}{2}$, $x = \frac{10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$; при $a = 10$ нули $x = -2{,}5$; $x = 0$; $x = 10$; при $a > 10$ два нуля функции $x = \frac{-10 - a}{8}$ или $x = \frac{10 + a}{2}$.

Пример 6. (МГУ, 2008). *Найти все значения параметра a, при которых функция*

$$f(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ *имеет не менее двух нулей.*

Решение. Переформулируем задачу: *найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ *имеет не менее двух корней.*

Приведем уравнение к виду

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0,$$

где функция $y = f(x) = x - \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$. Поэтому исходное уравнении имеет не менее двух корней на промежутке $(-\infty; -1)$ тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет два корня $y_{1,2} \in (-\infty; 0)$, т.е. когда

$$\begin{cases} a + 1 > 0 \\ 2a + 3 > 0 \\ (a+1)^2 - 4(2a+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ (a-a_1)(a-a_2) > 0 \\ a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \ a > 3+\sqrt{20}.$$

Ответ: $a > 3+2\sqrt{5}$.

Пример 7. **(МИОО, 2010)**. *Найти все значения a, при каждом из которых функция*

$$f(x) = 2\big|2|x| - a^2\big| - x + a$$

имеет ровно две различных точки перемены знака.

Решение. При $a = 0$ данная функция имеет вид $f(x) = 4|x| - x = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \ge 0, \\ -5x, \text{ если } x \le 0. \end{cases}$

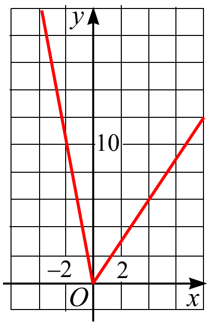


Рис. 4

Функция принимает значение 0 один раз при $x = 0$, при остальных значениях x положительна. График этой функции (см. рис. 4) состоит из частей прямых с угловыми коэффициентами 3 или –5.

Пусть $a \ne 0$, тогда данная функция имеет следующий вид

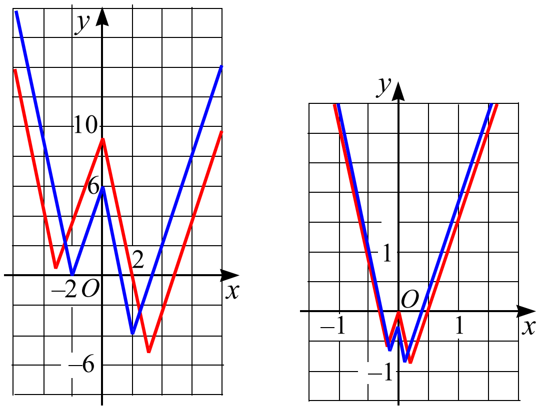
$$f(x) = \begin{cases} 4|x| - x - 2a^2 + a, \text{если } |x| \ge \dfrac{a^2}{2}, \\ -4|x| - x + 2a^2 + a, \text{если } |x| \le \dfrac{a^2}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -5x - 2a^2 + a, \text{если } x \le -\dfrac{a^2}{2}, \\ 3x - 2a^2 + a, \text{если } x \ge \dfrac{a^2}{2}, \\ 3x + 2a^2 + a, \text{если } -\dfrac{a^2}{2} \le x \le 0, \\ -5x + 2a^2 + a, \text{если } 0 \le x \le \dfrac{a^2}{2}. \end{cases}$$

График этой непрерывной функции состоит из частей прямых с угловыми коэффициентами 3 или –5, заданных на промежутках $\left(-\infty; -\dfrac{a^2}{2}\right]$, $\left[-\dfrac{a^2}{2}; 0\right]$, $\left[0; \dfrac{a^2}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a^2}{2}; +\infty\right)$.

Функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{a^2}{2}\right]$, возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{a^2}{2}; 0\right]$, убывает на промежутке $\left[0; \dfrac{a^2}{2}\right]$, возрастает на промежутке $\left[\dfrac{a^2}{2}; +\infty\right)$.

Функция имеет два минимума $f\left(-\dfrac{a^2}{2}\right) = -5\cdot\left(-\dfrac{a^2}{2}\right) - 2a^2 + a = \dfrac{a^2}{2} + a$ и $f\left(\dfrac{a^2}{2}\right) = 3\cdot\dfrac{a^2}{2} - 2a^2 + a = -\dfrac{a^2}{2} + a$, максимум $f(0) = 3\cdot 0 + 2a^2 + a = 2a^2 + a$. Так как $\dfrac{a^2}{2} + a > -\dfrac{a^2}{2} + a$ при $a \ne 0$, то для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнение следующих условий (см. рис. 5*а*, *б*):



а *б*

Рис. 5

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ne 0 \\ \dfrac{a^2}{2} + a \ge 0 \\ -\dfrac{a^2}{2} + a < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne 0 \\ 2a^2 + a \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ne 0 \\ a(a+2) \ge 0 \\ a(2-a) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne 0 \\ a(2a+1) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -2 \\ a > 2 \\ -0{,}5 \le a < 0 \end{array}\right.$$

Ответ. $a \le -2$; $-0{,}5 \le a < 0$; $a > 2$.

1.5. Промежутки знакопостоянства функции

Участки знакопостоянства функции $y_a(x)=f(x,a)$ при каждом фиксированном значении a совпадают с множествами решений неравенств $f(x,a)>0$ и $f(x,a)<0$.

Пример 8. *Найти все значения a, при каждом из которых функция*

$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$

принимает:
1) *только неотрицательные значения*;
2) *как положительные, так и отрицательные значения.*

Решение. 1) Для неравенства $f(x)\ge 0$ имеем $a\le x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|$. Построим график функции (см. рис. 6)

$$a(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|=$$

$$=\begin{cases}2x^2+2{,}5x-1, \text{ если } x\in(-\infty;-0{,}5]\cup[2;+\infty),\\ 5{,}5x+1, \text{ если } x\in[-0{,}5;2].\end{cases}$$

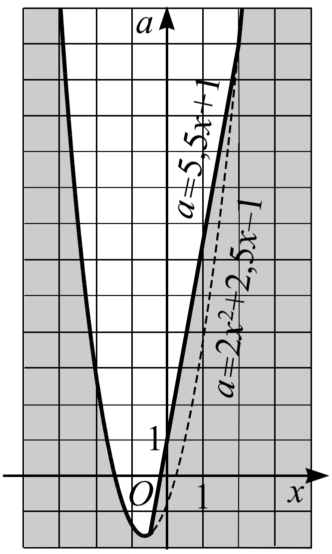


Рис. 6

На координатной плоскости Oxa выделим цветом множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a<x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству $f(x)>0$. Координаты точек незакрашенной области удовлетворяют неравенству $f(x)<0$.

На координатной плоскости Oxa выделим цветом множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a\le x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|.$$

Найдем наименьшее значение функции $a(x)$. Для этого сравним значения квадратного трехчлена $2x^2+2{,}5x-1$ при $x_{\text{в}}=-\frac{5}{8}$ и линейного двучлена $5{,}5x+1$ при $x=-0{,}5$:

$$2\left(-\frac{5}{8}\right)^2+2{,}5\left(-\frac{5}{8}\right)-1=-\frac{57}{32}=-1{,}78125$$

и

$$5{,}5(-0{,}5)+1=-1{,}75.$$

Таким образом, $a_{\text{наим.}}=-\frac{57}{32}$.

Прямые, параллельные оси x, полностью находятся в заштрихованной области при $a\le-\frac{57}{32}$.

2) Условие «функция принимает как положительные, так и отрицательные значения» графически интерпретируется следующим образом: прямые, параллельные оси x, пересекают как заштрихованную так и не заштрихованную области. Как видим из рисунка, это возможно при $a>-\frac{57}{32}$.

Ответ: 1) $a\le-\frac{57}{32}$;

2) $a>-\frac{57}{32}$.

1.6. Четность, нечетность функции

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ***нечетной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество X симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ***четной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество X симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Пример 9. *При каждом значении а исследовать на четность и нечетность функцию* $f(x) = (a-3)x + 2a - 4,\ x \in \mathbf{R}$.

Решение. Область определения функции симметрична относительно начала координат.

1. Для четности функции равенство $f(-x) = f(x)$, т.е. уравнение

$$-(a-3)x + 2a - 4 = (a-3)x + 2a - 4$$

должно выполняться при всех $x \in \mathbf{R}$. Отсюда получаем $a - 3 = 0$, $a = 3$.

2. Для нечетности функции равенство $f(-x) = -f(x)$, то есть уравнение

$$-(a-3)x + 2a - 4 = -(a-3)x - 2a + 4$$

должно выполняться при всех $x \in \mathbf{R}$. Отсюда получаем $-2a + 4 = 0$, $a = 2$.

Ответ: при $a = 3$ функция четная;
при $a = 2$ функция нечетная;
при $a \neq 2$, $a \neq 3$ функция общего вида.

Пример 10. *При каких значениях параметра a является нечетной функция*

$$f(x) = \frac{1}{2^x + a} + \frac{1}{2}?$$

Решение. Необходимым (но не достаточным) условием нечетности функции является выполнение при $x = 0$ одного из условий:

(а) $f(0) = 0$;

(б) функция f не определена в нуле.

При $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2} = \frac{a+3}{2(a+1)}.$$

Условие (а) выполняется при $a = -3$, а условие (б) – при $a = -1$.

Рассмотрим случай $a = -3$. Тогда $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 3} + \dfrac{1}{2}$. В этом случае область определения $D_f = (-\infty; \log_2 3) \cup (\log_2 3; +\infty)$ не является симметричной относительно точки $x = 0$. Следовательно, при $a = -3$ функция не может быть нечетной.

Если $a = -1$, то $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1} + \dfrac{1}{2}$ или $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2(2^x - 1)}$. В этом случае $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ симметрична относительно точки $x = 0$. Остается проверить выполнение условия $f(-x) = -f(x)$. Действительно,

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2(2^{-x} - 1)} = \frac{1/2^x + 1}{2\left(1/2^x - 1\right)} = \frac{2^x + 1}{2(1 - 2^x)} =$$

$$= -\frac{2^x + 1}{2(2^x - 1)} = -f(x).$$

Следовательно, при $a = -1$ функция $f(x)$ нечетная.

Ответ. $a = -1$.

Пример 11. (**МГУ**, **мех-мат**, **2007**, устный экзамен). *При каких значениях параметра а функция*

$$f(x) = (a - x)5^{x+7+4a} - (a + x)5^{a^2 - x - 5}$$

является нечетной?

Решение. Данная функция определена при всех значениях $x \in \mathbf{R}$.

Если функция $f(x)$ является нечетной, то выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ или $f(-x) + f(x) = 0$ при всех допустимых значениях x. В частности при $x = 0$ получаем $f(0) = 0$.

Для функции

$$f(x) = (a - x)5^{x+7+4a} - (a + x)5^{a^2 - x - 5}$$

имеем

$$f(0) = a(5^{7+4a} - 5^{a^2-5}) = 0,$$

поэтому либо $a=0$, но в этом случае функция $f(x)=-x(5^{x+7}+5^{-x-5})$ не является нечетной (докажите самостоятельно), либо

$$7+4a=a^2-5 \;\Leftrightarrow\; (a-6)(a+2)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=6, \end{array}\right.$$

причем обе соответствующие этим значениям параметра функции

$$f(x)=(6-x)5^{x-1}-(6+x)5^{-x-1}$$

и

$$f(x)=(-2-x)5^{31+x}-(-2+x)5^{31-x}$$

являются нечетными (докажите самостоятельно).

Ответ. $-2;\,6$.

1.7. Периодичность функции

Функция $y=f(x)$, $x\in X$, называется ***периодической*** на X, если существует число T, $T\neq 0$, называемое периодом функции $f(x)$, такое, что:

(а) числа $x+T$ и $x-T$ принадлежат X для каждого $x\in X$;

(б) для каждого $x\in X$ имеет место равенство $f(x+T)=f(x)$.

Если T – период функции, то ее периодом будет также и число kT, где k – любое целое число.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом их суммы, произведения, разности и частного является число T, кратное T_1 и T_2.

Пример 12. *При каждом значении a исследовать на периодичность функцию* $f(x)=(a+5)x+3a,\ x\in\mathbf{R}$.

Решение. Пусть T – период данной функции, то есть для всех значений $x\in\mathbf{R}$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ или уравнение

$$(a+5)(x+T)+3a=(a+5)x+3a.$$

Отсюда получаем $a=-5$, то есть функция постоянная, периодом которой является любое ненулевое число.

Ответ. При $a=-5$ функция периодическая; при $a\neq -5$ не периодическая.

Пример 13. (**ЛЭТИ**). *При каких значениях параметра а число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции* $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

Решение. Число $\frac{\pi}{2}$ является периодом данной функции, если для всех допустимых значениях x выполняется равенство

$$\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}=\frac{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{3a+\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}=\frac{\cos 2x}{-3a+\sin 2x}.$$

Отсюда получаем

$3a+\sin 2x=-3a+\sin 2x$ или $a=0$.

В этом случае функция имеет вид $f(x)=\mathrm{ctg}2x$, причем, если $2x_0\in D(f)$, то $2\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)=2x_0+\pi\in D(f)$.

Ответ. 0.

1.8. Монотонность функции

Напомним, что если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b), то $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ при $x\in(a,b)$. Это необходимые условия возрастания (убывания) функции на интервале (a,b).

Достаточные условия монотонности $f(x)$: если $f'(x)>0$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале; если $f'(x)<0$ – убывает.

Для доказательства строгого возрастания (убывания) функции на каком – либо промежутке достаточно проверить, что $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ на этом промежутке и для всех точек, кроме их конечного числа, $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$.

Пример 14. *При каждом значении параметра а исследовать на монотонность функцию*

$$f(x)=2x^3+(9-3a)x^2-18ax+5.$$

Решение. Найдем производную

$f'(x)=6x^2+(18-6a)x-18a=6(x+3)(x-a)$.

Пусть $a>-3$, тогда неравенство $(x+3)(x-a)\ge 0$ выполняется на множестве $(-\infty;-3]\cup[a;+\infty)$, а неравенство $(x+3)(x-a)\le 0$ – на промежутке $[-3;a]$.

Если $a<-3$, то неравенство $(x+3)(x-a)\ge 0$ выполняется на множестве $(-\infty;a]\cup[-3;+\infty)$, а неравенство $(x+3)(x-a)\le 0$ – на промежутке $[a;-3]$.

Для $a=-3$ производная $6(x+3)^2\ge 0$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

Ответ. Функция при $a<-3$ убывает на $[a;-3]$ и возрастает на промежутках $(-\infty;a]$ и $[-3;+\infty)$; при $a>-3$ убывает на $[-3;a]$ и возрастает на $(-\infty;-3]$ и $[a;+\infty)$; при $a=-3$ возрастает на $\mathbf{R}$.

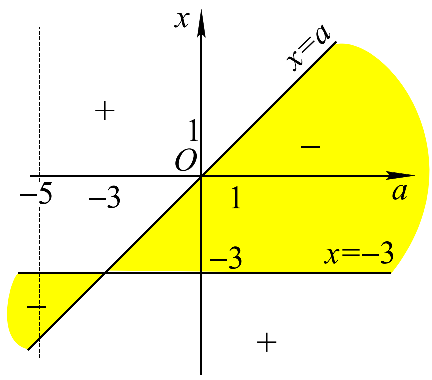


Рис. 7

Замечание. Иллюстрация ответа (см. рис. 7) дополнительно демонстрирует метод областей при решении выше приведенных неравенств. Например, при $a=-5$ неравенство $f'\ge 0$ выполняется на множестве $(-\infty;-5]\cup[-3;+\infty)$, а неравенство $f'\le 0$ – на промежутке $[-5;-3]$.

Пример 15. *При каких значениях параметра a функция* $y(x)=\sin x-ax$ *убывает на всей числовой прямой?*

Решение. Функция $y(x)=\sin x-ax$ дифференцируема на $\mathbf{R}$. Ее производная равна $y'(x)=\cos x-a$. Функция убывает на всей числовой прямой, если для всех x выполняется условие $y'\le 0$ или $\cos x\le a$. Это возможно, если $a\ge 1$.

Если $a=1$, то $\cos x=1$ при $x=2\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$. При переходе через эти точки производная не меняет знака. Следовательно, функция монотонно убывает на всей числовой прямой.

Ответ. $a\ge 1$.

Пример 16. *Найти все значения p такие, что функция* $y=-x^3+3x+5$ *убывает на интервале* $(p;\,p+0{,}5)$.

Решение. Функция $y=-x^3+3x+5$ определена и дифференцируема на $\mathbf{R}$. Ее производная равна

$$y'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1).$$

Функция убывает, если выполняется условие $y'(x)\le 0$. Неравенство $-3(x-1)(x+1)\le 0$ справедливо при $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. Следовательно, функция убывает на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$. Интервал $(p;\,p+0{,}5)$ целиком попадает в один из промежутков убывания, если либо $p+0{,}5\le -1$, либо $p\ge 1$, т.е. при $p\in(-\infty;-1{,}5]\cup[1;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;-1{,}5]\cup[1;+\infty)$.

Пример 17. *При каких значениях параметра a функция*

$$f(x)=x^3+ax^2-(2a-3)x+5$$

возрастает на $[2;+\infty)$?

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

Найдем её производную

$$f'(x)=3x^2+2ax-2a+3.$$

Условие задачи будет выполняться в следующих двух случаях:

1) уравнение $3x^2+2ax-2a+3=0$ имеет не более одного корня, т.е. дискриминант $D=a^2+6a-9\le 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3-3\sqrt{2}\le a\le -3+3\sqrt{2}$;
2) оба корня этого уравнения не больше 2, что равносильно системе

$$\begin{cases} D\ge 0,\\ f'(2)\ge 0,\\ x_{\text{в}}<2; \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+6a-9\ge 0,\\ 12+4a-2a+3\ge 0,\\ -\dfrac{a}{3}<2; \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\ge -3+3\sqrt{2}.$$

Объединяя полученные значения параметра, запишем ответ.

Ответ: $a \ge -3-3\sqrt{2}$.

Пример 18. (ЕГЭ, 2010). *Найти наименьшее значение параметра* a, *при котором функция*

$$y = 9 + 7x - 3|ax+2| + |ax+5| + |x+1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Решение. Функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax+2| + |ax+5| + |x+1|$$

определена на всей числовой прямой. Пусть $a < 0$. Данная функция при каждом значении параметра a является кусочно-линейной. Точки $-1, -\frac{2}{a}, -\frac{5}{a}$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция является линейной. В таблице представлены знаки подмодульных выражений на каждом из промежутков.

	$(-\infty;-1)$	$\left(-1;-\frac{2}{a}\right)$	$\left(-\frac{2}{a};-\frac{5}{a}\right)$	$\left(-\frac{5}{a};+\infty\right)$
$x+1$	–	+	+	+
$ax+2$	+	+	–	–
$ax+5$	+	+	+	–

При раскрытии модулей получаем:
если $x < -1$, то y задается формулой

$$y = 9 + 7x - 3ax - 6 + ax + 5 - x - 1 = \\ = (6-2a)x + 7;$$

если $-1 \le x < -\frac{2}{a}$, то

$$y = 9 + 7x - 3ax - 6 + ax + 5 + x + 1 = \\ = (8-2a)x + 9;$$

если $-\frac{2}{a} \le x < -\frac{5}{a}$, то

$$y = 9 + 7x + 3ax + 6 + ax + 5 + x + 1 = \\ = (8+4a)x + 21;$$

если $x \ge -\frac{5}{a}$, то

$$y = 9 + 7x + 3ax + 6 - ax - 5 + x + 1 = \\ = (8+2a)x + 11.$$

Для того чтобы функция не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все полученные значения угловых коэффициентов прямых были неотрицательными. Получаем систему

$$\begin{cases} a < 0, \\ 6-2a \ge 0, \\ 8-2a \ge 0, \\ 8+4a \ge 0, \\ 8+2a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 \le a < 0.$$

Отсюда получаем наименьшее значение параметра, равное -2. Так как по условию задачи нужно найти наименьшее значение a, то случай $a \ge 0$ рассматривать не нужно.

Ответ. -2.

1.9. Экстремум функции

Критическая точка – это внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует.

Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума***. ***Экстремумом функции*** называется ее значение в точках локального минимума или максимума.

Критические точки – это точки, проверяемые на экстремум. Для выяснения наличия в данной точке экстремума надо исследовать знак производной функции в точках, близких критической и находящихся слева и справа от нее. Если производная функции меняет знак с «плюса» на «минус», то в этой точке достигается максимум, а если с «минуса» на «плюс» – минимум.

Пример 19. *При каждом значении параметра* a *исследовать на экстремумы функцию*

$$f(x) = 2x^3 + (9-3a)x^2 - 18ax + 5.$$

Решение. В примере 14 показано исследование данной функции на монотонность.

Если $a < -3$, то производная функции (см. рис. 7) при переходе через точку $x = a$ меняет знак с плюса на минус, а через точку $x = -3$ – с минуса на плюс. Значит, при $a < -3$ функция имеет максимум $f_{\max} = f(a) = -a^3 - 9a^2 + 5$ и минимум $f_{\min} = f(-3) = 27a + 32$.

Аналогично, используя рисунок, запишем ответ для других значений a.

Ответ. При $a < -3$ функция имеет два экстремума: максимум $f_{\max} = f(a) = -a^3 - 9a^2 + 5$ и минимум $f_{\min} = f(-3) = 27a + 32$; при $a > -3$ функция имеет два экстремума: максимум $f_{\max} = f(-3) = 27a + 32$ и минимум $f_{\min} = f(a) = -a^3 - 9a^2 + 5$; при $a = -3$ функция возрастает на **R** и не имеет экстремумов.

Пример 20. *При каких значениях параметра a максимум функции*

$$y(x) = x^3 - 3(a-7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$$

достигается в точке, абсцисса которой положительна?

Решение. Если точка x_0 – точка максимума, то x_0 – корень уравнения $y'(x) = 0$ или $3x^2 - 6(a-7)x + 3(a^2 - 9) = 0$ и при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус.

Найдем корни уравнения

$$x^2 - 2(a-7)x + (a^2 - 9) = 0.$$

При $58 - 14a > 0$ или $a < 29/7$ имеем

$x_1 = (a-7) - \sqrt{58 - 14a}$ и $x_2 = (a-7) + \sqrt{58 - 14a}$.

Так как коэффициент при x^3 положительный, то левый экстремум есть точка максимума. Решим неравенство $x_1 > 0$, т.е.

$$a - 7 > \sqrt{58 - 14a} \qquad (*).$$

Так как должно выполняться условие $a < \dfrac{29}{7}$, то неравенство (*) не имеет смысла, поскольку левая его часть отрицательна, а правая неотрицательна. Следовательно, неравенство (*) не имеет решений.

Ответ. Таких a не существует.

Пример 21. *При каких значениях a точка $x_0 = a$ является точкой минимума функции $y(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 1$?*

Решение. Если $x_0 = a$ является точкой минимума, то $x_0 = a$ есть корень уравнения $y'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 0$ и при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс. Найдем корни уравнения $x^2 - (a+1)x + a = 0$.

Имеем $x_1 = 1$ и $x_2 = a$, т.е. $x_0 = a$ является точкой экстремума (см. рис. 8*а*, *б*) и $y' = (x-1)(x-a)$. Правая из точек экстремума есть точка минимума. Следовательно, при $a > 1$ точка $x_0 = a$ является точкой минимума функции.

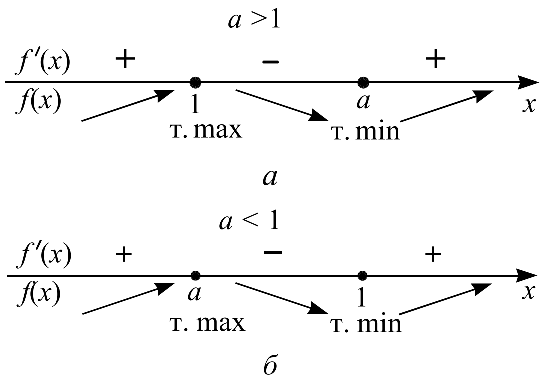


Рис. 8

Ответ. $a > 1$.

Пример 22. *Найти все a, при которых минимум функции*

$$f(x) = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$$

меньше 2.

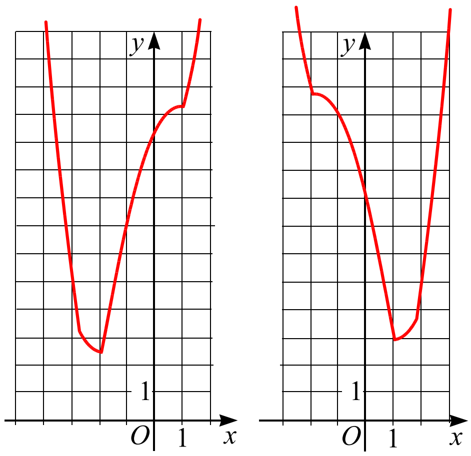
Решение. Точки -2, 1 и a разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых при раскрытии знаков модулей функция $f(x)$ совпадает с одной из следующих квадратичных функций:

$$f(x) = x^2 + 4x - 3a - 2,$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 3a - 2,$$
$$f(x) = -x^2 + 2x - 3a + 2,$$
$$f(x) = -x^2 - 4x + 3a + 2.$$

График каждой из них – парабола с вершиной либо в точке $x = -2$, либо в точке $x = 1$. Данная функция на промежутке $[-2;1]$ имеет вид $f(x) = -x^2 + bx + c$, а вне этого промежутка – $f(x) = x^2 + dx + e$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ убывает на промежутке

$(-\infty;-2]$ и возрастает на промежутке $[1;+\infty)$, и может иметь минимум только в одной из точек промежутка $[-2;1]$.

Если точка $x=a$ не принадлежит интервалу $(-2;1)$, то график функции будет иметь одну параболу на отрезке $[-2;1]$ (см. рис. 9*а* и 9*б*) и функция имеет минимум либо в точке $x=-2$, либо в точке $x=1$.



а *б*

Рис. 9

Рис. 9*в*

Пусть точка $x=a$ принадлежит интервалу $(-2;1)$, тогда график данной функции содержит две пересекающиеся параболы (см. рис. 9*в*) на этом промежутке, и функция имеет минимум в точке $x=a$.

Получаем условия:

$$\left[\begin{array}{l} f(-2)<2, \\ f(1)<2, \\ f(a)<2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3|-2-a|<2, \\ 3|1-a|<2, \\ \begin{cases} -a^2-a+2<2, \\ -2<a<1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2/3<a+2<2/3, \\ -2/3<a-1<2/3, \\ \begin{cases} a^2+a>0, \\ -2<a<1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{8}{3}<a<-1, \\ 0<a<\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ. $a\in\left(-\dfrac{8}{3};-1\right)\cup\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Пример 23. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых функция*

$$f(x)=x^2-|x-a^2|-9x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение. Данная функция имеет следующий вид

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x-a^2, \text{если } x\le a^2, \\ x^2-10x+a^2, \text{если } x\ge a^2. \end{cases}$$

График этой функции (см. рис. 10) состоит из частей парабол, заданных на промежутках $(-\infty;a^2]$ и $[a^2;+\infty)$. Функция $g(x)=x^2-8x-a^2$ имеет минимум при $x=4$, а функция $h(x)=x^2-10x+a^2$ имеет минимум при $x=5$. В точке экстремума меняется характер монотонности функции (см. рис. 10), поэтому данная функция будет иметь еще один экстремум, если выполняется условие $4<a^2<5$, $2<|a|<\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}<a<-2$ или $2<a<\sqrt{5}$.

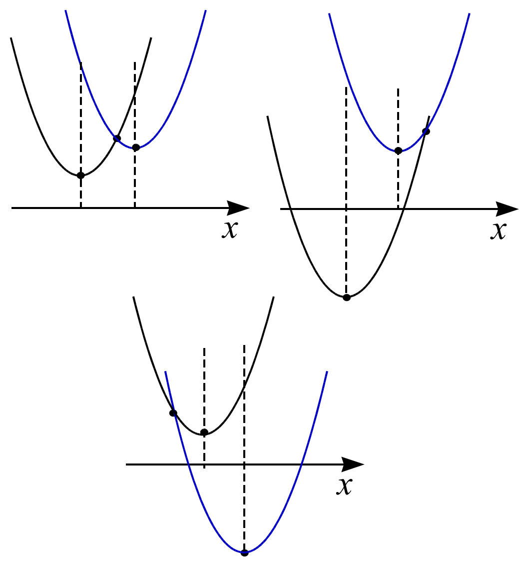


Рис. 10

Замечание. Можно предложить такое рассуждение. Функция $g(x)=x^2-8x-a^2$ задает семейство парабол с координатами вершины $(4;-16-a^2)$, а функция

$h(x)=x^2-10x+a^2$ задает семейство парабол с координатами вершины $(5;-25+a^2)$. Условие задачи выполняется, если имеет решение система неравенств:

$$\begin{cases} g(5)>h_{\text{в}} \\ h(4)>g_{\text{в}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15-a^2>-25+a^2 \\ -24+a^2>-16-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2<5 \\ a^2>4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5}<a<-2, \\ 2<a<\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\sqrt{5}<a<-2;\ 2<a<\sqrt{5}.$

1.10. Наибольшее (наименьшее) значение функции

Для определения наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке используется теорема Вейерштрасса: *функция, непрерывная на отрезке* $[a;b]$, *имеет наибольшее и наименьшее значения, которые достигаются либо в критических точках, либо на концах отрезка.*

Для определения наибольшего и наименьшего значений функций на незамкнутом промежутке используется теорема: *если функция, непрерывная на интервале* $(a;b)$, *имеет в этом интервале только одну точку экстремума – точку* x_1 *и, если* x_1 *– точка максимума, то* $f(x_1)$ *– наибольшее значение функции* $f(x)$ *на интервале* $(a;b)$*; если* x_1 *– точка минимума, то* $f(x_1)$ *– наименьшее значение функции* $f(x)$ *на интервале* $(a;b)$.

Если существует точка x_0 из множества M, $M\subseteq D(f)$, такая, что при любом x из множества M имеет место неравенство

$$f(x)\ge f(x_0)\ \ (f(x)\le f(x_0)),$$

то говорят, что функция $y=f(x)$ на множестве M принимает свое ***наименьшее*** (***наибольшее***) значение $f(x_0)$.

Если функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$, то наименьшее (наибольшее) значение она принимает в точке $x=a$, а наибольшее (наименьшее) значение – в точке $x=b$.

Пример 24. *Найти наибольшее значение функции* $f(x)=x^4-6ax^2+a^2$ *на отрезке* $[-2;1]$ *в зависимости от параметра а.*

Решение. Найдем производную функции $f'(x)=4x^3-12ax=4x(x^2-3a)$. Для исследования знаков значений производной используем метод областей. Для этого на координатной плоскости Oxa изобразим график уравнения $4x(x^2-3a)=0$, состоящий из прямой $x=0$ и параболы $a=\dfrac{x^2}{3}$. Эти линии разбивают координатную плоскость на четыре области (см. рис. 11), в каждой из которых значение выражения $F(x;a)=4x(x^2-3a)$ имеет постоянный знак. Для определения знака выберем контрольную точку (2;0): $F(2;0)=4\cdot 2(4-0)=32; 32>0$. Далее используя свойство знакочередования значений выражения, расставляем знаки в остальных областях. Теперь исследуем смену знака производной.

Если $a\le 0$, то при переходе через точку $x=0$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому $x=0$ есть точка минимума. Наибольшее значение функции $f(x)$ достигается либо в точке $x=-2$, либо в точке $x=1$. В силу четности функции $f(x)$ на $\mathbf{R}$ и возрастания на промежутке $[0;+\infty)$ имеем $f(-2)=f(2)>f(1)$. Значит, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=a^2-24a+16.$

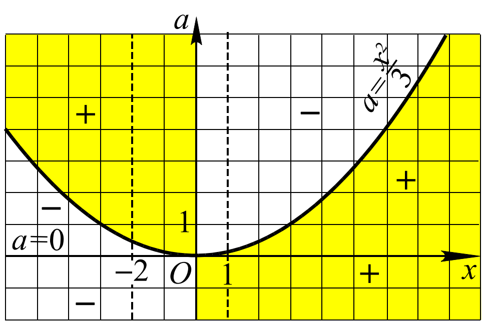


Рис. 11

Пусть $a>0$, тогда функция $f(x)$ имеет точку максимума $x=0$ и две точки минимума $x=\sqrt{3a}$, $x=-\sqrt{3a}$ (см. рис. 11). В силу четности функции $f(x)$ на $\mathbf{R}$

и убывания на промежутке $[0;\sqrt{3a}]$ получаем $f(0)>f(\sqrt{3a})=f(-\sqrt{3a})$. Сравним значения $f(0)=a^2$, $f(-2)=$ $=a^2-24a+16$ и $f(1)=a^2-6a+1$.

$$1. \begin{cases} f(0)\ge f(-2), \\ f(0)\ge f(1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge a^2-24a+16, \\ a^2\ge a^2-6a+1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge \dfrac{2}{3}, \\ a\ge \dfrac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad a\ge \frac{2}{3}.$$

$$2. \begin{cases} f(-2)\ge f(0), \\ f(-2)\ge f(1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-24a+16\ge a^2, \\ a^2-24a+16\ge a^2-6a+1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\le \dfrac{2}{3}, \\ 0<a\le \dfrac{5}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<a\le \frac{2}{3}.$$

$$3. \begin{cases} f(1)\ge f(0), \\ f(1)\ge f(-2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+1\ge a^2, \\ a^2-6a+1\ge a^2-24a+16, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\le \dfrac{1}{6}, \\ a\ge \dfrac{5}{6}, \end{cases} \text{Нет решений.}$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ. Если $a\le \dfrac{2}{3}$, то

$$\max_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=a^2-24a+16;$$

если $a\ge \dfrac{2}{3}$, то $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(0)=a^2$.

Пример 25. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y(x)=2a\sin x+(a^2-1)\cos x.$$

Решение. Преобразуем выражение, используя метод введения вспомогательного аргумента.

Заметим, что $\sqrt{4a^2+(a^2-1)^2}=a^2+1$.

$$y(x)=2a\sin x+(a^2-1)\cos x=$$

$$=(a^2+1)\left(\frac{2a}{a^2+1}\sin x+\frac{a^2-1}{a^2+1}\cos x\right)=$$

$$=(a^2+1)(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)=$$

$$=(a^2+1)\sin(x+\alpha),$$

где $\alpha=\arccos\dfrac{2a}{a^2+1}$. Так как наибольшее значение $\sin(x+\alpha)$ равно 1, а наименьшее значение равно -1, то, следовательно, наибольшее значение функции $y(x)=2a\sin x+(a^2-1)\cos x$ равно a^2+1, а наименьшее равно $-(a^2+1)$. Точек, где принимаются наибольшее и наименьшее значения, бесконечно много.

Ответ. $y_{\text{наим.}}=-(a^2+1)$, $y_{\text{наиб.}}=a^2+1$.

Пример 26. *При каких положительных значениях a наименьшее значение функции $y(x)=x\sqrt{x+a}$ равно $-6\sqrt{3}$?*

Решение. $D(y)=[-a;+\infty)$. Функция $y(x)=x\sqrt{x+a}$ дифференцируема при $x>-a$ и

$$y'(x)=\sqrt{x+a}+\frac{x}{2\sqrt{x+a}}=\frac{3x+2a}{2\sqrt{x+a}}.$$

При $x=-\dfrac{2a}{3}$ имеем $y'(x)=0$. Если $-a<x<-\dfrac{2a}{3}$, то производная отрицательна, а если $x>-\dfrac{2a}{3}$, то положительна. Следовательно, $x_0=-\dfrac{2a}{3}$ – точка минимума. На отрезке $\left[-a;-\dfrac{2a}{3}\right]$ функция является убывающей (см. рис. 12).

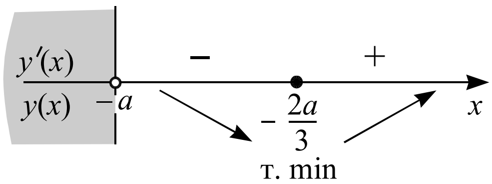


Рис. 12

Найдем значение функции в точке $x_0=-\dfrac{2a}{3}$; имеем $y(x_0)=-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$. Решим уравнение $-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=-6\sqrt{3}$. После возведения в квадрат обеих его частей получим $\frac{4}{27}a^3 = 108$ или $a = 9$.

Ответ. $a = 9$.

Пример 27. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых наибольшее значение функции*

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-8; 7]$ *не принимается ни на одном из концов этого отрезка.*

Решение. 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой, и имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 11a, \text{ если } x \geq a, \\ x^2 + 10x - 11a, \text{ если } x \leq a. \end{cases}$$

2. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 12$ при $x > a$ и $f'(x) = 2x + 10$ при $x < a$. Отметим, что в точке $x = a$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 12 = 2x + 10$ не выполняется ни при каком значении x. Производная функции не существует в точке $x = a$ и может равняться нулю в точках $x = -5$ и $x = 6$ при соответствующем расположении их относительно $x = a$.

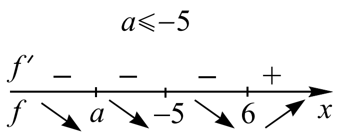


Рис. 13*а*

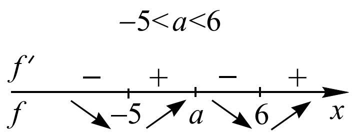


Рис. 13*б*

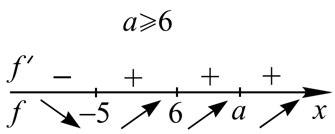


Рис. 13*в*

Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (см. рис. 13) и характер поведения функции на каждом из промежутков числовой прямой, на которые точки $x = a$, $x = -5$ и $x = 6$ ее разбили.

3. Условию задачи удовлетворяет только случай $-5 < a < 6$, соответствующий рис. 13*б*, при выполнении условий

$$\begin{cases} f(-8) < f(a), \\ f(7) < f(a) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-8)^2 + 10 \cdot (-8) - 11a < a^2 - a, \\ (7)^2 - 12 \cdot (7) + 11a < a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 16 > 0, \\ a^2 - 12a + 35 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+8)(a+2) > 0, \\ (a-5)(a-7) > 0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $-5 < a < 6$ получаем $-2 < a < 5$.

Ответ. $-2 < a < 5$.

Для решения следующих задач сформулируем несколько утверждений, полезных при решении задач (их обоснование проведите самостоятельно).

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке и $f_{\text{наим}}$ ее наименьшее значение на этом промежутке. Тогда:

1) условие того, что наименьшее значение функции $f(x)$ больше числа c равносильно тому, что неравенство $f(x) > c$ <u>выполняется при всех x из этого промежутка</u>;

2) условие того, что наименьшее значение функции $f(x)$ меньше числа c равносильно тому, что неравенство $f(x) < c$ <u>выполняется хотя бы при одном значении x из этого промежутка</u>;

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке и $f_{\text{наиб}}$ ее наибольшее значение на этом промежутке. Тогда:

3) условие того, что наибольшее значение функции $f(x)$ меньше числа c равносильно тому, что неравенство $f(x) < c$ <u>выполняется при всех x из этого промежутка</u>;

4) условие того, что наименьшее значение функции $f(x)$ больше числа c равносильно тому, что неравенство $f(x) > c$ <u>выполняется хотя бы при одном значении x из этого промежутка.</u>

Пример 28. *Найти все значения a, при которых наибольшее значение функции*

$$y = 2\,|\,x + a + 1\,| - |\,2x - a\,|$$

меньше 2.

Решение. При любом раскрытии знаков модулей функция является линейной, причем на левом и на правом крайних интервалах функция имеет вид постоянной функции $y = -3a - 2$ и $y = 3a + 2$ соответственно. На промежуточном интервале функция ограничена, поэтому функция может принимать наибольшее значение на крайних интервалах. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} 3a + 2 < 2, \\ -3a - 2 < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a > -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $-\dfrac{4}{3} < a < 0.$

Пример 29. (**МИОО**, **2010**). *Найти все такие a, что наименьшее значение функции*

$$f(x) = 4|x - a| + |x^2 + 2x - 3|$$

меньше 4.

Решение. Переформулируем задачу: *найти все такие a, что неравенство*

$$4\,|\,x - a\,| + |\,x^2 + 2x - 3\,| - 4 < 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Перепишем неравенство

$$|\,x - a\,| < 1 - \frac{1}{4}|\,x^2 + 2x - 3\,|.$$

График непрерывной функции

$$g(x) = 1 - \frac{1}{4}|\,x^2 + 2x - 3\,| =$$

$$= \begin{cases} -0{,}25x^2 - 0{,}5x + 1{,}75, \text{ если } x \in (-\infty; -3] \cup \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cup [1; +\infty), \\ 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 0{,}25, \text{ если } x \in [-3; 1] \end{cases}$$

состоит из частей парабол. Формула $y_a(x) = |\,x - a\,|$ задает семейство функций, графики которых получаются из графика функции $y = |\,x\,|$ сдвигом на a единиц вдоль оси Ox. Для решения задачи необходимо найти те промежутки, на которых имеются точки графика $y_a(x) = |\,x - a\,|$, расположенных ниже графика $g(x)$.

На рис. 14 отмечены три пограничных положения графика $y_a(x) = |\,x - a\,|$.

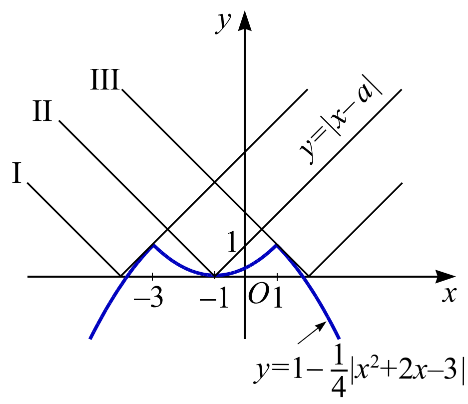


Рис. 14

Если $a = -1$, то графики имеют одну общую точку. Аналитически это можно показать, решив на промежутке $[-3; 1]$ уравнение

$$|\,x + 1\,| = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 0{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\,x + 1\,| = 0{,}25\,|\,x + 1\,|^2.$$

Другие граничные значения a найдем из условий касания графиков:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g'(x_0) = -1, \\ y_a(x_0) = g(x_0), \end{cases} \\ \begin{cases} g'(x_0) = 1, \\ y_a(x_0) = g(x_0) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -0{,}5x_0 - 0{,}5 = -1, \\ y_a(x_0) = g(x_0), \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5x_0 - 0{,}5 = 1, \\ y_a(x_0) = g(x_0) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_a(1) = g(1), \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -3, \\ y_a(-3) = g(-3) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\,1 - a\,| = 1, \\ |\,3 + a\,| = 1. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем значения $a = -4$ или $a = 2$, для которых $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. Теперь из рисунка 14 получаем искомые промежутки: $(-4; -1) \cup (-1; 2)$.

Ответ. $(-4; -1) \cup (-1; 2)$.

Пример 30. *Найти все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции*

$$f(x)=4ax+|x^2-8x+7|$$

больше 1.

Решение. Переформулируем задачу: *найти все такие значения а, что неравенство*

$$4ax+|x^2-8x+7|>1 \iff$$
$$\iff 4ax>1-|x^2-8x+7|$$

имеет решение при всех значениях $x\in\mathbf{R}$.

При этих условиях график функции $g(x)=4ax$ расположен выше графика функции $f(x)=1-|x^2-8x+7|$ при всех значениях $x\in\mathbf{R}$.

Построим график функции (см. рис. 15)

$$f(x)=1-|x^2-8x+7|=$$
$$=\begin{cases}-x^2+8x-6, \text{если } x\in(-\infty;1]\cup[7;+\infty),\\ x^2-8x+8, \text{если } x\in[1;7].\end{cases}$$

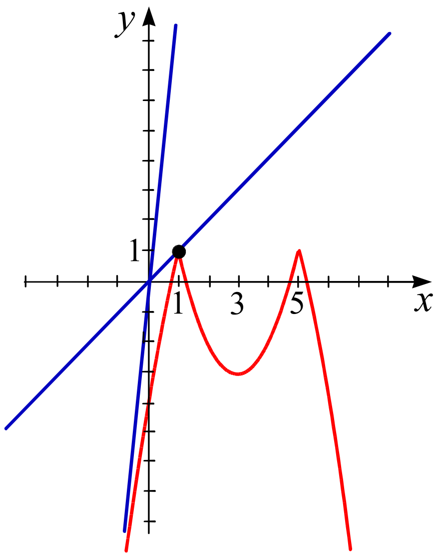


Рис. 15

Функция с параметром $g(x;a)=4ax$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат (пучок прямых с центром (0; 0)).

На рисунке 15 отмечены две прямые из этого пучка, каждая из которых расположена не ниже графика функции $f(x)$ и имеет с ним одну общую точку. Первая прямая проходит через точку (1; 1), поэтому получаем угловой коэффициент первой прямой $k_1=4a=1$.

Вторая прямая касается графика функции $y=-x^2+8x-6$, заданной при $x\in(-\infty;1)$. Из условия касания найдем угловой коэффициент второй прямой:

$$\begin{cases}y'(x_0)=k=4a,\\ y(x_0)=g(x_0),\end{cases} \iff \begin{cases}-2x_0+8=4a,\\ -x_0^2+8x_0-6=4ax_0,\end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases}x_0=-\sqrt{6},\\ k=4a=8+2\sqrt{6}.\end{cases}$$

Отсюда имеем угловой коэффициент второй прямой $k_2=4a=8+2\sqrt{6}$.

Условию задачи удовлетворяют все прямые $g(x;a)=4ax$, для которых выполняется неравенство $k_1<k<k_2$, $1<4a<8+2\sqrt{6}$, $\frac{1}{4}<a<\frac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{4}<a<\frac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Пример 31. (ЕГЭ, 2012). *Найти все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции*

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве $1\le|x|\le3$ *не меньше* 6.

Решение. Формулу, с помощью которой задана функция, приведем к виду $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$. Функция $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{a}{2}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{a}{2};+\infty\right)$, в точке $x=-\frac{a}{2}$ имеет минимум, равный $2-2a$.

1. Пусть точка минимума $-\frac{a}{2}<-3$, т.е. $a>6$, тогда наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $[-3;-1]\cup[1;3]$ равно $f(-3)=a^2-14a+38$.

Согласно условию задачи имеем

$$\begin{cases}a>6,\\ a^2-14a+38\ge6\end{cases} \iff a\ge7+\sqrt{17}.$$

2. Если точка минимума $-\frac{a}{2} > 3$, т.е. $a < -6$, тогда наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $[-3;-1] \cup [1;3]$ равно $f(3) = a^2 + 10a + 38$.

Согласно условию задачи имеем

$$\begin{cases} a < -6, \\ a^2 + 10a + 38 \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow a < -6.$$

3. Для точки минимума $-1 < -\frac{a}{2} < 1$, т.е. при $-2 < a < 2$, наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $[-3;-1] \cup [1;3]$ равно $f(-1) = a^2 - 6a + 6$ или $f(1) = a^2 + 2a + 6$.

Согласно условию задачи имеем

$$\begin{cases} -2 < a < 2, \\ a^2 - 6a + 6 \geq 6 \\ a^2 + 2a + 6 \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

4. Пусть для точки минимума выполняются условия $-3 \leq -\frac{a}{2} \leq -1$ или $1 \leq -\frac{a}{2} \leq 3$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} 2 \leq a \leq 6, \\ -6 \leq a \leq -2 \end{array}\right..$$

В этом случае наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $[-3;-1] \cup [1;3]$ равно $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2 - 2a$.

Согласно условию задачи имеем

$$\begin{cases} 2 - 2a \geq 6, \\ \left[\begin{array}{l} 2 \leq a \leq 6, \\ -6 \leq a \leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq a \leq -2.$$

Объединяя полученные значения параметра, получим ответ.

Ответ. $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [7 + \sqrt{17}; +\infty)$.

1.11. Множество значений функции

Множеством значений функции $f(x)$ (обозначается $E(f)$) называется множество всех $a \in \mathbf{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = a$.

Замечание. Знание области значений функции оказывается полезным при решении уравнений и неравенств в следующих случаях.

(1) Уравнение $f(x) = a$ имеет решение, если $a \in E(f)$;

(2) Неравенство:

• $f(x) \geq a$ ($f(x) > a$) имеет решение, если найдется $b \in E(f)$ такое, что $b \geq a$ ($b > a$);

• $f(x) \leq a$ ($f(x) < a$) имеет решение, если найдется $b \in E(f)$ такое, что $b \leq a$ ($b < a$).

(3) Уравнение $f(x,a) = g(x,a)$ имеет решение, если $E(f) \cap E(g) \neq \varnothing$. В случае, когда $f(x,a) \geq M$, а $g(x,a) \leq M$ для всех допустимых значений x и a, то

$$f(x,a) = g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a) = M, \\ g(x,a) = M. \end{cases}$$

Последнее свойство (ограниченность левой и правой частей) используется и при решении или доказательстве неравенств.

Пример 32. *Найти множество значений функции* $f(x) = \sqrt{\log_a \cos x}$.

Решение. Область определения функции $f(x)$ задается неравенством $\log_a \cos x \geq 0$, которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < \cos x \leq 1 \end{cases} \text{(I) и } \begin{cases} a > 1, \\ \cos x \geq 1. \end{cases} \text{(II)}$$

Для системы (I) при $0 < a < 1$ получаем $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Соответственно, на этих промежутках функция $f(x)$ будет принимать все значения из промежутка $[0; +\infty)$, так как для любого $M > 0$ найдется x такое, что будет выполняться равенство

$$\log_a \cos x = M \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = a^M.$$

Для системы (II) получаем

$\cos x \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, при $a > 1$.

Отсюда при каждом $k \in \mathbf{Z}$ получаем $f(2\pi k) = \sqrt{\log_a \cos 2\pi k} = \sqrt{\log_a 1} = 0$. Таким образом, множество значений данной функции состоит из одного числа 0.

Ответ. При $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{1\}$ функция не определена; при $0 < a < 1$ $E(f) = [0;\ +\infty)$; при $a > 1$ $E(f) = \{0\}$.

Пример 33. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых множество значений функции*

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$$

лежит на интервале $(-3;3)$.

Решение. Условие задачи приводит к неравенству вида

$$-3 < \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3.$$

Так как квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ принимает положительные значения при всех значениях *x*, то приходим к двойному неравенству

$$-3(x^2 + x + 1) < x^2 - ax + 1 < 3(x^2 + x + 1),$$

затем к системе

$$\begin{cases} 4x^2 + (3-a)x + 4 > 0, \\ 2x^2 + (3+a)x + 2 > 0. \end{cases}$$

Для выполнения неравенств при всех значениях *x* необходимо и достаточно поставить условия на дискриминанты D_1 и D_2 квадратных трехчленов $4x^2 + (3-a)x + 4$ и $2x^2 + (3+a)x + 2$ соответственно:

$$\begin{cases} D_1 = (3-a)^2 - 64 < 0, \\ D_2 = (3+a)^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a-3| < 8, \\ |a+3| < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < a-3 < 8, \\ -4 < a+3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < a < 11, \\ -7 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < a < 1.$$

Ответ: $-5 < a < 1$.

Пример 34. (МГУ, 1999). *Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции*

$$f(x) = \frac{3x + p}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит полуинтервал $(-1;3]$. *Определить при каждом таком p множество значений функции* $f(x)$.

Решение. Обозначим $f(x) = y$ и рассмотрим какие значения принимает переменная *y*.

Значение $y = 0$ получаем при $x = -\dfrac{p}{3}$, причем $x^2 + 5x + 7 > 0$ при всех значениях *x*. Пусть $y \ne 0$. Из равенства $y = \dfrac{3x + p}{x^2 + 5x + 7}$ получаем квадратное уравнение

$$yx^2 + (5y - 3)x + 7y - p = 0,$$

которое имеет решение, когда дискриминант $D(y) = (5y-3)^2 - 4y(7y - p) \ge 0$. Получаем квадратное неравенство

$$3y^2 + y(30 - 4p) - 9 \le 0.$$

Таким образом, множество $E(f)$ значений функции f – отрезок между корнями квадратного трехчлена $g(y) = 3y^2 + y(30-4p) - 9$ (по теореме Виета произведение этих корней равно -3, так что корни имеют разные знаки, и отрезок между ними всегда содержит точку $y = 0$, которую на время исключили).

Отрезок $E(f)$ содержит полуинтервал $(-1;3]$ в том и только том случае, если

$$\begin{cases} g(-1) \le 0 \\ g(3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - (30 - 4p) - 9 \le 0 \\ 27 + 3(30 - 4p) - 9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p \le 9 \\ p \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow p = 9.$$

При $p = 9$ имеем $g(y) = 3(y^2 - 2y - 3) \le 0$, причем $g(-1) = g(3) = 0$ и $E(f) = [-1;3]$.

Ответ: $p = 9$; $E(f) = [-1;\ 3]$.

Пример 35. (**МГУ**, **2005**). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция*

$$f(x)=\frac{4\sin x+a}{4a-2\sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0;1]$.

Решение. Выполнив замену $\sin x=t$, приходим к такой переформулировке задачи: *при каких значениях параметра a уравнение* $y=\dfrac{4t+a}{4a-2t}$ *имеет корень на отрезке* $[-1;1]$ *для любого* $y\in[0;1]$?

Решая это уравнение относительно t, получаем $t=2a-\dfrac{9a}{2(y+2)}=f(y)$. Значение $a=0$ не удовлетворяет условию. При $a\neq 0$ функция $f(y)$ монотонно возрастает на отрезке $[0;1]$, а t при этом принимает значения от $f(0)=-\dfrac{a}{4}$ до $f(1)=\dfrac{a}{2}$. Из условия $|t|\le 1$ получаем систему неравенств

$$\begin{cases}\left|\dfrac{a}{4}\right|\le 1,\\ \left|\dfrac{a}{2}\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}|a|\le 4,\\ |a|\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\quad -2\le a\le 2.$$

С учетом ограничения $a\neq 0$ получаем ответ.

Ответ: $(-2;0)\cup(0;2)$.

Пример 36. *Найти все значения параметра a, для которых отрезок* $[1;2]$ *принадлежит области значений функции* $f(x)=\dfrac{x+1}{4x^2-a}$.

Решение. Определим значения параметра a, при которых функция будет принимать значения 1 и 2. Это условие соответствует тому, что система уравнений

$$\begin{cases}f(x)=1,\\ f(x)=2\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{x+1}{4x^2-a}=1,\\ \dfrac{x+1}{4x^2-a}=2\end{cases}$$

будет иметь решение.

На области допустимых значений, заданной условием $4x^2-a\neq 0$, последняя система равносильна следующей

$$\begin{cases}4x^2-x-a-1=0,\\ 8x^2-x-2a-1=0.\end{cases}$$

Первое уравнение последней системы имеет решение при $D_1=17+16a\ge 0$, т.е. при $a\ge-\dfrac{17}{16}$, а второе уравнение – при $D_2=33+64a\ge 0$, т.е. при $a\ge-\dfrac{33}{64}$. Следовательно, при $a\ge-\dfrac{33}{64}$ числа 1 и 2 будут принадлежать множеству $E(f)$ и соответственно приниматься:

значение 1 в точках $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17+16a}}{8}$;

значение 2 в точках $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{33+64a}}{16}$.

Так как при $a<0$ функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $x\in\mathbf{R}$, то все $a\in\left(-\dfrac{33}{64};0\right)$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ $E(f)=\left[-\dfrac{1}{16};+\infty\right)$ (убедитесь в этом самостоятельно), т.е. $a=0$ также удовлетворяет условию задачи.

При $a>0$ функция $f(x)$ имеет две точки разрыва $x=-\sqrt{\dfrac{a}{4}}$ и $x=\sqrt{\dfrac{a}{4}}$. Покажем, что отрезок $[1;2]$ принадлежит множеству значений функции на промежутке $\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}};+\infty\right)$. Рассмотрим значения

$$x_2=\frac{1+\sqrt{17+16a}}{8}=\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{17}{64}+\frac{a}{4}}>\sqrt{\frac{a}{4}}$$ и

$$x_3=\frac{1+\sqrt{33+64a}}{16}=\frac{1}{16}+\sqrt{\frac{33}{256}+\frac{a}{4}}>\sqrt{\frac{a}{4}}$$

такие, что $f(x_2)=1$, а $f(x_3)=2$.

В силу непрерывности функции на рассматриваемом промежутке функция

$f(x)$ принимает все значения из отрезка $[f(x_2); f(x_3)]$, т.е. из отрезка $[1;2]$.

Ответ: $a \ge -\dfrac{33}{64}$.

Пример 37. (МИОО, 2010). *Найти все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции* $y = \dfrac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ *есть ровно одно целое число.*

Решение. Функция определена и непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$. Выделим целую часть $y = 1 - \dfrac{2x + 6 - a}{6 + x^2}$. Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, для этого достаточно выполнения условия $2x + 6 - a = 0$ или $x = \dfrac{a-6}{2}$.

Теперь поставим условия, при которых множество значений данной функции содержатся в промежутке (0; 2) при всех значениях $x \in \mathbf{R}$.

$$0 < 1 - \frac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < -\frac{2x + 6 - a}{6 + x^2} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -6 - x^2 < -2x - 6 + a < 6 + x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} D_1 = 1 - a < 0 \\ D_2 = 1 - 12 + a < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 1 \\ a < 11 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a < 11.$$

Ответ: $1 < a < 11$.

1.12. График функции

График функции – один из основных (наряду с таблицей, формулой, алгоритмом) способов задания функции: множество точек плоскости с прямоугольными координатами $(x; y)$, где $y = f(x)$ – функция от x из области определения этой функции.

Пример 38. *Построить график функции* $f(x) = |x^2 - 5|x| + 4|$ *и с его помощью определить множество значений, принимаемых функцией в двух, трех и более точках; а также определить максимальное число корней уравнения* $f(x) = a$.

Решение. Имеем $f(x) = |x^2 - 5|x| + 4| =$

$$= \begin{cases} |x^2 - 5x + 4|, \text{ если } x \ge 0, \\ |x^2 + 5x + 4|, \text{ если } x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} |(x - 2{,}5)^2 - 2{,}25|, \text{ если } x \ge 0, \\ |(x + 2{,}5)^2 - 2{,}25|, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований строим графики функции $f(x) = |(x - 2{,}5)^2 - 2{,}25|$ $(\varGamma_{x^2} \to \varGamma_{(x-2,5)^2} \to \varGamma_{(x-2,5)^2-2,25} \to \varGamma_{|(x-2,5)^2-2,25|})$ и берем его часть при $x \ge 0$. Аналогично для функции $f(x) = |(x + 2{,}5)^2 - 2{,}25|$ при $x < 0$ (см. рис. 16).

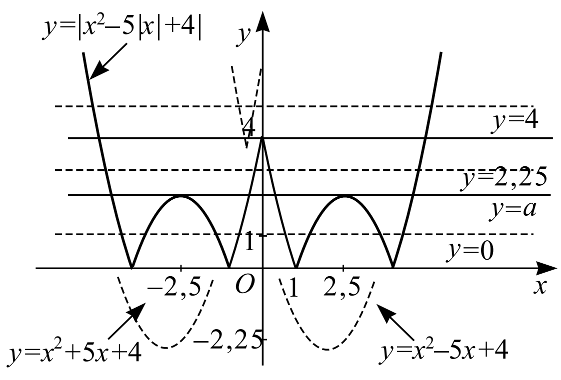


Рис. 16

Проводя прямые $y = a$, убеждаемся, что при $a < 0$ они не имеют общих точек с графиком функции $f(x)$; при $a = 0$ имеют четыре общие точки; при $0 < a < 2{,}25$ – восемь; при $a = 2{,}25$ – шесть; при $2{,}25 < a < 4$ – четыре; при $a = 4$ – три; при $a > 4$ – две.

Ответ. $E(f)=[0;+\infty)$; значение 0 принимается в четырех точках; каждое значение из интервала (0; 2,25) – в восьми; значение 2,25 – в шести; каждое значение из интервала (2,25; 4) – в четырех; значение 4 – в трех; все остальные – при двух различных значениях x. Максимальное число корней равно восьми.

Пример 39 (МИОО, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых график функции* $f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$ *пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.*

Решение. Данная задача может быть переформулирована следующим образом: *найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение* $x^2-|x^2+2x-3|=a$ *имеет более двух корней.*

Или по-другому: *график функции* $g(x)=x^2-|x^2+2x-3|$ *имеет с прямой* $y_a=a$ *более двух общих точек.*

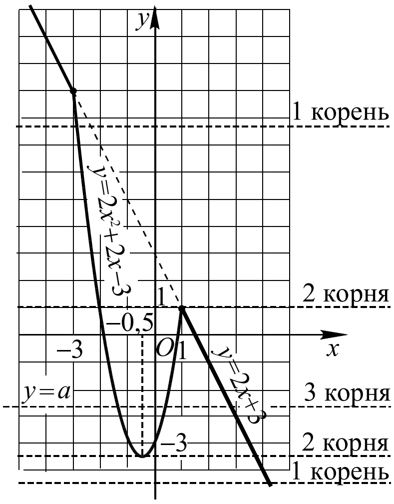


Рис. 17

Раскрывая модули в выражении, стоящем в левой части уравнения, получим

$$g(x)=x^2-|x^2+2x-3|=$$
$$\begin{cases}-2x+3, \text{ если } x\le -3 \text{ или } x\ge 1,\\ 2(x+0{,}5)^2-3{,}5, \text{ если } -3<x<1.\end{cases}$$

Построив на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (см. рис. 17), замечаем, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней при выполнении условий $-3{,}5<a<1$.

Ответ. $-3{,}5<a<1$.

В следующей задаче используются условия касания графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, вытекающие из того, что в точках касания графиков совпадают значения их ординат и графики имеют общую касательную, т.е. совпадают значения производных от функций в точке касания. Отсюда следует, что абсциссы точек касания графиков могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f'(x)=g'(x).\end{cases} \qquad (*)$$

Пример 40. (МИЭТ). *При каких значениях параметров* p *и* q *парабола* $y=2x^2+px+q$ *касается прямых* $y=12x-11$ *и* $y=8x-5$?

Решение. Пусть прямая l_1, заданная уравнением $y=8x-5$, касается параболы $y=2x^2+px+q$ в точке M_1 с координатами $(x_1;y_1)$ (см. рис. 18).

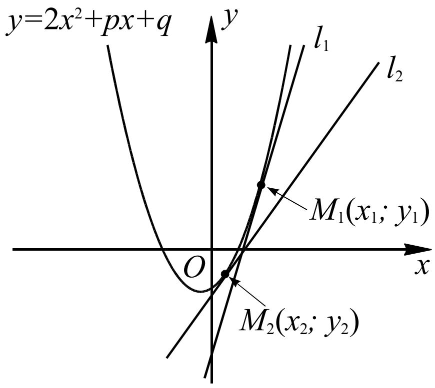


Рис. 18

Тогда значение производной $(2x^2+px+q)'=4x+p$ при $x=x_1$ будет равно угловому коэффициенту прямой $4x_1+p=8$ и так как M_1 – точка касания, то $2x_1^{\,2}+px_1+q=8x_1-5$.

Пусть точка M_2 с координатами $(x_2;y_2)$ – точка касания параболы $y=2x^2+px+q$ с прямой l_2, заданной уравнением $y=12x-11$. Тогда получаем два уравнения $4x_2+p=12$ и $2x_2^{\,2}+px_2+q=12x_2-11$ по аналогии с предыдущим случаем.

Объединим полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + p = 8, & (1) \\ 4x_2 + p = 12, & (2) \\ 2x_1^2 + px_1 + q = 8x_1 - 5, & (3) \\ 2x_2^2 + px_2 + q = 12x_2 - 11. & (4) \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $x_1 - x_2 = -1$ или $x_1 = x_2 - 1$. Теперь вычтем из третьего уравнения системы четвертое:

$$2(x_1^2 - x_2^2) + p(x_1 - x_2) = 8x_1 - 12x_2 + 6$$

или

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + p(x_1 - x_2) = 8x_1 - 12x_2 + 6.$$

Подставляя в полученное уравнение $x_1 - x_2 = -1$, $x_1 = x_2 - 1$ и $p = 12 - 4x_2$, придем к уравнению

$$-2(x_2 - 1 + x_2) - (12 - 4x_2) = 8(x_2 - 1) - 12x_2 + 6$$

Откуда получаем $x_2 = 2$. Тогда $p = 4$ и $q = 12x_2 - 11 - 2x_2^2 - px_2 = -3$.

Ответ. $p = 4$, $q = -3$.

Пример 41. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат имеет нечетное число общих точек с графиком функции*

$$f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)\,|\,x - a\,|.$$

Решение. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой, и имеет вид:

а) $f(x) = -x^2 + 3(a-2)x + 3a$ при $x \geq a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \dfrac{3a}{2} - 3$;

б) $f(x) = x^2 + ax - 3a$ при $x \leq a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -\dfrac{a}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a, f(a))$, где $f(a) = 2a^2 - 3a$.

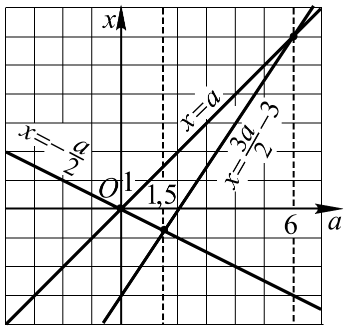


Рис. 19

На рис. 19 представлено взаимное расположение чисел $-\dfrac{a}{2}$, a, $\dfrac{3a}{2} - 3$ на координатной оси Ox при каждом значении параметра a. Прямые $a = 0$, $a = 1{,}5$ и $a = 6$, соответствующие точкам пересечения изображенных прямых, разбивают ось параметра a на четыре промежутка. Отсюда следует, что необходимо рассмотреть четыре случая взаимного расположения парабол.

На рис. 20*а*, *б*, *в*, *г* представлены все возможные виды графика функции $f(x)$ (сплошная линия). Условию задачи удовлетворяет только случай, соответствующий значениям $a \leq 0$ (см. рис. 20*а*).

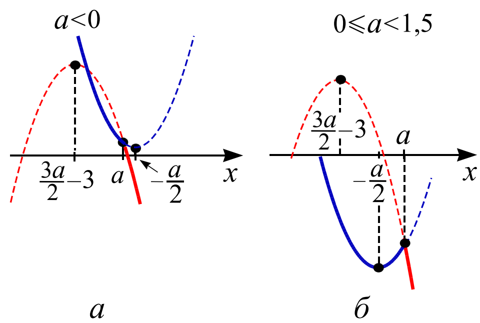


Рис. 20

В этом случае прямая, перпендикулярная оси ординат, будет иметь одну общую точку с графиком функции $f(x)$.

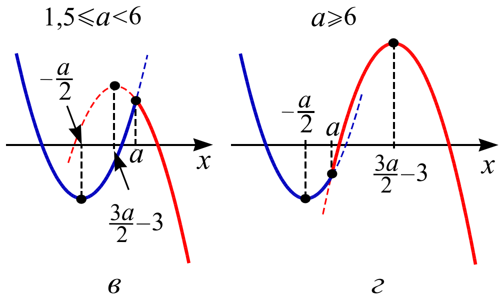


Рис. 20

В остальных случаях найдутся значения параметра, при которых будет две общие точки с графиком функции, т.е. четное число.

Ответ. $a \le 0$.

Упражнения

1. (ЕГЭ, 2003). В области определения функции $y = \log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения *a*, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 16.

2. (ЕГЭ, 2003). Найдите все значения *a*, при которых область определения функции

$$y = \left(a^{x+0,5} + \sqrt{x}\cdot a^4 - x^{0,5+x\log_x a} - a^{4,5}\right)^{0,5}$$

содержит ровно одно целое число.

3. (МАИ). Найдите все действительные значения a, при которых область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4+\sin x)}$$

совпадает с множеством всех действительных чисел.

4. Найдите все значения параметра a такие, что функция $f(x)$ является непрерывной на всей числовой прямой, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-a}, \text{ если } x \ne a, \\ \dfrac{1}{4}, \text{если } x = a. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = 2\left|2|x| - a^2\right| - x + a$$

имеет ровно три нуля.

6. Для каждого значения параметра a определите количество нулей функции $f(x) = |x^2 + 2x - 3| - a$ и найдите их.

7. (**МГУ**, **мех-мат**, **2007**, устный экзамен). При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = (x+a)3^{x-2+a^2} - (x-a)3^{8-x-3a}$$

является четной?

8. (**ЛЭТИ**). Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 5^x + \dfrac{25}{5^x}$. При каком значении a функция $y = f(x+a)$ является четной?

9. (**МГИ**). Найдите наименьшее положительное значение параметра a, при котором является нечетной функция $f(x) = 3ax^3 - 2\sin\dfrac{8\pi a - x}{5}$.

10. (**ЛЭТИ**). При каких значениях параметра a, число $\dfrac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \dfrac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$.

11. При каком наибольшем значении b функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 3bx - 1$ возрастает на всей числовой оси?

12. (**ЕГЭ**, **2010**). Найдите наибольшее значение параметра a, при котором функция

$y = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |ax + a - 6| + |x + 4|$

является неубывающей на всей числовой прямой.

13. Найдите наименьшее значение параметра a при котором функция $y = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 25| + |x - 7|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

14. При каком наибольшем отрицательном значении a функция $y = \sin\left(25x + \dfrac{a\pi}{100}\right)$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

15. При каком наименьшем положительном значении a функция $y = \cos\left(24x + \dfrac{a\pi}{25}\right)$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

16. (ЕГЭ, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 3|x - a^2| - 5x$ имеет более двух точек экстремума.

17. (ЕГЭ, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

18. (ХГУ). Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^4-2ax^2+3a^2$ на отрезке $[-2;1]$ в зависимости от параметра a.

19. (ЕГЭ, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7|x-a|-x$ на отрезке $[-5;6]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

20. (ЕГЭ, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=-x^2+8|x-a|+2x$ на отрезке $[-7;7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

21. (ЕГЭ, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-11|x-a|-x$ на отрезке $[-6;7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

22. Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $f(x)=x^2+2x-1+|x-a|$ больше 2.

23. Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=3|x-a|+|x^2+x-2|$ меньше 2.

24. Найдите все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=x^2+|x-a|+|x-1|$ больше 2.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=ax-|x^2+6x+8|$ меньше 2.

26. Найдите все такие значения a, для которых наименьшее значение функции

$$f(x)=\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\cdot\left|x+1\right|$$

меньше 2.

27. (ЕГЭ, 2012). Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве $|x|\geq 1$ не меньше 6.

28. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a-4$$

а) на отрезке $[2;4]$ равно 5;
б) на отрезке $[2;4]$ не меньше 5;
в) на отрезке $[2;4]$ не больше 5;
г) на множестве $2\leq|x|\leq 4$ равно 5;
д) на множестве $2\leq|x|\leq 4$ не меньше 5;
е) на множестве $2\leq|x|\leq 4$ не больше 5.

29. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ на отрезке $[0;2]$ равно 3.

30. Найдите все значения параметра a, для которых отрезок $[1;2]$ принадлежит области значений функции $y=\dfrac{x+1}{4x^2-a}$.

31. (**МГУ, 1999**). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x)=\frac{4x-a}{x^2-4x+7}$$

содержит полуинтервал $\left[-\dfrac{4}{3};1\right)$. Определите при каждом таком a множество значений функции $f(x)$.

32. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

33. (**МИОО, 2010**). Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-\left|x^2+2x-3\right|-a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

34. Для каждого значения $a>0$ найдите уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно 2 общие точки с графиком функции $f(x)=x|x+2a|+a^2$.

35. (ЕГЭ, 2009). Найдите все значения $a>1$, при каждом из которых все значения функции $y=\dfrac{2}{\log_5(a+|x|)}$ принадлежат промежутку $[-3;\log_5 a-1)$.

Глава 2. Применение свойств функции

2.1. Выражения

В вариантах вступительных экзаменов и ЕГЭ встречаются задачи, в которых требуется определить область определения или множество значений выражения, зависящего от нескольких переменных, некоторые из которых могут быть приняты в качестве параметра. Также встречаются задачи, в которых приходится сравнивать значения выражений, зависящих от параметра. При решении подобных задач приходится пользоваться свойствами функций, входящих в выражение.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 42. *Найти все значения* a, *для которых найдется такое* b, *что выражение* $\log_{16-a^2}(x^2+2ax+6b+4ab-b^2)$ *определено при всех действительных* x.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\log_{16-a^2}(x^2+2ax+6b+4ab-b^2).$$

Функция $f(x)$ определена при выполнении условий

$$\begin{cases}16-a^2>0,\\ 16-a^2\neq 1,\\ x^2+2ax+6b+4ab-b^2>0.\end{cases}$$

Из первых двух неравенств системы получаем значения a, принадлежащие множеству

$$(-4;-\sqrt{15})\cup(-\sqrt{15};\sqrt{15})\cup(\sqrt{15};4).$$

Функция $f(x)$ будет определена при всех действительных x, если неравенство $x^2+2ax+6b+4ab-b^2>0$ будет справедливо при всех действительных x. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был отрицательным $D=4a^2-4(6b+4ab-b^2)<0$, или $a^2-6b-4ab+b^2<0$.

Рассмотрим полученное неравенство как квадратное относительно b:

$$b^2-(4a+6)b+a^2<0.$$

Последнее неравенство будет иметь хотя бы одно решение, если его дискриминант $D_1=(4a+6)^2-4a^2=12(a^2+4a+3)$ будет положительным, т.е. при $a\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Учитывая полученные выше ограничения на a, имеем все значения

$$a\in(-4;-\sqrt{15})\cup(-\sqrt{15};-3)\cup(-1;\sqrt{15})\cup(\sqrt{15};4).$$

Ответ: $(-4;-\sqrt{15})\cup(-\sqrt{15};-3)\cup$ $\cup(-1;\sqrt{15})\cup(\sqrt{15};4)$.

Пример 43. (ЕГЭ, 2007). *Найти все значения а, для которых при каждом* x *из промежутка* $(4;8]$ *значение выражения* $\log_2^2 x-8$ ***не равно*** *значению выражения* $(2a-1)\log_2 x$.

Решение. 1. Пусть $\log_2 x=t$, тогда при $x=4$ имеем $t=2$; если $x=8$, то $t=3$. Так как функция $t=\log_2 x$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка $(4;8]$ переменная t принимает все значения из промежутка $(2;3]$.

2. Переформулируем задачу: *найти все значения а, для которых при каждом* t *из промежутка* $(2;3]$ *значение выражения* t^2-8 *не равно значению выражения* $(2a-1)t$.

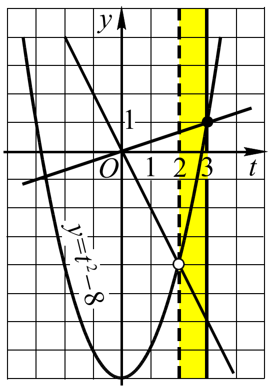


Рис. 21

3. Графиком функции $y=t^2-8$ является парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 21). Функция $y=(2a-1)t$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат. При увеличении углового коэффициента прямые поворачиваются против часовой стрелки.

4. Парабола $y=t^2-8$ пересекает прямую $t=2$ в точке (2;–4): $y=2^2-8=-4$. Угловой коэффициент прямой

$y=(2a-1)t$, проходящей через точку (2; –4), равен: $2a-1=-2$. Парабола пересекает прямую $t=3$ в точке (3; 1): $y=3^2-8=1$. Угловой коэффициент прямой $y=(2a-1)t$, проходящей через точку (3; 1), равен: $2a-1=\frac{1}{3}$.

5. Условие «*значение выражения* t^2-8 *не равно значению выражения* $(2a-1)t$ *при* $t\in(2;3]$» графически означает, что прямая $y=(2a-1)t$ не пересекает параболу на промежутке (2; 3]. Это выполняется при условиях $\left[\begin{array}{l}2a-1\le -2,\\ 2a-1>\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Решая совокупность неравенств, получаем ответ.

Ответ: $a\le -\frac{1}{2}$, $a>\frac{2}{3}$.

Пример 44. *Найти все значения параметра* a, *для которых при каждом значении* x, *не принадлежащем промежутку* $[-1;3)$, *значение выражения* a^2+2x ***<u>не равно</u>*** *значению выражения* $(x-1)a+6$.

Решение. Из условия задачи следует

$$a^2+2x\ne (x-1)a+6$$

или

$$(2-a)x+a^2+a-6\ne 0.$$

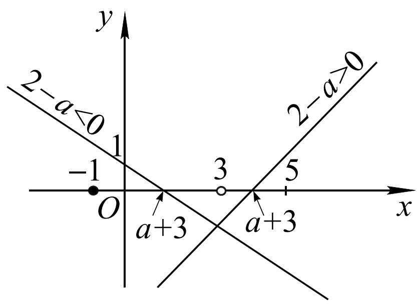


Рис. 22

Рассмотрим линейную функцию $f(x)=(2-a)x+a^2+a-6$. Заметим, что $f(x)=(2-a)(x-a-3)$. При $a=2$ функция $f(x)=0$ является постоянной, и этот случай не удовлетворяет условию задачи. Пусть $a\ne 2$, тогда условие задачи выполняется, если линейная функция $f(x)$ имеет нуль на промежутке $[-1;3)$ (см. рис. 22).

Отсюда получаем аналитические условия

$$\begin{cases}a+3<3,\\ a+3\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\ -4\le a<0.$$

Ответ. $[-4;0)$.

Пример 45. *Найти все значения параметра а, для которых при каждом значении х из промежутка* $(-1;1]$, *значение выражения* $a^2\cdot\sqrt[3]{x^2}-5\cdot\sqrt[3]{x}$ ***<u>не равно</u>*** *значению выражения* $2(2-a\cdot\sqrt[3]{x})$.

Решение. 1. Пусть $\sqrt[3]{x}=t$, тогда при $x=-1$ имеем $t=-1$; если $x=1$, то $t=1$.

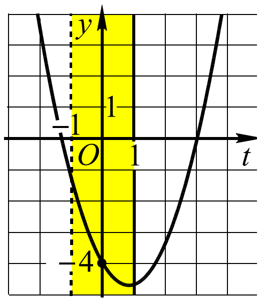


Рис. 23

Так как функция $t=\sqrt[3]{x}$ непрерывная и возрастающая, то при всех значениях переменной x из промежутка $(-1;1]$ переменная t принимает все значения из промежутка $(-1;1]$.

Переформулируем задачу: *найдите все значения а, для которых функция* $f(t)=a^2t^2+(2a-5)t-4$ *не имеет нулей на промежутке* $(-1;1]$.

2. Пусть $a=0$, тогда имеем $f(t)=0$, $-5t-4=0$ или $t=-\frac{4}{5}$, что не удовлетворяет условию задачи. Если $a\ne 0$, то графиком функции $y=f(t)$ является парабола (см. рис. 23), ветви которой направлены вверх. Так как $f(0)=-4$, то условие задачи выполняется, если $f(t)<0$ на промежутке $(-1;1]$.

3. Решим систему

$$\begin{cases}f(-1)\le 0,\\ f(1)<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-(2a-5)-4\le 0,\\ a^2+(2a-5)-4<0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2\le 0,\\ a^2+2a-9<0;\end{cases}\Leftrightarrow\ a=1.$$

Ответ. $a=1$.

2.2. Уравнения

При решении или исследовании уравнений, содержащих параметр, часто приходится пользоваться особенностями и свойствами функций (непрерывность, ограниченность, четность, нечетность, монотонность и т.д.).

В случаях исследования уравнения на наличие корней или их количество в зависимости от значений параметра используются как аналитические методы, применяемые для решения уравнений без параметра, так и графические.

В качестве последнего часто применяют ***метод сечений***, состоящий в следующем.

Исходное уравнение приводится к виду $f(x)=g(x,a)$. Далее в системе координат Oxy строится график левой части и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функций $y_a(x)=g(x,a)$ в зависимости от значений параметра a.

Другая разновидность этого метода состоит в том, что исходное уравнение приводится к виду $a=f(x)$. Далее в системе координат Oxa строится график правой части и определяется количество точек его пересечения семейством прямых, параллельных оси x.

Пример 46. (ЕГЭ, 2003). *При каких значениях p уравнение*

$$5\cos 2x+\frac{2p}{\sin x}=-29$$

имеет решение.

Решение. Левая часть данного уравнения определена при всех x таких, что $\sin x\neq 0$, т.е. $x\neq \pi k$, где $k\in \mathbf{Z}$. При всех допустимых значениях x имеем:

$$5\cos 2x+\frac{2p}{\sin x}=-29 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\cos 2x\sin x+2p=-29\sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2p=-5(1-\sin^2 x)\sin x-29\sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p=5\sin^3 x-17\sin x.$$

Полученное уравнение, а значит и исходное, будет иметь решение, если p принадлежит множеству значений функции $f(x)=5\sin^3 x-17\sin x$ при всех $x\neq \pi k$, где $k\in \mathbf{Z}$.

Множество значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $g(t)=5t^3-17t$, где $t\in[-1;0)\cup(0;1]$. Функция $g(t)$ является нечетной, как разность нечетных функций, поэтому сначала найдем $E(g)$ на промежутке $(0;1]$. Так как $g'(t)=15t^2-17<0$ при всех $t\in(0;1]$, то функция $g(t)$ является убывающей и непрерывной на этом промежутке, то $E(g)=[g(1);g(0))=[-12;0)$ на промежутке $(0;1]$. Тогда на множестве $t\in[-1;0)\cup(0;1]$ $E(g)=[-12;0)\cup(0;12]$.

Следовательно, исходное уравнение будет иметь решение при $p\in E(g)$, т.е. при $p\in[-12;0)\cup(0;12]$.

Ответ: $p\in[-12;0)\cup(0;12]$.

Пример 47. (МГУ, 1995). *Найти все значения параметра a, при которых уравнение*

$$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=$$
$$=\cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнение приведем к виду

$$(x^2-6|x|-a+6)^2+\left(1-\cos\frac{18\pi}{a}\right)=0.$$

Так как в левой части последнего уравнения стоит сумма неотрицательных выражений, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ 1-\cos\dfrac{18\pi}{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-3)^2=a+3, \\ \dfrac{18\pi}{a}=2\pi n,\ n\in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -3, \\ |x|=3\pm\sqrt{a+3}, \\ a=\dfrac{9}{n},\ n\in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $|x|=3\pm\sqrt{a+3}$ системы имеет ровно два корня в двух случаях.

1) Пусть $a=-3$, тогда уравнение $-3=\frac{9}{n}$ выполняется при $n=-3$.

2) При условии $3-\sqrt{a+3}<0$. Отсюда имеем $a>6$. Из неравенства $\frac{9}{n}>6$ получаем одно целое значение $n=1$ и $a=9$.

Ответ: –3; 9.

Пример 48. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$9|x-1|-4x+|3x-|x+a||=0.$$

Функция

$$f(x)=9|x-1|-4x+|3x-|x+a||$$

непрерывна и

1) неограниченно возрастает при $x\ge 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=9x-1-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\ge 9-4-4=1>0$;

2) убывает при $x\le 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x)=-9x+9-4x\pm 3x\pm x\pm a=kx+m,$$

где $k\le -9-4+4=-9<0$.

Следовательно, наименьшее значение функция f принимает при $x=1$, и уравнение $f(x)=0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$.

Решим это неравенство:

$$|3-|1+a||\le 4 \Leftrightarrow -4\le 3-|1+a|\le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1+a|\le 7 \Leftrightarrow -7\le 1+a\le 7 \Leftrightarrow -8\le a\le 6.$$

Ответ. $-8\le a\le 6$.

Пример 49. (МИОО, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

Решение. Обозначим $y=\frac{x^2-6x+7a}{2}$. Тогда $x^2=2y+6x-7a$. В новых обозначениях уравнение примет вид

$$\sin(x-3a)+\sin y=4x-2y-6x+6a,$$

откуда

$$2(x-3a)+\sin(x-3a)=-2y-\sin y.$$

Синус – функция нечетная, поэтому $2(x-3a)+\sin(x-3a)=-2y+\sin(-y)$.

Рассмотрим функцию $f(t)=2t+\sin t$. В этом случае последнее уравнение примет вид

$$f(x-3a)=f(-y).$$

Функция $f(t)$ определена при всех $t\in\mathbf{R}$ и является возрастающей на всей числовой прямой, так как ее производная $f'(t)=2+\cos t$ положительна при всех $t\in\mathbf{R}$. Тогда уравнение $f(x-3a)=f(-y)$ равносильно уравнению $x-3a=-y$.

Выполнив обратную замену, получим

$$x-3a=-\frac{x^2-6x+7a}{2} \Leftrightarrow x^2-4x+a=0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное уравнение, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $4^2-4a<0$, т.е. при $a>4$.

Ответ. $a>4$.

Пример 50. (МИЭТ, 2002). *При каких значениях параметра* a *имеет ровно два различных корня уравнение*

$$\sqrt{x+2a^2}\,(x^2+(2-a)x-2a)=0\,?$$

Решение. Корни данного уравнения должны удовлетворять условию $x\ge -2a^2$ (условие существования квадратного корня из выражения $x+2a^2$). Заметим, что $x^2+(2-a)x-2a=(x-a)(x+2)$. Тогда

$$\sqrt{x+2a^2}\,(x^2+(2-a)x-2a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2a^2, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2a^2, \\ x=a, \\ x=-2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, корнями уравнения могут быть числа $x_1=-2a^2$, $x_2=a$ и $x_3=-2$. По условию задачи требуется найти значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно два различных корня. Для отбора искомых значений параметра на плоскости Oax построим графики функций $x=-2a^2$, $x=a$ и $x=-2$ (см. рис. 24). Каждая прямая, параллельная оси Ox, пересекает каждый из построенных графиков, и ордината точки пересечения дает значение корня исходного уравнения при условии, что $x\ge -2a^2$. Точки (a,x), координаты которых удовлетворяют последнему неравенству, расположены на плоскости Oax в выделенной фоном области. Имеется пять критических положений этих прямых:

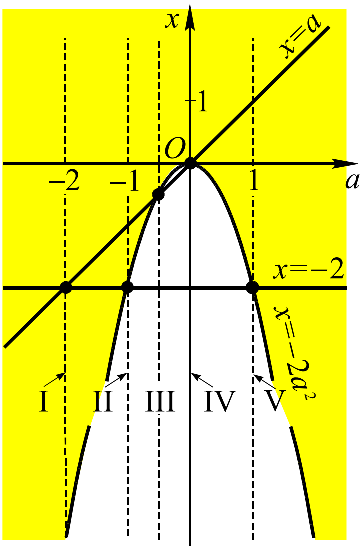


Рис. 24

I) $a=-2$, II) $a=-1$, III) $a=-0{,}5$, IV) $a=0$, V) $a=1$.

В этих случаях они проходят через точки пересечения графиков. Точки $-2, -1, -0{,}5, 0$ и 1 разбивают числовую прямую Oa на шесть промежутков. Рассмотрим каждый из них:

(1) $a<-2$ и (2) $-2<a<-1$. На этих промежутках уравнение имеет три корня.

(3) $-1<a<-0{,}5$. Уравнение имеет два корня (график функции $x=-2$ расположен ниже графика функции $x=-2a^2$).

(4) $-0{,}5<a<0$. Уравнение имеет один корень, так как графики функций $x=a$ и $x=-2$ – ниже графика функции $x=-2a^2$.

(5) $0<a<1$. Уравнение имеет два корня (график функции $x=-2$ – ниже графика функции $x=-2a^2$).

(6) $a>1$. Уравнение имеет три корня.

Соответственно при $a=-2$, $a=-1$ и $a=1$ уравнение имеет два корня (см. рис. 24).

Ответ. $\{-2\}\cup[-1;-0{,}5)\cup(0;1]$.

Пример 51. (**Экзаменационная работа за курс средней школы**, **1994 г.).** *При каких значениях a уравнение*

$$x^2-(4a-2)\cdot|x|+3a^2-2a=0$$

имеет два различных решения?

Решение. Пусть $|x|=t$, тогда получим квадратное уравнение

$$t^2-(4a-2)t+3a^2-2a=0,$$

имеющее корни $t=a$ или $t=3a-2$. Отсюда получаем $|x|=a$ и $|x|=3a-2$. Построим графики двух функций $a(x)=|x|$ и $a(x)=\dfrac{|x|+2}{3}$, которые имеют две общие точки $(-1;1)$ и $(1;1)$ (см. рис. 25).

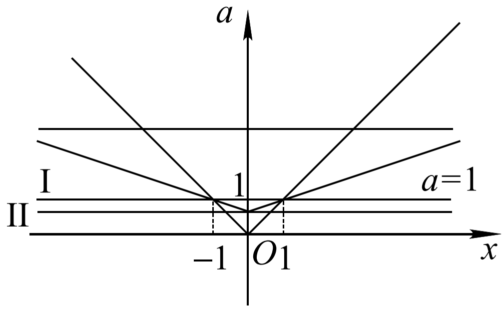


Рис. 25

Первый график (уголок) имеет «вершину» $(0;0)$, а второй – $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Рассматривая семейство горизонтальных прямых, получаем всевозможные ответы для более общей задачи: для каждого значения a определите число различных решений уравнения

$$x^2-(4a-2)|x|+3a^2-2a=0.$$

Значения параметра a	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{2}{3}\right)$
Число различных корней	0	1	2

Значения параметра a	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
Число различных корней	3	4	2	4

Запишем ответ для исходной задачи.

Ответ: $0 < a < \frac{2}{3}$; $a = 1$.

Пример 52. (МИОО, 2012). *Найти все значения параметра* a, *при которых уравнение* $f(x) = |2a+5|x$ *имеет ровно* 6 *решений, где* f – *четная периодическая функция с периодом* $T = 2$, *определенная на всей числовой прямой, причем* $f(x) = ax^2$, *если* $0 \le x \le 1$.

Решение. Если $a = 0$, то $f(x)$ тождественно равна нулю, и ее график имеет с прямой $y = 5x$ единственную общую точку.

Если $a \ne 0$, то в силу четности $f(x) = ax^2$ при $x \in [-1;1]$ и на любом отрезке $[-1+2k;1+2k]$, $k \in \mathbf{Z}$, график функции $f(x)$ получается сдвигом на $2k$ единиц вдоль оси Ox из ее графика на отрезке $[-1;1]$.

Пусть $a > 0$ (см. рис. 26*а*), тогда решение $x = 0$ есть при всех a. Соответственно ровно 6 решений возможно, если прямая $y = (2a+5)x$ проходит через точку $A(5;a)$. Но из уравнения $a = 3(2a+5)$ получаем $a = -2{,}5$, т.е. положительных решений нет. Следовательно, случай $a > 0$ не возможен.

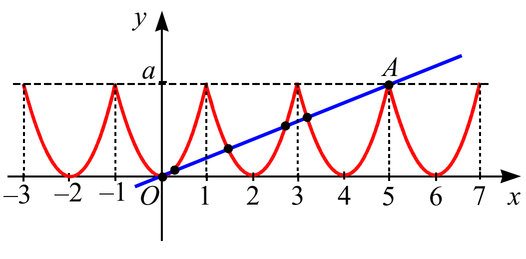


Рис. 26*а*

Пусть $a < 0$ (см. рис. 26*б*). Ровно 6 решений возможно, если прямая $y = |2a+5|x$ проходит через точку $B(-5;a)$. Из уравнения $a = |2a+5|\cdot(-5)$ получаем $a = -\frac{25}{11}$ или $a = -\frac{25}{9}$.

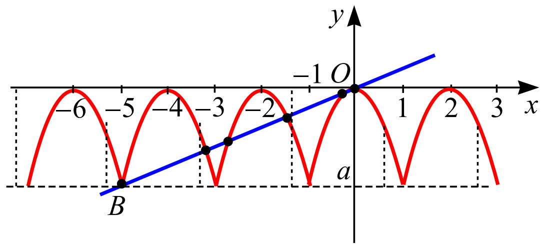


Рис. 26*б*

Ответ: $a = -\frac{25}{11}$ или $a = -\frac{25}{9}$.

Пример 53. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых уравнение*

$$x^2 + (a+4)^2 = |x+a+4| + |x-a-4|$$

имеет единственный корень.

Решение. При каждом конкретном значении параметра a функции $f(x) = x^2 + (a+4)^2$ и $g(x) = |x+a+4| + |x-a-4|$, входящие в левую и правую части уравнения, являются чётными, поскольку выполняются условия:

1) они определены на всей числовой прямой (области определения симметричны относительно начала координат);

2) $f(-x) = (-x)^2 + (a+4)^2 = x^2 + (a+4)^2 = f(x)$,

$$g(-x) = |-x+a+4| + |-x-a-4| = |x-a-4| + |x+a+4| = g(x).$$

Следовательно, если число x_0 – корень уравнения $f(x) = g(x)$, то число $-x_0$ также будет являться корнем этого уравнения. Условие единственности будет выполняться, если $x = 0$ – корень уравнения $f(x) = g(x)$ и других корней нет.

Подставив в исходное уравнение значение $x = 0$, получим уравнение относительно параметра a:

$$(a+4)^2 = |a+4| + |-a-4| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+4)^2 - 2|a+4| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+4| = 0, \\ |a+4| - 2 = 0. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем три значения параметра $a=-6$, $a=-4$ и $a=-2$.

Пусть $a=-6$. Подставив $a=-6$ в исходное уравнение, получим $x^2+4=|x-2|+|x+2|$. Правая часть этого уравнения после раскрытия на промежутках модулей имеет вид

$$|x-2|+|x+2|=\begin{cases}-2x, \text{ если } x<-2,\\ 4, \text{ если } -2\le x<2,\\ 2x, \text{ если } x\ge 2.\end{cases}$$

Уравнения $x^2+4=-2x$ и $x^2+4=2x$ не имеют корней, а уравнение $x^2+4=4$ имеет единственный корень $x=0$, удовлетворяющий условию $-2\le x<2$.

Пусть $a=-2$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, опять получим уравнение

$$x^2+4=|x+2|+|x-2|,$$

имеющее единственный корень $x=0$.

Пусть $a=-4$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим

$$x^2=2|x|\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=0,\\ |x|=2\end{cases}\Leftrightarrow x=0, x=-2, x=2.$$

Значение $a=-4$ не соответствует условию задачи.

Ответ. $-6, -2$.

Пример 54. («Покори Воробьевы горы-2012»). *При каждом значении параметра a найти количество решений уравнения* $16x^4-32x^3+ax^2-8x+1=0$.

Решение. Так как $x=0$ не является корнем исходного уравнения, то, поделив на x^2, приведем уравнение к виду

$$16x^2-32x-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=-a \Leftrightarrow$$

$$16x^2+\frac{1}{x^2}+8-32x-\frac{8}{x}=8-a.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$4\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2-16\left(2x+\frac{1}{2x}\right)+16=24-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x+\frac{1}{2x}-2\right)^2=\frac{24-a}{4}.$$

Функция $y=2x+\frac{1}{2x}$ имеет множество значений $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ (докажите самостоятельно). Причем для каждого значения y из этого множества, кроме значений -2 и 2, найдутся два значения x, а для указанных – одно. Соответственно, множеством значений функции $g=2x+\frac{1}{2x}-2$ является $(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$. При этом (см. рис. 27) для каждого из значений g, равных -4 и 0, найдутся по одному значению x, а для каждого значения g из множества $(-\infty;-4)\cup\cup(0;+\infty)$ найдутся по два значения x.

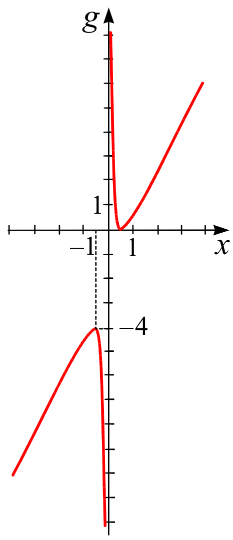


Рис. 27

Множество значений функции $h=g^2$ представляет собой промежуток $[0;+\infty)$. Тогда, учитывая отмеченное выше замечание о количестве прообразов x для каждого значения функции g, возможны пять различных случаев по количеству решений уравнения $h=\frac{24-a}{4}$. А именно:

– при $h<0$, или $a>24$, уравнение не имеет решений;
– при $h=0$, или $a=24$, уравнение имеет одно решение;
– при $h=16$, или $a=-40$, уравнение имеет три решения;
– при $0<h<16$, $-40<a<24$, уравнение имеет два решения;
– при $h>16$, или $a<-40$, уравнение имеет четыре решения.

Ответ: нет решений при $a>24$;
одно решение при $a=24$;
три решения при $a=-40$;
два решения при $-40<a<24$;
четыре решения при $a<-40$.

2.3. Системы уравнений

При решении и исследовании на количество решений систем уравнений, содержащих параметр, обычно используют такие же методы, что и при решении уравнений.

Пример 55. (МИОО, 2010). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что данная система равносильна следующей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (y-2)^2 + (x-2)^2 = 4^2, \\ y \ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} (y-a)^2 + (x-a)^2 = 4^2, \\ y \ge a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение первой системы задает окружность радиуса 4 с центром в точке (2; 2).

Уравнение второй системы задает семейство окружностей радиуса 4 с центрами $(a; a)$, расположенными на прямой $y = x$.

Дополнительные условия в системах (неравенства) указывают, что условию задачи соответствуют точки пересечения верхних полуокружностей этих окружностей (см. рис. 28).

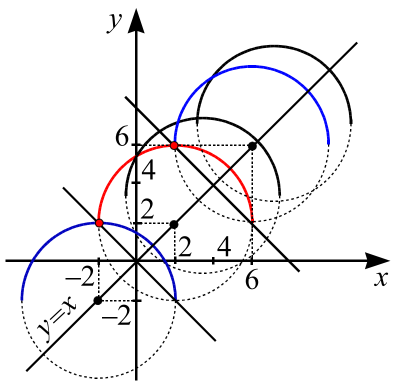


Рис. 28

Возникают три критических положения $a = -2, a = 2$ и $a = 6$.

При $a = 2$ окружности совпадают, т.е. имеют более одной точки пересечения.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют следующие значения параметра $a \in [-2; 2) \cup (2; 6]$.

Ответ. $[-2; 2) \cup (2; 6]$.

Пример 56. (МИОО, 2011). *Найти все значения параметра a, при которых система*

$$\begin{cases} \log_a y = (x^2 - 2x)^2, \\ x^2 + y = 2x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Выразим из второго уравнения $y = 2x - x^2$ и подставим в первое уравнение $\log_a y = y^2$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0 < a < 1$. Так как функция $z = \log_a y$ убывает, а функция $z = y^2$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, то уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Определим знаки значений функции $f(y) = \log_a y - y^2$ на промежутке $[a^2; 1]$ $f(a^2) = \log_a a^2 - (a^2)^2 = 2 - a^4 > 0$ и $f(1) = \log_a 1 - 1^2 = -1 < 0$. Поэтому уравнение $\log_a y = y^2$ имеет на промежутке $(0; +\infty)$ ровно один корень $y_0 \in (0; 1)$.

Тогда второе уравнение $x^2 - 2x + y_0 = 0$ имеет дискриминант $D_1 = 1 - y_0 > 0$ и имеет два различных корня. Следовательно, данная система уравнений имеет два различных решения.

2. Пусть $a > 1$. Если уравнение $\log_a y = y^2$ имеет корни, то они больше 1. Тогда уравнение $x^2 - 2x + y_0 = 0$ имеет дискриминант $D_1 = 1 - y_0 < 0$ и не имеет действительных корней.

Ответ: $(0; 1)$.

Пример 57. *В зависимости от значений параметра a определить количество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} \log_a(2y-1)=5x-x^2-2, \\ x^2-5x+2y=0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы получаем, что входящие в уравнение выражения имеют смысл при $a>0$, $a\neq 1$ и $y>0{,}5$. Рассматривая второе уравнение как квадратное относительно x, получим, что оно имеет решение, если его дискриминант $D=25-8y$ будет неотрицательным. Отсюда $y\le \frac{25}{8}$.

Данная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} \log_a(2y-1)=2y-2, \\ 0{,}5<y\le \frac{25}{8}. \end{cases}$$

Обозначим $2y-1=t$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} \log_a t=t-1, \\ 0<t\le \frac{21}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что $t=1$ является корнем уравнения системы при всех допустимых значениях a.

При $0<a<1$ в левой части уравнения системы стоит убывающая функция, в правой – возрастающая. Следовательно, при $t=1$ $0<a<1$ полученная система имеет единственное решение, а тогда исходная система уравнений имеет два решения, так как при $t=1$ получаем $y=1$. Из уравнения $x^2-5x+2=0$ ему соответствуют два корня $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Пусть $a>1$. Рассмотрим функцию $f(t)=\log_a t-t+1$ на промежутке $\left(0;\frac{21}{4}\right]$ и определим количество корней уравнения $f(t)=0$ на этом промежутке в зависимости от значений параметра a.

Функция $f(t)$ дифференцируема при $t>0$ и

$$f'(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln a}-1.$$

Из уравнения $f'(t)=0$ получаем $t=\frac{1}{\ln a}$, $f'(t)>0$ при $0<t<\frac{1}{\ln a}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\ln a}$. Следовательно, точка $t_0=\frac{1}{\ln a}$ – точка максимума функции $f(t)$.

Заметим, что $t_0=1$ при $a=e$, $t_0<1$ при $a>e$, и $0<t_0<1$ при $1<a<e$.

Если $a=e$, то $f(t_0)=f(1)=0$ и функция $f(t)$ имеет единственный корень $t=1$.

Если $a>e$, то $t_0<1$, а так как $f(1)=0$, то $f(t_0)>0$ (см. рис. 29*а*). Поскольку $f(t)\to-\infty$ при $t\to 0$, то на промежутке $(0,t_0)$ функция $f(t)$ имеет еще один корень. Следовательно, исходная система будет иметь еще два решения.

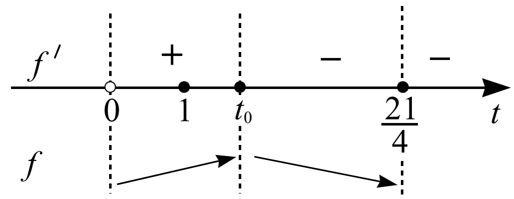


Рис. 29*а*

Если $1<a<e$, то $t_0>1$, а так как $f(1)=0$, то $f(t_0)>0$ (см. рис. 29*б*).

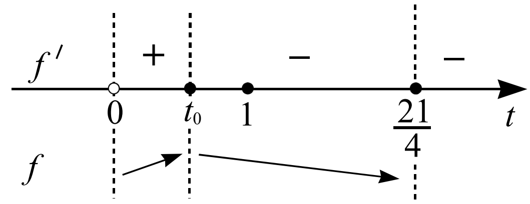


Рис. 29*б*

Найдем значение a, при котором $f\left(\frac{21}{4}\right)=0$ из уравнения $\log_a\frac{21}{4}=\frac{21}{4}-1$ или $\log_a\frac{21}{4}=\frac{17}{4}$. Отсюда $a=\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}<e$.

Соответственно $f\left(\frac{21}{4}\right)<0$ при $\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}<a<e$. Это значит, что на про-

межутке $\left(1,\frac{21}{4}\right)$ функция $f(t)$ имеет еще один корень. Следовательно, исходная система будет иметь еще два решения.

При $a=\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$ функция $f(t)$ имеет еще один корень $t=\frac{21}{4}$. Но в этом случае $y=\frac{25}{8}$ и уравнение $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$ имеет единственное решение $x=\frac{5}{2}$. Значит, исходная система имеет три решения.

Соответственно $f\left(\frac{21}{4}\right)>0$ при $1<a<\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$. Это значит, что на промежутке $\left(1,\frac{21}{4}\right)$ функция $f(t)$ не имеет корней.

Ответ: Если $a\le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$ или $1<a<\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$, то два решения;
если $a=\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}$, то три решения;
если $\sqrt[17]{\left(\frac{21}{4}\right)^4}<a<e$, то четыре решения;
если $a=e$, то два решения;
если $a>e$, то четыре решения.

Пример 58. (ЕГЭ, 2011, демонстрационный вариант). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-x_0, y_0)$ – также её решение. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0=-x_0$, т.е. $x_0=0$. Подставив это значение неизвестной x в систему, получим:

$$\begin{cases} a=y+2, \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=0, \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Допустимыми значениями параметра являются лишь значения $a=0$ и $a=4$.

Пусть $a=0$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} y=|x|-2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Подставив y из первого уравнения системы во второе, получим

$$x^2+(|x|-2)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=2|x|.$$

Это уравнение имеет три корня $x=0, x=-2$ и $x=2$. Следовательно, при $a=0$ данная в условии система уравнений имеет три пары решений $(0;-2), (-2;0)$ и $(2;0)$.

Пусть $a=4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 4(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y=4x^4+|x|+2, \\ y^2=4-x^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы следует $y\ge 2$, а из второго $|y|\le 2$. Следовательно, если система имеет решение, то это пары вида $(x, 2)$. Подставляя $y=2$ в систему, получаем

$$\begin{cases} 4x^4+|x|=0, \\ x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Следовательно, при $a=4$ решение $(0;2)$ исходной системы уравнений единственное.

Ответ. $a = 4$.

Пример 59. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} |y| + a = 6\sin x, \\ y^4 + z^2 = 6a, \\ (a-3)^2 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x + 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

Решение. Заметим, что во втором уравнении системы левая часть неотрицательна и, следовательно, $a \ge 0$.

Из первого уравнения системы получаем

$$|y| = 6\sin x - a \ge 0.$$

Следовательно, $a \le 6\sin x$, а так как $\sin x \le 1$, то $a \le 6$.

Из первых двух уравнений следует, что $0 \le a \le 6$.

Приведем третье уравнение к виду

$$(a-3)^2 - 9 = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(a-6) = |z^2 + 6z| + \sin^2 2x.$$

Так как $|z^2 + 6z| + \sin^2 2x \ge 0$, то $a(a-6) \ge 0$. С учетом полученного выше, имеем

$$\begin{cases} a(a-6) \ge 0 \\ 0 \le a \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 6. \end{array}\right.$$

При $a = 0$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6\sin x, \\ y^4 + z^2 = 0, \\ |z^2 + 6z| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует $y = z = 0$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi k, \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

При $a = 6$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} |y| = 6\sin x - 6, \\ y^4 + z^2 = 36, \\ |z^2 + 6z| + \sin^2 2x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y = 0$ и $\sin x = 1$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $\sin 2x = 0$.

Из второго уравнения следует $z = -6$ или $z = 6$. Подставляя эти значения в уравнение $|z^2 + 6z| = 0$ получаем, что $z = -6$.

Ответ. При $a = 0$ $(\pi k; 0; 0)$, где $k \in \mathbf{Z}$;

при $a = 6$ $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; 0; -6\right)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

2.4. Неравенства

При решении или исследовании неравенств, содержащих параметр, также как и при решении уравнений используют свойства функций.

Для графической интерпретации при решении методом интервалов (или обобщенным методом интервалов) используется числовая прямая Ox или ***метод областей*** на плоскости Oxa (или Oax).

Также при решении или исследовании на решение неравенства используется ***метод сечений***. В этом случае исходное неравенство приводится к виду $f(x) \vee g(x, a)$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $>$, $<$, $\ge$, $\le$. Далее в системе координат Oxy строится график левой части и определяются точки его пересечения семейством графиков функций $y_a(x) = g(x, a)$ и на промежутках, на которые эти точки разбили область допустимых значений переменной x рассматривается взаимное положение графиков функций $f(x)$ и $y_a(x)$.

Пример 60. (МГУ, 2003). *Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства*

$$\frac{x - 3b}{b - 2x} < 0.$$

Решение. Неравенство перепишем так:

$$\frac{x-3b}{x-\frac{b}{2}}>0 \text{ или } f(x)=(x-3b)\left(x-\frac{b}{2}\right)>0.$$

На рис. 30 расставлены знаки $f(x)$ на числовой прямой в зависимости от взаимного расположения точек $x=\frac{b}{2}$ и $x=3b$.

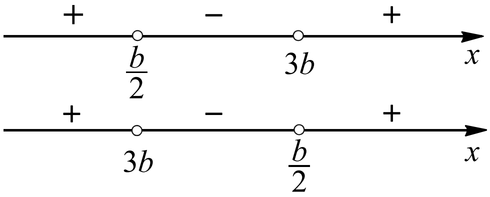


Рис. 30

Условие задачи выполняется, если для квадратичной функции имеет место

$$\begin{cases}\frac{b}{2}\ge 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>\frac{b}{2}\\ -1<3b\end{array}\right.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\frac{b}{2}\le 3b\\ \left[\begin{array}{l}-3>3b\\ -1<\frac{b}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Отсюда получаем значения $b\in(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right]$ или $b\ge 0$.

Замечание. Можно было бы воспользоваться условиями расположения корней квадратного трехчлена: оба корня меньше числа (–3) или оба корня больше числа (–1), т.е.

$$\begin{cases}f(-3)>0\\ x_{\text{в}}<-3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(-1)>0\\ x_{\text{в}}>-1\end{cases}$$

где абсцисса вершины $x_{\text{в}}=\dfrac{3b+\frac{b}{2}}{2}=\dfrac{7b}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Пример 61. (МИОО, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $|x+1|+2|x+a|>3-2x$ выполняется для любого x.*

Решение. Неравенство преобразуется к виду $f(x)>3$, где

$$f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x.$$

Точки -1 и $-a$ разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с линейной (при любом раскрытии знаков модуля). На левом интервале ($x<-1,\ x<-a$) функция принимает вид $f(x)=-x-2a-1$ и является убывающей. На правом интервале ($x>-1,\ x>-a$) функция принимает вид $f(x)=5x+2a+1$ и является возрастающей. Это означает, что функция ограничена снизу. График функции представляет ломаную линию, состоящую из частей прямых. Точки -1 и $-a$ являются точками излома, поэтому в этих точках функция может принимать наименьшее значение.

Все значения функции $f(x)$ больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}f(-1)>3,\\ f(-a)>3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|-1+a|-2>3,\\ |-a+1|-2a>3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|a-1|>\frac{5}{2},\\ |a-1|>2a+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a-1>2{,}5,\\ a-1<-2{,}5,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a-1>2a+3,\\ a-1<-2a-3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>3{,}5,\\ a<-1{,}5,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a<-4,\\ a<-\frac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow a<-1{,}5.$$

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

Пример 62. (МГУ, 2004). *Найти все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство*

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x)>0$$

выполняется при любых $x\ge 0$.

Решение. Если $p>2$, то получается линейное неравенство $(p-1)x+p-3>0$. По условию оно должно выполняться при любых $x\ge 0$, в частности при $x=0$. Отсюда $p>3$. С другой стороны при $p>3$

неравенство действительно справедливо для всех $x \ge 0$. Таким образом, $3 < p \le 4$.

При $p = 2$ исходное неравенство не выполнено ни для одного значения x.

При $p < 2$ неравенство принимает вид $(p-1)x + p - 3 < 0$. Если $p > 1$, то линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ возрастает, поэтому для всех $x \ge 0$ неравенство $f(x) < 0$ выполняться не может.

Если $p = 1$, то $f(x) = p - 3 = -2 < 0$ для всех x, в том числе и для $x \ge 0$. Наконец, для $p < 1$ линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ убывает и при $x = 0$ принимает значение $f(0) = p - 3 < 0$. Значит, при $x \ge 0$ неравенство тем более выполняется.

Ответ: $[-4;1] \cup (3;4]$.

Пример 63. *При каких значениях параметра а неравенство*

$$x^2 + 3|x-a| + a + x - 3 \le 0$$

имеет хотя бы одно неположительное решение?

Решение. Приведем неравенство к виду

$$x^2 + 2x + 1 \le (x-a) - 3|x-a| + 4.$$

График функции $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ – парабола, полученная из параболы $y = x^2$, параллельным переносом вдоль оси Ox на 1 (см. рис. 31). График функции $y_a(x) = (x-a) - 3|x-a| + 4$, стоящей в правой части неравенства, при каждом значении параметра a получается из графика функции

$$y = x - 3|x| + 4 = \begin{cases} -2x + 4, \text{ если } x \ge 0, \\ 4x + 4, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

параллельным переносом на a единиц вдоль оси Ox.

Решением исходного неравенства является множество всех таких x, для которых точки на графике функции $y_a(x)$ расположены не ниже точек графика функции $y = (x+1)^2$.

Имеются два критических положения графика функции $y_a(x)$, удовлетворяющие условию задачи.

(I) График функции $y_a(x)$ проходит через точку $A(0;1)$ как указано на рис. 31. Из уравнения $4(x-a) + 4 = 1$ при $x = 0$ получаем $a = 0{,}75$.

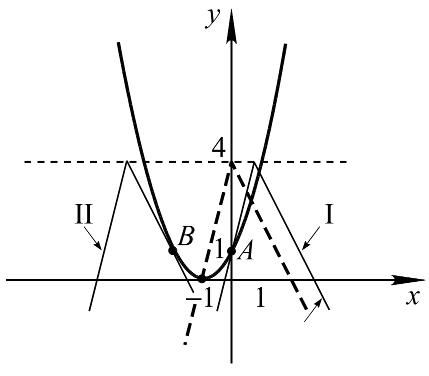


Рис. 31

(II) График функции $y_a(x)$ проходит через точку B как указано на рис. 31. В этом случае прямая $y = -2(x-a) + 4$ является касательной к графику функции $y = (x+1)^2$. Используем условия касания графиков функций. Из равенства значений производных данных функций $\left(x^2 + 2x + 1\right)' = \left(-2(x-a) + 4\right)'$ получаем уравнение $2x + 2 = -2$, т.е. $x = -2$ – абсцисса точки касания графиков. Тогда из условия совпадения ординат получаем $(-2+1)^2 = -2(-2-a) + 4$ или $a = -3{,}5$.

Следовательно, при $-3{,}5 \le a \le 0{,}75$ исходное неравенство имеет хотя бы одно неположительное решение.

Ответ. $-3{,}5 \le a \le 0{,}75$.

Пример 64. (МГУ, 1995). *Найти все значения параметра* a*, при которых неравенство*

$$\cos 2x + a \le 2\sqrt{x^2 + 16} - \frac{x^2 + 16}{a + \cos 2x}$$

имеет единственное решение?

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду

$$\frac{(a + \cos 2x - \sqrt{x^2 + 16})^2}{a + \cos 2x} \le 0.$$

Так как функция

$$f(x) = \frac{(a + \cos 2x - \sqrt{x^2 + 16})^2}{a + \cos 2x}$$

является четной, то необходимым условием единственности решения неравенства $f(x) \le 0$ является наличие решения $x = 0$. При $x = 0$ имеем

$$f(0) = \frac{(a-3)^2}{a+1} \le 0.$$

Последнее неравенство выполняется при $a = 3$ или $a < -1$.

Проверим достаточность.

При $a = 3$ знаменатель $3 + \cos 2x > 0$, поэтому получаем

$$(3 + \cos 2x - \sqrt{x^2 + 16})^2 \le 0$$

или

$$3 + \cos 2x = \sqrt{x^2 + 16}.$$

Так как $3 + \cos 2x \le 4$ и $\sqrt{x^2 + 16} \ge 4$, то

$$\begin{cases} 3 + \cos 2x = 4, \\ \sqrt{x^2 + 16} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

При $a < -1$ имеем неравенство

$$\frac{(a + \cos 2x - \sqrt{x^2 + 16})^2}{a + \cos 2x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + \cos 2x - \sqrt{x^2 + 16})^2 \ge 0,$$

которое выполняется при всех $x \in \mathbf{R}$.

Ответ: 3.

Пример 65. (ЕГЭ, 2008). *Найти все значения а, при каждом из которых неравенство*

$$\frac{\left(2^x + 3\sqrt{2} \cdot 2^{-x} - 5\right) - a}{a - \left(2 \sin \sqrt{x-1} - 3\right)} \le 0$$

не имеет решений.

Решение. 1. Так как на промежутке $[1; +\infty)$ имеем $E(\sin \sqrt{x-1}) = [-1; 1]$, то для функции $f(x) = 2 \sin \sqrt{x-1} - 3$ получаем $E(f) = [-5; -1]$.

2. Пусть $2^x = t$, где $t \ge 2$ для $x \ge 1$. Используя неравенство для средних, оценим значения функции

$$g(t) = t + \frac{3\sqrt{2}}{t} - 5 \ge 2\sqrt[4]{18} - 5 = g(t_0),$$

где t_0 найдем из уравнения

$$t_0 = \frac{3\sqrt{2}}{t_0} \Leftrightarrow t_0 = \sqrt[4]{18}.$$

Тогда

$$g_{наим} = 2\sqrt[4]{18} - 5 > 2\sqrt[4]{16} - 5 = -1 = f_{наиб}.$$

3. Данное неравенство, в котором будем считать переменную a за неизвестную, x за параметр, перепишем в следующем виде

$$\frac{a - g\left(2^x\right)}{a - f(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < f(x), \\ a \ge g\left(2^x\right) \end{array}\right..$$

Совокупность неравенств не выполняется ни при одном значении x тогда и только тогда, когда

$$f_{наиб} \le a < g_{наим} \Leftrightarrow -1 \le a < 2\sqrt[4]{18} - 5.$$

Ответ: $-1 \le a < 2\sqrt[4]{18} - 5$.

2.5. Системы неравенств

При решении и исследовании на наличие решений систем неравенств, содержащих параметр, обычно используют такие же методы, что и при решении неравенств.

Пример 66. *При каждом значении параметра а решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{2-|x|}(1-a) < 0, \\ \sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2}. \end{cases}$$

Решение. Область определения данной системы задается системой неравенств

$$\begin{cases} 2 - |x| > 0, \\ 2 - |x| \ne 1, \\ 1 - a > 0, \\ 2x - 2 \ge 0, \\ a + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ -2 \le a < 1 \end{cases}$$

и выделена фоном на плоскости Oax (см. рис. 32).

На области определения выполняются неравенства $0 < 2 - |x| < 1$, и для первого неравенства системы получаем

$$\log_{2-|x|}(1-a) < 0 \Leftrightarrow 1 - a > 1 \Leftrightarrow a < 0.$$

Для второго неравенства на области определения получаем

$$\sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{a}{2}+2.$$

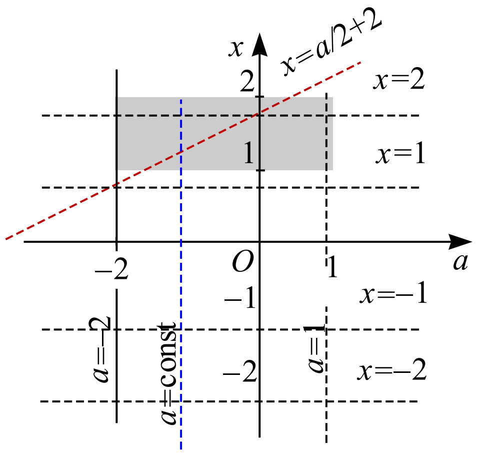


Рис. 32

Исходная система на области определения равносильна системе

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > \dfrac{a}{2}+2, \\ -2 \le a < 0. \end{cases}$$

Неравенство $1 \le \frac{a}{2}+2 < 2$ верно при всех a таких, что $-2 \le a < 0$. В этом случае $\frac{a}{2}+2 < x < 2$ (см. рис. 32).

Ответ. Если $a < -2$ или $a \ge 0$, то решений нет; если $-2 \le a < 0$, то $\frac{a}{2}+2 < x < 2$.

Пример 67. *Решить систему неравенств в зависимости от значений параметра a:* $\begin{cases} x^2+x \le a, \\ 2x-x^2 \ge a-1. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим графическое решение задачи на плоскости Oxa. Преобразуем исходную систему неравенств к виду

$$\begin{cases} x^2+x \le a, \\ 2x-x^2+1 \ge a. \end{cases}$$

Выполним построения графиков функций $a = x^2+x$ и $a = -x^2+2x+1$ на плоскости Oxa (см. рис. 33).

Найдем координаты точек пересечения построенных графиков A и B. Абсциссы этих точек найдем из уравнения $x^2+x = 2x-x^2+1$. Его корнями являются числа $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = 1$. Заметим, что корни x_1, x_2 совпадают с абсциссами вершин первой и второй парабол соответственно, а ординаты точек A и B равны $-0{,}25$ и 2.

Графическое решение исходной системы неравенств – множество точек, принадлежащих фигуре, выделенной темным фоном на рис. 33.

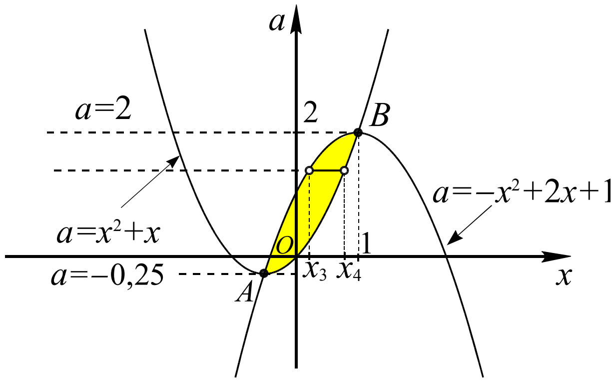


Рис. 33

Графическое решение исходной системы неравенств – множество точек, принадлежащих фигуре, выделенной темным фоном на рис. 33.

Проводим прямые, параллельные оси Ox. Они будут иметь общие точки с полученной фигурой при $-0{,}25 \le a \le 2$. При $a = -0{,}25$ или $a = 2$ будем иметь по одной общей точке, соответственно решение системы неравенств $x = -0{,}5$ или $x = 1$. При $-0{,}25 < a < 2$ все общие точки образуют отрезок этой прямой, и их абсциссы x удовлетворяют неравенству $x_3 \le x \le x_4$, где $x_3 = 1-\sqrt{2-a}$ – меньший из корней уравнения $a = -x^2+2x+1$, а $x_4 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ – больший из корней уравнения $x^2+x = a$.

Ответ. $x = -0{,}5$ при $a = -0{,}25$; $x = 1$ при $a = 2$; $x \in \left[1-\sqrt{2-a}; \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$ при $-0{,}25 < a < 2$.

Пример 68. *Определить, при каких значениях параметра a, имеет хотя бы одно решение система неравенств*

$$\begin{cases} ax-1\le 0, \\ x-4a\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся графическим методом. Заштрихуем на плоскости Oxa множество точек (см. рис. 34), координаты $(x;a)$ которых удовлетворяют системе неравенств.

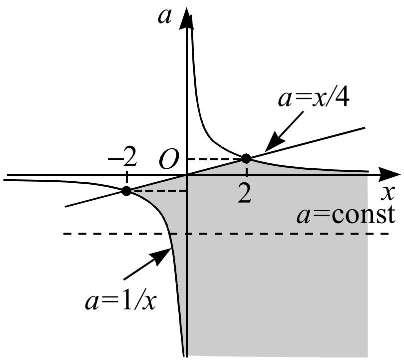


Рис. 34

Неравенству $ax-1\le 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих между ветвями гиперболы $a=\dfrac{1}{x}$ или на гиперболе. Неравенство $x-4a\ge 0$ или $a\le\dfrac{x}{4}$ выполняется для точек, лежащих не выше прямой $a=\dfrac{x}{4}$.

Данная система имеет решение, если прямая $a=\text{const}$ пересекает заштрихованную область (см. рис. 34), т.е. при $a\le 0{,}5$.

Ответ. $a\le 0{,}5$.

Пример 69. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства*

$$x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4$$

удовлетворяет неравенству

$$ax(x-4-a)\le 0.$$

Решение. Рассмотрим неравенство $ax(x-4-a)\le 0$. Попарно пересекающиеся прямые $a=0$, $x=0$ и $x=a+4$ разбивают плоскость Oax на семь частей. На рис. 35 фоном выделено множество Ф точек плоскости, координаты которых удовлетворяют рассматриваемому неравенству.

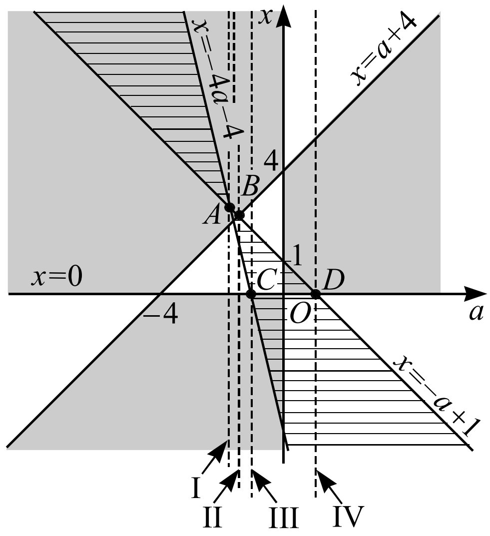


Рис. 35

Рассмотрим неравенство

$$x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+(5a+3)x+4a^2-4\le 0.$$

Поскольку его дискриминант $D=(5a+3)^2-4(4a^2-4)=(3a+5)^2\ge 0$ при всех значениях a и $x_1=-a+1$, $x_2=-4a-4$ – корни квадратного уравнения $x^2+(5a+3)x+4a^2-4=0$, то исходное неравенство можно записать в виде $(x+a-1)(x+4a+4)\le 0$.

Пересекающиеся прямые $x=-a+1$ и $x=-4a-4$ разбивают плоскость Oax на четыре части. Горизонтальной штриховкой на рис. 35 выделено множество $Ф_1$ точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x+a-1)(x+4a+4)\le 0.$$

Проводим вертикальные прямые $a=\text{const}$. Пересечение каждой прямой из этого множества с фигурой Ф дает множество М решений неравенства $ax(x-4-a)\le 0$, а пересечение с фигурой $Ф_1$ – множество $М_1$ решений неравенства $(x+a-1)(x+4a+4)\le 0$. Условию задачи удовлетворяют все такие значения параметра a, при которых множества $М_1$ и М имеют только одну общую точку.

Имеется четыре таких значения (см. рис. 35):

(I) прямая $a=a_1$ проходит через точку A пересечения прямых $x=-a+1$ и $x=-4a-4$, т.е. $a_1=-\dfrac{5}{3}$;

(II) прямая $a=a_2$ проходит через точку B пересечения прямых $x=a+4$ и $x=-a+1$, т.е. $a_2=-\dfrac{3}{2}$;

(III) прямая $a=a_3$ проходит через точку C – точку пересечения прямых $x=0$ и $x=-4a-4$, т.е. $a_3=-1$;

(IV) прямая $a=a_4$ проходит через точку D – точку пересечения прямых $x=0$ и $x=-a+1$, т.е. $a_4=1$.

Ответ. $-\dfrac{5}{3};-\dfrac{3}{2};-1;1$.

Пример 70. *Найти все значения параметра a, при которых система неравенств*

$$\begin{cases} y\le ax-x^2-3, \\ x\le ay-y^2-3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0,y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0,x_0) – также решения, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0,y_0)=(y_0,x_0)$, то $x_0=y_0$.

Подставляя $x_0=y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид

$$x_0\le ax_0-x_0^2-3 \quad\Leftrightarrow\quad x_0^2+(1-a)x_0+3\le 0,$$

которое будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трехчлена равен 0, т.е. $D=(1-a)^2-12=0$. Решая уравнение $a^2-2a-11=0$, получаем два значения параметра $a=1-2\sqrt{3}$ или $a=1+2\sqrt{3}$.

Подставляя $a=1-2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем

$$\begin{cases} y\le(1-2\sqrt{3})x-x^2-3, \\ x\le(1-2\sqrt{3})y-y^2-3 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-(1-2\sqrt{3})x+y+3\le 0, \\ y^2-(1-2\sqrt{3})y+x+3\le 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим

$$x^2+2\sqrt{3}x+y^2+2\sqrt{3}y+6\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2\sqrt{3}x+3)+(y^2+2\sqrt{3}y+3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (x+\sqrt{3})^2+(y+\sqrt{3})^2\le 0.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x=-\sqrt{3}$ и $y=-\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a=1+2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x=\sqrt{3}$ и $y=\sqrt{3}$.

Ответ. $1\pm 2\sqrt{3}$.

Упражнения

36. (ЕГЭ, 2007). Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-3;-1)$ значение выражения x^4-7x^2-3 **не равно** значению выражения ax^2.

37. (ЕГЭ, 2007). Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-5;-1)$ значение выражения x^2-3 **не равно** значению выражения $(a+4)|x|$.

38. (Экзаменационная работа за курс средней школы, 1994 г.). При каких значениях a уравнение

$$x^2-(3a-1)\cdot|x|+2a^2-a=0$$

имеет четыре различных решения?

39. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2|x-2|+a+x=4$$

имеет хотя бы один корень, причем все его корни лежат на отрезке $[0;4]$.

40. (МФТИ, 2008). Найдите все значения *a*, при которых уравнение

$$|ax^2-6|=|2ax|+|3a|$$

имеет хотя бы одно действительное решение.

41. (МИОО, 2012). При каких a уравнение

$$|x^2+x+a|+|x|=10$$

имеет ровно три корня?

42. (МГУ, 2003). При каких значениях *a* уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$$

имеет единственное решение?

43. (МГУ, 2007). При каких значениях параметра *a* уравнение

$$16^x-3\cdot 2^{3x+1}+2\cdot 4^{x+1}-(4-4a)\cdot 2^{x-1}-$$
$$-a^2+2a-1=0$$

имеет три различных корня?

44. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a}-4^{x^2-5x+4a}=x^2-8x+a$$

не имеет действительных решений.

45. (ЕГЭ, 2003). Найдите все значения *p*, при которых уравнение

$$7-2\cos x=p\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)$$

имеет хотя бы один корень.

46. (ЕГЭ, 2003). При каких значениях p уравнение

$$4\cos^3 x+p=7\cos 2x$$

не имеет корней.

47. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x-2x^2-a}{3}\right)-\cos(2x+a)=$$
$$=x^2-8x-a$$

имеет единственное решение.

48. (ЕГЭ, 2008). Найдите все значения *a*, при каждом из которых неравенство

$$\frac{a-\left(2^x+2\sqrt{6}\cdot 2^{-x}-5\right)}{\left(3\sin\sqrt{x-1}-4\right)-a}\le 0$$

не имеет решений.

49. (ЕГЭ, 2008). Найдите все значения *a*, при каждом из которых неравенство

$$\frac{\left(\log_2 x+3\sqrt{3}\cdot\log_x 2-6\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-4}-4\right)}\le 0$$

не имеет решений.

50. (**МИОО, 2012).** Найти все значения параметра a, большие 1, при каждом из которых уравнение $f(x)=|3^a-3|\sqrt{x}$ имеет ровно 6 решений, где f – четная периодическая функция с периодом $T=4$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=4{,}5a^2(|x-1|-1)^2$, если $0\le x\le 2$

51. (**МИОО, 2012).** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x)=|a+2|\sqrt[3]{x}$ имеет ровно 4 решения, где f – четная периодическая функция с периодом $T=\dfrac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le\dfrac{8}{3}$.

52. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}|y|+a=4\cos x,\\ \sqrt{y}+z^2=a,\\ (a-2)^2=|z^2-2z|+|\sin 2x|+4\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

53. (МИОО, 2011). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_2(4y+4a-3)=1+\log_2(a-x),\\ y=\sqrt{x}\end{cases}$$

имеет решение.

54. (МФТИ, 2002). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(5x+7y+2)=\log_2(x+2y+1)+2, \\ (y+2a)^2+y=x+a+0{,}5 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

55. (МИОО, тренировочная работа, декабрь 2010). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

56. (МИОО). Найдите значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x. \end{cases}$$

57. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств:

а) $\begin{cases} y\ge(x-a)^2, \\ x\ge(y-a)^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge(x+y)^2-x-2y+a, \\ x\ge(y-x)^2-3y+2x+a. \end{cases}$

58. (МГУ, 2001). Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2+2ax+a+4\le 0, \\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

59. (МИОО, 2010). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\ge 0, \\ ax>4 \end{cases}$$

не имеет решений.

60. (МГУ, 1967). Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\ge 0, \\ x-8>ax; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\ge 0, \\ x+ax>8. \end{cases}$

61. (МГУ, 1967). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\dfrac{2}{a}-2a\ge 0, \\ ax\ge a^2-2 \end{cases}$$

не имеет решений.

62. Определите значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x-a\ge -1, \\ x^2-3x\le a-1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

63. Определите, при каких значениях параметра a имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+a\le 0, \\ x^2-4x-6a\le 0. \end{cases}$$

64. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0, \\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

65. Определите значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств

$$\begin{cases} y\le ax-x^2-3, \\ x\le ay-y^2-3. \end{cases}$$

Глава 3. Функции, заданные в неявном виде

Неявная функция (иначе – неявно заданная функция) – функция, заданная уравнением

$$F(x;y)=0, \qquad (*)$$

то есть это такая функция $y=f(x)$, что $F(x;f(x))=0$.

Для нахождения этой функции надо решить уравнение (*). Иногда решение приводит к сложным формулам, либо оно неоднозначно ([9], с. 234).

Например, уравнение $xy-3=0$ задает при $x\neq 0$ неявную функцию, которая имеет явное выражение $y=\frac{3}{x}$. Уравнение $x^2+y^2=4$ задает две неявные функции, $y=-\sqrt{4-x^2}$ или $y=\sqrt{4-x^2}$.

3.1. Формула расстояния между точками

Рассмотрим геометрическую интерпретацию формул или выражений, связанных с геометрическим смыслом формулы расстояния между двумя точками на плоскости, неравенством треугольника.

расстояние между двумя точками

Необходимо вспомнить:

- *формулу расстояния* ρ *между двумя точками* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2):

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2};$$

- *неравенство треугольника* для трех точек плоскости (x_1,y_1), (x_2,y_2) и (x_3,y_3):

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))+\rho((x_2,y_2),(x_3,y_3))\geq$$
$$\geq\rho((x_1,y_1),(x_3,y_3)).$$

Пример 71. *Найти расстояние между точками* $A(4;-3)$ и $M(x-2;\,y+1)$.

Решение. По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$\rho(A;M)=\sqrt{(x-6)^2+(y+4)^2}.$$

уравнение отрезка

Прежде всего, дадим геометрическую интерпретацию следующему уравнению:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – заданные числа, причем $x_1\neq x_2$ и $y_1\neq y_2$ одновременно.

Для этого рассмотрим в некоторой прямоугольной системе координат Oxy (см. рис. 36) точки $M(x;y)$, $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$. Тогда каждое выражение, входящее в формулу, $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$, $\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$ и $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ можно интерпретировать, как расстояние между точками A_1 и M, A_2 и M, A_1 и A_2 соответственно.

Из неравенства треугольника имеем $A_1M+MA_2\geq A_1A_2$, где $A_1M+MA_2=A_1A_2$ тогда и только тогда, когда точка M принадлежит отрезку A_1A_2. Следовательно, этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек отрезка A_1A_2. Поэтому рассматриваемое уравнение можно условно назвать ***«уравнением отрезка»***:

Пример 72. *Определить наименьшее значение выражения*:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2x+4y+5}+$$
$$+\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}.$$

Рассмотрим в системе координат Oxy точки $M(x;y)$, $A_1(-1;-2)$, $A_2(2;3)$ (см.

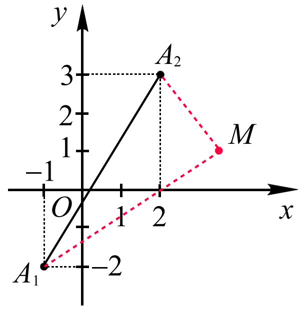


Рис. 36

рис. 36). Тогда $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$ можно интерпретировать, как расстояние между точками M и A_1, а $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$ – как расстояние между точками M и A_2.

Тогда $f(x,y)=A_1M+MA_2$. В соответствии с неравенством треугольника $A_1M+MA_2\ge A_1A_2$, где $A_1M+MA_2=A_1A_2$ только в случае, если точка M принадлежит отрезку A_1A_2. Значит, наименьшее значение суммы A_1M+MA_2 будет равно длине отрезка A_1A_2:

$$A_1A_2=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=5.$$

Ответ: 5.

Пример 73. (МИОО, 2011). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}=|a|\sqrt{10},\\ y=ax+a^2-9\end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение. При $a=0$ система имеет вид $\begin{cases}2\sqrt{x^2+y^2}=0,\\ y=-9.\end{cases}$ В этом случае система уравнений решений не имеет.

Пусть $a\ne 0$. Рассмотрим систему координат Oxy (см. рис. 37).

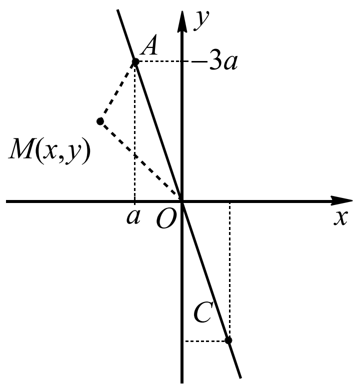


Рис. 37

Левая часть первого уравнения системы представляет собой сумму расстояний от начала координат O до точки $M(x;y)$ и от точки M до точки $A(a;-3a)$, а правая часть – расстояние между точками O и A:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$MA=\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2},\ OA=|a|\sqrt{10}.$$

Так как $OM+MA=OA$, то это равенство возможно тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

Второе уравнение системы задает в системе координат Oxy прямую. Отрезок OA будет иметь более одной общей точки с прямой $y=ax+a^2-9$, только в случае, если отрезок лежит на этой прямой. Таким образом, координаты точек $A(a;-3a)$ и $O(0;0)$ должны удовлетворять второму уравнению системы $y=ax+a^2-9$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получим:

$$\begin{cases}-3a=a^2+a^2-9,\\ 0=a^2-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a=a^2,\\ a^2=9\end{cases}\Leftrightarrow a=-3.$$

Ответ: -3.

3.2. Уравнение прямой

• Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(0;b)$:

$$y=kx+b.$$

• Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$

• Уравнение прямой в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ \ (a\ne 0, b\ne 0).$$

• Уравнение

$$ax+by+c=0,$$

где $a^2+b^2>0$, задает на координатной плоскости прямую.

• Уравнение

$$|ax+by+c|=m,$$

где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0$, задает на координатной плоскости две параллельные прямые. В частности, прямые $|by+c|=m$

параллельны оси Ox, а прямые $|ax+c|=m$ параллельны оси Oy.

• Уравнение

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

где $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\neq 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение

$$|a_1x+b_1y+c_1|=|a_2x+b_2y+c_2|,$$

где $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\neq 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости две пересекающиеся прямые.

• Уравнение

$$|a_1x+b_1y+c_1|=a_2x+b_2y+c_2,$$

где $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\neq 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество точек угла, не включая внутренние точки. В частности, задает угол $y=|a_1x+c_1|-c_2$ с осью симметрии, параллельной оси Oy, и угол $x=|b_1y+c_1|-c_2$ с осью симметрии, параллельной оси Ox.

пучок прямых

Уравнение ***пучка прямых***, проходящих через точку (x_0,y_0): $y-y_0=k(a)(x-x_0)$, где множитель $k(a)$ – угловой коэффициент указанных прямых, в котором при изменении значений параметра прямые, получаются друг из друга поворотом на соответствующий угол относительно точки (x_0,y_0) (***центр поворота***).

Пример 74. (МИОО, 2010). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} y^2+xy-7x-14y+49=0,\\ y=ax+1,\\ x\geq 3\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Группируя члены в левой части первого уравнения системы, ее можно разложить на множители

$$y^2+xy-7x-14y+49=$$
$$=(y^2-14y+49)+(xy-7x)=$$
$$=(y-7)^2+x(y-7)=(y-7)(y+x-7).$$

Тогда первое уравнение системы равносильно совокупности двух линейных уравнений

$$y^2+xy-7x-14y+49=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=7,\\ y=-x+7.\end{array}\right.$$

Второе уравнение системы $y=ax+1$ задает семейство прямых, проходящих через точку с координатами $(0;1)$.

Исходная система будет иметь единственное решение при тех значениях параметра a, при которых соответствующая прямая из этого семейства имеет только одну точку пересечения с прямой $y=7$ или прямой $y=-x+7$ в полуплоскости, расположенной правее прямой $x=3$ (см. рис. 38).

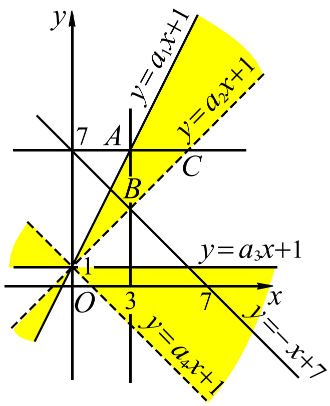


Рис. 38

Имеется четыре критических положения для прямых $y=ax+1$:

I. Прямая $y=a_1x+1$ проходит через точку $A(3;7)$. Из уравнения $7=3a_1+1$ получаем $a_1=2$.

II. Прямая $y=a_2x+1$ проходит через точку пересечения прямых $x=3$ и $y=-x+7$ с координатами $B(3;4)$. Из уравнения $4=3a_2+1$ получаем $a_2=1$.

III. Прямая $y=a_3x+1$ параллельна прямой $y=7$, т.е. $a_3=0$.

IV. Прямая $y=a_4x+1$ параллельна прямой $y=-x+7$, т.е. $a_4=-1$.

Соответственно, данная в условии система будет иметь единственное решение, если прямая $y=ax+1$ будет проходить в области на плоскости Oxy выделенной фоном, что соответствует значениям параметра $-1<a\leq 0$ или $1<a\leq 2$.

Ответ. $(-1;0]\cup(1;2]$.

прямая и области на координатной плоскости

• Прямая

$$ax+by+c=0,$$

где $a^2+b^2>0$, разбивает координатную плоскость на две открытые полуплоскости так, что координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют неравенству $ax+by+c>0$, а другой – неравенству $ax+by+c<0$.

• Неравенство

$$|ax+by+c|\le m,$$

где $m>0$ и $a^2+b^2\ne 0$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек «полосы», включая границы. В частности, «полоса» $|by+c|\le m$ параллельна оси Ox, а «полоса» $|ax+c|\le m$ параллельна оси Oy.

• Неравенство

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\le 0$$

$$(\text{или } (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\ge 0),$$

где $a_i^2+b_i^2\ne 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

• Неравенство

$$|a_1x+b_1y+c_1|\le|a_2x+b_2y+c_2|,$$

где $a_i^2+b_i^2\ne 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек вертикальных углов, включая границы.

• Неравенство

$$|a_1x+b_1y+c_1|\le a_2x+b_2y+c_2,$$

где $a_i^2+b_i^2\ne 0$ $(i=1;2)$, $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек угла, включая границы.

Пример 75. *Найти все такие значения параметра* a, *при каждом из которых система неравенств*

$$\begin{cases}(2a+1)x+2y\ge 4a+1,\\ 4x+(3a-4)y\le 3,\\ (2a-3)x+5y\le 4a\end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти это решение.

Решение. При фиксированном значении a каждое неравенство системы определяет на плоскости xOy полуплоскость вместе с границей. Для того чтобы эти полуплоскости имели единственную общую точку, необходимо, чтобы прямые, их ограничивающие, пересеклись в одной точке. В соответствующей системе линейных уравнений

$$\begin{cases}(2a+1)x+2y=4a+1,\\ 4x+(3a-4)y=3,\\ (2a-3)x+5y=4a\end{cases}$$

исключим x и y. Для этого удобнее из первого и третьего уравнений найти x и y и подставить полученные выражения во второе уравнение. Получим уравнение

$$42a^2-17a-25=0$$

с корнями $a=1$ или $a=-\dfrac{25}{42}$. Рассматривая графические решения неравенств системы (см. рис. 39), получаем, что при $a=1$ система неравенств имеет единственное решение $x=1$ и $y=1$.

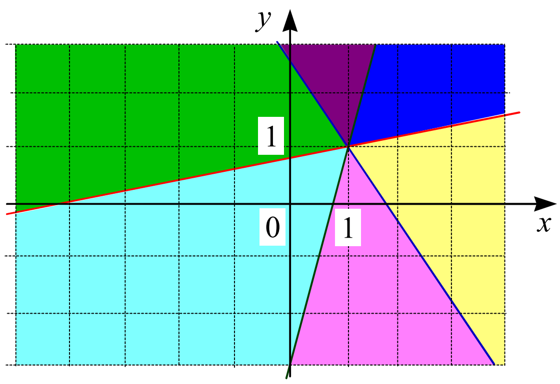


Рис. 39

Если $a=-\frac{25}{42}$, то система неравенств имеет бесконечное множество решений.

Ответ. $a=1$; $x=1$ и $y=1$.

Пример 76. *При каких значениях a фигура, задаваемая неравенствами*

$$\begin{cases} y \ge |x-a|+a^2-4a, \\ y \le -|x-a|-a^2+2a \end{cases}$$

имеет наибольшую площадь? Найти эту площадь.

Решение. Первое неравенство задает на координатной плоскости (см. рис. 40) прямой угол с вершиной $(a; a^2-4a)$, второе неравенство – прямой угол с вершиной $(a; -a^2+2a)$. Общая часть (в общем случае квадрат) будет при условии $-a^2+2a \ge a^2-4a$. Отсюда $a \in [0;3]$.

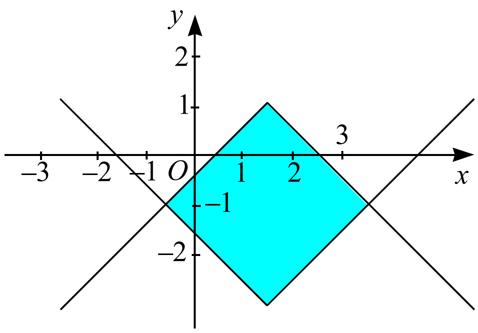


Рис. 40

Диагональ квадрата равна

$$d = |(-a^2+2a)-(a^2-4a)| = |2a^2-6a|.$$

Площадь квадрата

$$S(a)=\frac{1}{2}d^2=2(a^2-3a)^2$$

на промежутке $[0;3]$ принимает наибольшее значение $\frac{81}{8}$ при $a=\frac{3}{2}$ (покажите самостоятельно с помощью производной).

Ответ. $a=\frac{3}{2}; S=\frac{81}{8}$.

Пример 77. (**ЕГЭ, 2011**). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} x^2+(4a+5)x+3a^2+5a<0, \\ x^2+a^2=25 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Разложим левую часть неравенства системы на множители. Для этого решим квадратное уравнение

$$x^2+(4a+5)x+3a^2+5a=0$$

используя формулу

$$x_{1,2}=\frac{-(4a+5)\pm\sqrt{(4a+5)^2-4(3a^2+5a)}}{2}=$$
$$=\frac{-(4a+5)\pm(2a+5)}{2},$$

или применяя обратную теорему Виета. Получаем $x_1=-3a-5$, $x_2=-a$. Тогда

$$x^2+(4a+5)x+3a^2+5a=(x+3a+5)(x+a).$$

Геометрическое место точек F плоскости Oax, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x+3a+5)(x+a)<0$$

есть пара вертикальных углов на плоскости Oax с вершиной в точке $A(-2{,}5; 2{,}5)$ (см. рис. 41).

Уравнение системы задает окружность ω радиуса 5 с центром в точке $(0; 0)$.

Решение системы – координаты точек дуг окружности, лежащих в множестве F. Абсциссы концов этих дуг находятся из систем

$$\begin{cases} x+3a+5=0, \\ x^2+a^2=25 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+a=0, \\ x^2+a^2=25. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $a=-3, a=0$. Из второй системы получаем $a=-\frac{5\sqrt{2}}{2}, a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, система будет иметь решение при всех значениях $a \in \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -3\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

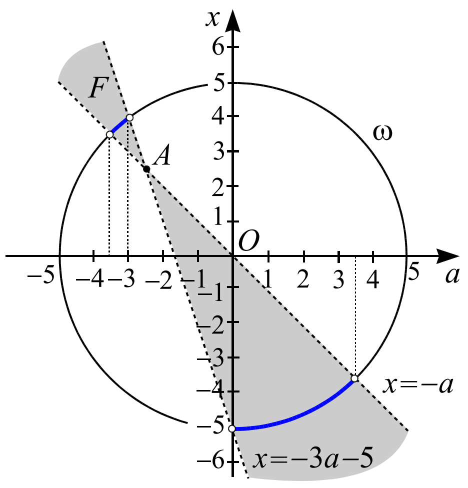


Рис. 41

Ответ. $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-3\right];\left(0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

расстояние от точки до прямой

Формула расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ *до прямой* l*, заданной на координатной плоскости* Oxy *уравнением* $ax+by+c=0$:

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Формулу $(*)$ легко получить из формулы расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением $ax+by+cz+d=0$ ([2], стр. 116):

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (**)$$

Действительно, уравнение

$$ax+by+d=0$$

задает плоскость α, перпендикулярную плоскости Oxy. Пересекая плоскость α плоскостями $z=c$, получаем прямые. В случае $z=0$ получаем прямую, заданную на плоскости Oxy уравнением $ax+by+d=0$. Поэтому расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $ax+by+d=0$ в плоскости Oxy равно расстоянию от точки $M(x_0, y_0, 0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+d=0$. Отсюда из формулы $(**)$ получаем формулу $(*)$.

Пример 78. *Найти расстояние от центра окружности* $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ *до прямой* $2x-3y-1=0$.

Решение. Так как центр окружности имеет координаты $(2;-1)$, то по формуле $(*)$ получаем

$$\rho=\frac{|2\cdot 2-3\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

3.3. Уравнение окружности

Уравнение

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

где x_0, y_0, R – заданные числа, причем $R>0$, задает на координатной плоскости ***окружность*** ω ***радиуса R с центром в точке*** (x_0, y_0).

Рассмотрим интерпретации некоторых уравнений окружности с параметром a:

- уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ задает на координатной плоскости семейство окружностей с общим центром (x_0, y_0) радиуса $R=|a|$ при $a\neq 0$; если $a=0$, то саму точку (x_0, y_0);
- уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a$ задает на координатной плоскости семейство окружностей с общим центром (x_0, y_0) радиуса $R=\sqrt{a}$ при $a>0$; если $a=0$, то саму точку (x_0, y_0);
- уравнение $(x-a)^2+(y-a)^2=R^2$ задает на координатной плоскости семейство окружностей одинакового радиуса R с центрами $(a;a)$, расположенными на прямой $y=x$;
- уравнение $(x-a)^2+(y-a^2)^2=R^2$ задает на координатной плоскости семейство окружностей одинакового радиуса R с центрами $(a;a^2)$, расположенными на параболе $y=x^2$.

взаимное расположение окружности и прямой (отрезка)

Напомним из геометрии некоторые утверждения о взаимном расположении окружности и прямой.

- *Окружность и прямая не имеют общих точек, если расстояние a от центра окружности до прямой больше радиуса r этой окружности* $(a > r)$.
- *Окружность и прямая имеют ровно одну общую точку, если расстояние a от центра окружности до прямой равно радиусу r этой окружности* $(a = r)$.
- *Окружность и прямая имеют две общие точки, если расстояние a от центра окружности до прямой меньше радиуса r этой окружности* $(a < r)$.

Пример 79. *Найти все значения а, при которых система уравнений*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10,\\ x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет два решения.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10.$$

Пусть $M(x;y)$ – точка координатной плоскости Oxy (см. рис. 42), тогда левая часть этого уравнения есть сумма расстояний от точки M до точек $M_1(-8;0)$ и $M_2(0;6)$.

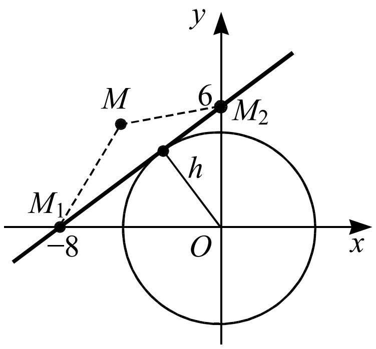


Рис. 42

Так как расстояние между точками M_1 и M_2 равно 10, то координаты точки M удовлетворяют первому уравнению системы в том и только в том случае, когда M лежит на отрезке M_1M_2. В самом деле, если M не принадлежит прямой M_1M_2, то указанная сумма расстояний больше 10 (неравенство треугольника). В случае, когда точка M лежит на прямой M_1M_2 вне отрезка M_1M_2, эта сумма также больше 10.

Второе уравнение системы $x^2+y^2=a^2$ задает семейство окружностей радиуса $|a|$ с центром в точке O. Условию задачи будет удовлетворять окружность, имеющая две общие точки с отрезком M_1M_2. Это возможно, если радиус окружности $|a|$ будет больше радиуса, при котором окружность касается отрезка M_1M_2. В случае касания $|a|=h$, где h – высота в треугольнике OM_1M_2, опущенная из точки O на M_1M_2 (см. рис. 42), $h=\dfrac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$. В другом случае радиус окружности $|a|$ меньше или равен радиусу окружности, проходящей через точку M_2, т.е. $|a|\le 6$. Следовательно $4{,}8<|a|\le 6$.

Ответ. $-6\le a<-4{,}8$, $4{,}8<a\le 6$.

Пример 80. (МИОО, 2011). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}|x+2y+1|\le 11,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Геометрическое место точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству системы, представляет полосу с границами-прямыми $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

Рассмотрим уравнение системы. При $a<-2$ уравнение не определено.

Если $a=-2$, то уравнение $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ задает точку $C(-2;-4)$, принадлежащую полосе, так как выполняется неравенство $|-2-8+1|\le 11$ (см. рис. 43).

При $a>-2$ уравнение системы задает окружность ω с центром $M(a;2a)$ и радиусом $r=\sqrt{2+a}$. Окружность будет иметь единственную точку с полосой, если она будет касаться полосы, и центр ее при этом будет лежать вне полосы.

Используя формулу расстояния от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой *l*, заданной на координатной плоскости Oxy уравнением $ax+by+d=0$, получим:

а) расстояние от центра $M(a;2a)$ окружности ω до прямой $x+2y-10=0$ равно радиусу $r=\sqrt{2+a}$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{|a+4a-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a} \text{ или } 5a^2-21a+18=0,$$

имеющее корни $a=1{,}2$ или $a=3$;

При $a=1{,}2$ точка $M(1{,}2;2{,}4)$ лежит внутри полосы, поскольку $|1{,}2+4{,}8+1|=7<11$. При $a=3$ точка $M(3;6)$ лежит вне полосы, так как $|3+12+1|=16>11$.

б) расстояние от центра $M(a;2a)$ окружности ω до второй прямой $x+2y+12=0$ равно радиусу $r=\sqrt{2+a}$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{|a+4a+12|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{2+a} \text{ или } 25a^2+115a+134=0,$$

не имеющее корней.

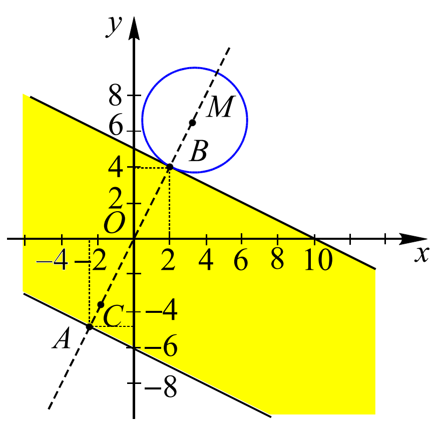


Рис. 43

При $a=1{,}2$ точка $M(1{,}2;2{,}4)$ лежит внутри полосы, поскольку $|x+2y+1|=$ $=1{,}2+4{,}8+1=6{,}1<11$. При $a=3$ точка $M(3;6)$ лежит вне полосы, $|x+2y+1|=$ $=3+12+1=13>11$.

Ответ. $-2;3$.

Замечание. Другой способ решения задачи связан с использованием того факта, что центры семейства окружностей, заданных уравнением системы при $a>-2$, лежат на прямой $y=2x$, пересекающей прямую $x+2y=10$ в точке $B(2;4)$ и прямую $x+2y=-12$ в точке $A(-2{,}4;-4{,}8)$, и перпендикулярной этим прямым. Окружность будет касаться полосы в точках *A* или *B*, при этом в первом случае абсцисса центра окружности $a<-2{,}4$, а во втором – $a>2$. Точка *A* не удовлетворяет условию задачи, так как значение $a<-2{,}4$. Так как точка $B(2;4)$ принадлежит окружности, то

$$(2-a)^2+(4-2a)^2=a+2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $5a^2-21a+18=0$, корни которого $a=1{,}2$ (не удовлетворяет условию $a>2$) или $a=3$.

Пример 81. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}|x+y-2|<x-y,\\(x-a)^2+(y-a)^2=4\end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Неравенство системы равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}x+y-2\ge 0,\\x+y-2<x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 2-x,\\y<1.\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}x+y-2<0,\\-x-y+2<x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<2-x,\\x>1.\end{cases}$$

Таким образом, неравенство системы задает множество внутренних точек прямого угла без границ (см. рис. 44). Уравнение системы задает окружность радиуса 2 с центром $(a;a)$, расположенным на прямой $y=x$.

Рассмотрим два особых случая расположения окружности.

Пусть окружность касается прямой $x=1$ в точке *A*. Из прямоугольного равнобедренного треугольника *MAP* определяем координаты центра окружности $M(-1;-1)$ и значение $a=-1$.

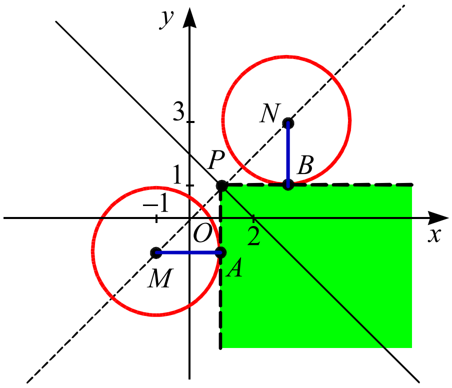


Рис. 44

Пусть окружность касается прямой $y=1$ в точке *B*. Из прямоугольного равнобедренного треугольника *BPN* определяем координаты центра окружности $N(3;3)$ и значение $a=3$.

Окружность имеет общие точки с точками угла при $a\in(-1;3)$.

Ответ. $(-1;3)$.

взаимное расположение окружности и пучка прямых

Пример 82. (ЕГЭ, 2011). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система*

$$\begin{cases}(|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение системы задает фигуру F, состоящую из четырех окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 радиуса 2 с центрами в точках $C_1(6;6)$, $C_2(-6;6)$, $C_3(-6;-6)$ и $C_4(6;-6)$ соответственно (см. рис. 45).

Второе уравнение системы $y=ax+1$ задает семейство прямых, каждая из которых проходит через точку с координатами $(0;1)$ и имеет угловой коэффициент, равный a.

Окружности ω_2 и ω_4 расположены соответственно во II и IV квадрантах, поэтому координаты x и y точек, лежащих на ω_2 и ω_4 имеют разные знаки и $xy<0$.

С учетом выполнения условия $xy>0$, задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых прямая пучка имеет единственную общую точку с какой-нибудь из окружностей ω_1 или ω_3 и не имеет общих точек с другой.

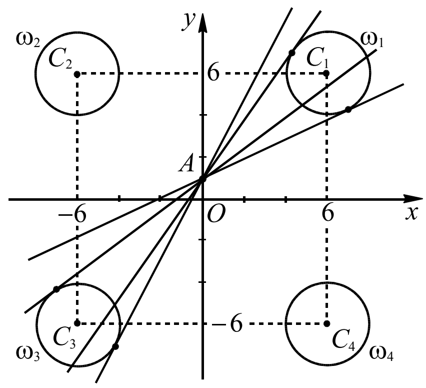


Рис. 45

Значения параметра a, при которых прямые пучка имеют общие точки с ω_1, соответствуют значениям a, при которых имеет решение система уравнений

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=4,\\ y=ax+1.\end{cases}$$

Подставляя $y=ax+1$ в первое уравнение, получаем уравнение

$$(1+a^2)x^2-(12+10a)x+57=0,$$

имеющее решение при a таких, что $\frac{15-\sqrt{57}}{16}\le a\le\frac{15+\sqrt{57}}{16}$. При $a_1=\frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $a_2=\frac{15+\sqrt{57}}{16}$ прямые являются касательными к окружности ω_1, т.е. имеют с ней одну общую точку.

Для окружности ω_3 получаем систему

$$\begin{cases}(x+6)^2+(y+6)^2=4,\\ y=ax+1.\end{cases}$$

Подставляя $y=ax+1$ в уравнение окружности, получаем уравнение

$$(1+a^2)x^2+(12+14a)x+81=0,$$

имеющее решение при $\frac{3}{4} \le a \le \frac{15}{8}$.

При $a_3 = \frac{3}{4}$ и $a_4 = \frac{15}{8}$ прямые являются касательными к окружности ω_3, т.е. имеют с ней одну общую точку.

Так как $a_1 < a_3 < a_2 < a_4$, то единственную общую точку с окружностями ω_1 и ω_2, прямые имеют при $a = a_1 = \frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $a = a_4 = \frac{15}{8}$. Соответственно исходная система в этих случаях имеет единственное решение.

Ответ. $\frac{15-\sqrt{57}}{16}$ и $\frac{15}{8}$.

взаимное расположение окружности и угла

Пример 83. *Найти значения параметра а, при которых система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 1 с центром (0; 0). Второе уравнение $y = |x| + a$ задает семейство «уголков» с вершиной на оси Oy (см. рис. 46). Так как выражения $x^2 + y^2$ и $y - |x|$ не меняются при замене x на $-x$, то графики уравнений системы имеют общую ось симметрии $x = 0$.

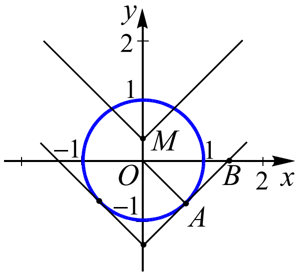


Рис. 46

Рассмотрим случай касания окружности и угла. Так как $\angle AOB = 45°$, $OA = AB = 1$, $OB = \sqrt{2}$, то $a = -\sqrt{2}$.

Из рисунка видно, что условию задачи удовлетворяют следующие значения $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Ответ: $\{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Пример 84. (ЕГЭ, 2011). *Найти все значения а, при каждом которых система*

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 3 с центром в точке $O(4; 4)$.

Второе уравнение системы задает прямой угол с вершиной в точке $(a; 1)$ и симметричной относительно прямой $x = a$ (см. рис. 47).

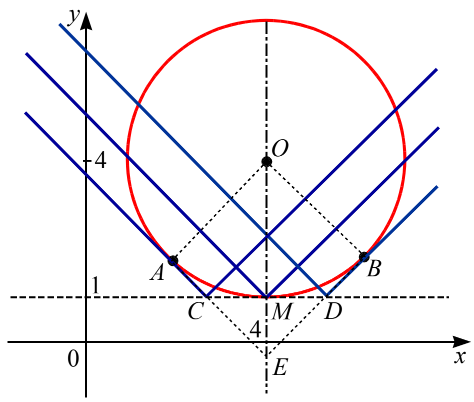


Рис. 47

Прямая $y = 1$ является касательной к окружности.

Ровно три точки заданные фигуры имеют в трех случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой $y = 1$ (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при $a = 4$.

2. Одна из сторон угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности. Таких случаев два.

Четырехугольник $AOBE$ – квадрат (см. рис. 47), симметричный относительно прямой $x = a$, со стороной, равной радиусу окружности 3, и диагональю $3\sqrt{2}$.

$$MD = MC = OE - OM = 3\sqrt{2} - 3.$$

Абсциссы точек C и D соответствуют искомым значениям параметра a. Следовательно, условию задачи соответствуют $a = 4 - (3\sqrt{2} - 3) = 7 - 3\sqrt{2}$ или $a = 4 + (3\sqrt{2} - 3) = 1 + 3\sqrt{2}$.

Ответ: $7 - 3\sqrt{2}$, 4 и $1 + 3\sqrt{2}$.

взаимное расположение двух окружностей

Напомним из геометрии некоторые утверждения о взаимном расположении двух окружностей.

- *Расстояние d между центрами касающихся окружностей радиусов R и r $(R \geq r)$ равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.*
- *Две окружности радиусов R и r $(R \geq r)$ пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние d между их центрами меньше, чем $r + R$, но больше, чем $R - r$.*
- *Если расстояние d между центрами двух окружностей радиусов R и r $(R > r)$ больше суммы $(R + r < d)$ или меньше разности $(R - r > d)$ их радиусов, то окружности не имеют общих точек.*

Пример 85. (ЕГЭ, 2011). *Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=4,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. При $x \geq 0$ первое уравнение системы имеет вид $(x-5)^2+(y-4)^2=4$ и задает окружность ω_1 радиуса 2 с центром в точке $C_1(5;4)$, а при $x<0$ – имеет вид $(x+5)^2+(y-4)^2=4$ и задает окружность ω_2 радиуса 2 с центром в точке $C_2(-5;4)$ (см. рис. 48).

Второе уравнение системы при положительных значениях параметра a задает окружность ω радиуса a с центром в точке $C(2;0)$.

Задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых окружность ω имеет единственную общую точку с непересекающимися окружностями ω_1 и ω_2. Это возможно, если окружность ω касается внешним или внутренним образом с одной из окружностей ω_1 и ω_2, и при этом не имеет общих точек с другой.

Так как точка касания и центры двух касающихся окружностей лежат на одной прямой, то проведем лучи CC_1 и CC_2, и обозначим A_1 и B_1 точки касания окружностей ω и ω_1, а A_2 и B_2 точки касания окружностей ω и ω_2.

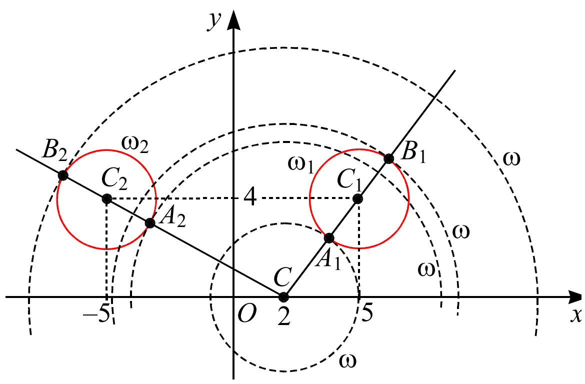


Рис. 48

Так как $CC_1=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=5$, а $CC_2=\sqrt{(-5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{65}$, то

$$a_1=CA_1=CC_1-C_1A_1=5-2=3,$$

$$a_2=CB_1=CC_1+C_1B_1=5+2=7,$$

$$a_3=CA_2=CC_2-C_2A_2=\sqrt{65}-2,$$

$$a_4=CB_2=CC_2+C_2A_2=\sqrt{65}+2.$$

Заметим, что при $a<a_1$ и $a>a_2$ окружности ω и ω_1 не пересекаются, при $a_1<a<a_2$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки, а при $a=a_1$ и $a=a_2$ окружности касаются.

Аналогично при $a<a_3$ и $a>a_4$ окружности ω и ω_2 не пересекаются, при $a_3<a<a_4$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки, а при $a=a_3$ и $a=a_4$ окружности касаются.

Так как $a_1<a_3<a_2<a_4$, то условию удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3 и $\sqrt{65}+2$.

Пример 86. (Аналог **МФТИ**, **2006**). *При каких значениях параметра t система уравнений*

$$\begin{cases}(x-1-4t)^2+(y-1-3t)^2=9t^2,\\ (x-5)^2+(y-3)^2=4\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. При $t=0$ первое уравнение системы $(x-1)^2+(y-1)^2=0$ имеет решение $(1;1)$, которое не удовлетворяет второму уравнению системы. Пусть $t\neq 0$, тогда первое уравнение системы задает окружность ω с центром в точке с координатами $(x_0;\,y_0)=(1+4t;1+3t)$ радиуса $r=3\,|\,t\,|$. Так как $x_0=1+4t$, а $y_0=1+3t$, то получаем, что x_0 и y_0 связаны уравнением $y_0=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x_0$, т.е. центр этой окружности лежит в плоскости Oxy на прямой $y=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x$ и окружность при каждом значении t касается прямой $y=1$.

Второе уравнение системы задает окружность ω_1 с центром в точке с координатами $C(5;3)$ радиуса 2, которая также касается прямой $y=1$ (см. рис. 49).

Единственное решение данная система уравнений будет иметь, если окружности ω и ω_1 будут касаться внутренним или внешним образом.

В случае внешнего касания расстояние между центрами равно сумме радиусов окружностей. Это задается уравнением

$$\sqrt{(1+4t-5)^2+(1+3t-3)^2}=3\,|\,t\,|+2$$

или

$$\sqrt{25t^2-44t+20}=3\,|\,t\,|+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16t^2-44t-12\,|\,t\,|+16=0\,.$$

Полученное уравнение $t^2-2t+1=0$ при $t<0$ корней не имеет, а при $t\geq 0$ имеет два корня $t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$.

В случае внутреннего касания, учитывая то, что обе окружности касаются прямой $y=1$, а это возможно только, если их точка касания имеет координаты $(5;1)$, получаем, что точки $(1+4t;1+3t)$ и $(5;3)$ лежат на перпендикуляре к прямой $y=1$, проходящем через точку $A(5;1)$ (см. рис. 49). Отсюда следует, что $1+4t=5$, т.е. $t=1$.

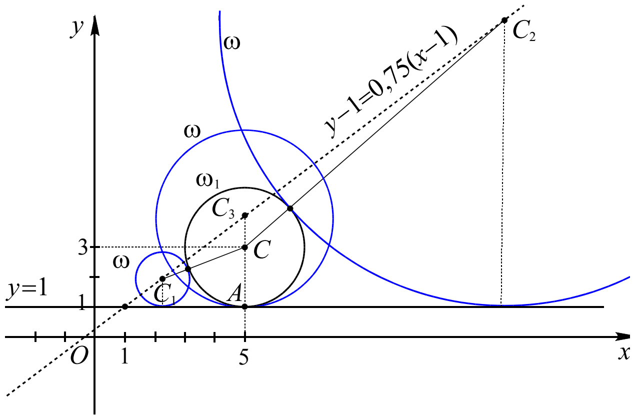


Рис. 49

Ответ: $\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$ и 1.

взаимное расположение окружности и произвольной кривой

Напомним некоторые уравнения парабол.

Функция $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ задает на координатной плоскости параболу с вершиной в точке $(x_0;y_0)$ и осью симметрии $x=x_0$.

Функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$ $(a\neq 0)$ задает на координатной плоскости параболу с вершиной в точке $(x_0;y_0)$ и осью симметрии $x=x_0$.

Пример 87. (Аналог, **вариант № 51 от ФЦТ**, **ЕГЭ 2011**). *Определить в зависимости от значений параметра a количество решений системы уравнений*:

$$\begin{cases}x^2+12x+|\,y\,|+27=0,\\ x^2+(y-a)(y+a)=-12(x+3).\end{cases}$$

Решение. Приведем данную систему уравнений к следующему виду

$$\begin{cases}|\,y\,|=9-(x+6)^2,\\ (x+6)^2+y^2=a^2.\end{cases}$$

Первое уравнение системы задает фигуру F, состоящую из частей парабол $y=9-(x+6)^2$ при $y\geq 0$, и

$y=(x+6)^2-9$ при $y<0$, (их вершины $(-6;9)$ и $(-6;-9)$). Второе уравнение системы задает семейство окружностей ω (при $a\ne 0$) с центром $(-6;0)$ и радиусом $r=|a|$ (см. рис. 50).

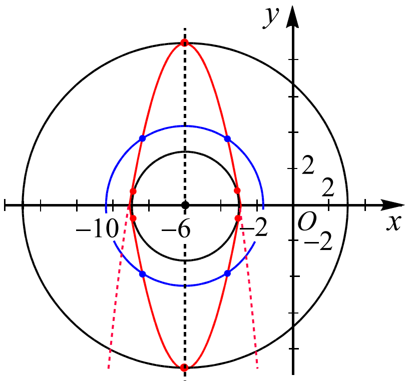


Рис. 50

Фигура F и окружности ω имеют оси симметрии $x=-6$ и $y=0$. Отсюда следует, что если пара $(x_0;y_0)$ – решение системы, то пары $(x_0;-y_0)$, $(12-x_0;y_0)$ и $(12-x_0;-y_0)$ также решения.

В силу симметрии фигур достаточно рассмотреть только случай $0\le y\le 9$. Тогда система будет иметь вид

$$\begin{cases} y=9-(x+6)^2,\\ (x+6)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Исключая переменную x, получим:

$$y^2-y+9-a^2=0.\ (*)$$

Дискриминант $D=4a^2-35$. При $D<0$, т.е. $|a|<\frac{\sqrt{35}}{2}$, уравнение (∗), а значит и исходная система решений не имеют. При $D=0$, т.е. $|a|=\frac{\sqrt{35}}{2}$, уравнение (∗) имеет единственный корень $y=0{,}5$ (что соответствует четырем решениям системы).

Пусть $D>0$, т.е. $|a|>\frac{\sqrt{35}}{2}$.

а) Если оба корня уравнения (∗) положительны, то в соответствии с теоремой Виета имеем

$$\begin{cases} |a|>\frac{\sqrt{35}}{2}\\ 9-a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{35}}{2}<|a|<3.$$

В этом случае система будет иметь восемь решений.

б) Пусть один из корней равен нулю, тогда $9-a^2=0\Leftrightarrow a=\pm 3$. При $|a|=3$ уравнение (∗) имеет корни 0 и 1, следовательно, система имеет шесть различных решений.

в) Если корни уравнения (∗) разных знаков, то $9-a^2<0$ или $|a|>3$.

При $3<|a|<9$ уравнение (∗) имеет положительный корень $y_1=\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-\frac{35}{4}}\le 9$ и отрицательный $y_2=\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-\frac{35}{4}}<0$. Значит, система будет иметь четыре решения.

При $|a|=9$ $y=9$ и, следовательно, система имеет два решения.

При $|a|>9$ уравнение (∗) имеет положительный корень $y_1=\frac{1}{2}+\sqrt{a^2-\frac{35}{4}}>9$ и отрицательный $y_2=\frac{1}{2}-\sqrt{a^2-\frac{35}{4}}<0$. Система не имеет решений.

Ответ: при $a\in(-\infty;-9)\cup\left(-\frac{\sqrt{35}}{2};\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\cup$ $\cup(9;+\infty)$ решений нет; при $a=\pm 9$ два решения; при $a\in(-9;-3)\cup\left\{-\frac{\sqrt{35}}{2};\frac{\sqrt{35}}{2}\right\}\cup(3;9)$ – четыре решения; при $a=\pm 3$ – шесть решений; при $a\in\left(-3;-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{35}}{2};3\right)$ – восемь.

Пример 88. *Найти все значения a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} \sqrt{|x-3|}+\sqrt{|y-1|}=4,\\ x^2-6x+y^2-2y=16a^2-10 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Сделаем замену $u=x-3$ и $v=y-1$, получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{|u|}+\sqrt{|v|}=4,\\ u^2+v^2=16a^2. \end{cases}$$

Количество решений в зависимости от параметра для новой системы не изменится, так как эта замена связана с перемещением графиков (центр симметрии графиков теперь находится в начале координат).

График второго уравнения – окружность с центром (0;0) радиуса $4|a|$. График первого уравнения симметричен относительно координатных осей *u* и *v*. Достаточно построить график уравнения $\sqrt{|u|}+\sqrt{|v|}=4$ и далее отобразить относительно координатных осей. График последнего уравнения расположен в первом координатном углу (самостоятельно исследуйте функцию вида $y=(4-\sqrt{x})^2$).

Четыре общие точки получим в двух случаях расположения окружности (см. рис. 51). В одном случае окружность проходит через точку (16;0). Тогда из второго уравнения системы получим $a=\pm 4$. Для второго случая общая точка лежит на биссектрисе первого координатного угла, то есть $u=v$. Получим из системы $a=\pm\sqrt{2}$.

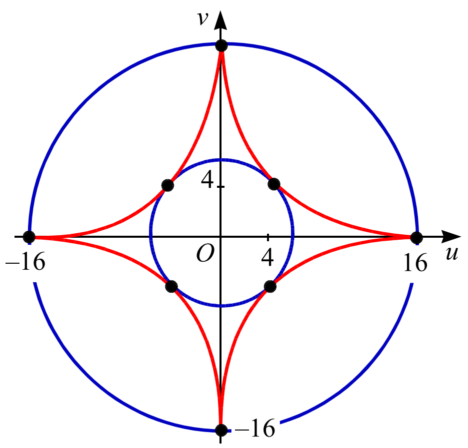


Рис. 51

Ответ. $\pm\sqrt{2};\pm 4$.

окружность и области на координатной плоскости

Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне окружности, удовлетворяют неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>R^2$, а расположенных внутри окружности – неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$.

Пример 89. (МИОО, 2010). *Найти все пары* $(x;y)$ *целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21. \end{cases} \qquad (*)$$

Геометрическое место точек F_1 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы – внутренние точки круга радиуса $\sqrt{15}$ с центром $O_1(9;-10)$ (см. рис. 52).

Геометрическое место точек F_2 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы – внутренние точки круга радиуса $\sqrt{21}$ с центром $O_2(16;-6)$.

Поскольку $\sqrt{15}<4$, а $\sqrt{21}<5$, то из первого неравенства получаем $(x-9)^2<15$ или, что $5<x<13$, а из второго $(x+6)^2<21$ или $11<x<21$. Следовательно, только одно целое значение $x=12$ удовлетворяет обоим неравенствам.

Подставляя $x=12$ в систему (*), получим с учетом того, что $y\in\mathbf{Z}$:

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y+10<2, \\ -2\le y+6\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow y=-8.$$

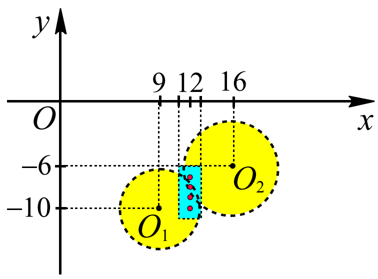


Рис. 52

Ответ. $(12;-8)$.

Пример 90. *При каких значениях параметра a система неравенств*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y \le a^2 - 5, \\ x^2 + y^2 - 8x - 14y \ge 4a^2 + 12a - 56 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Данную систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \le a^2, \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 \ge (2a+3)^2. \end{cases}$$

При $a = 0$ система примет вид

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \le 0, \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 \ge 3^2 \end{cases}$$

и будет иметь единственное решение $(-2; -1)$.

При $a \ne 0$ первое неравенство системы задает круг радиуса $|a|$ с центром в точке $A(-2;-1)$, второе неравенство – внешность круга радиуса $|2a+3|$ с центром в точке $B(4;7)$, включая и границу этого круга. При $a = -1{,}5$ второму неравенству системы удовлетворяют координаты всех точек плоскости.

Расстояние между центрами этих кругов равно

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (7+1)^2} = 10.$$

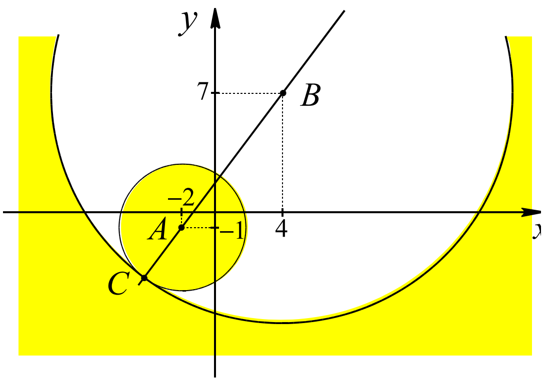


Рис. 53

Единственное решение система будет иметь в случае, если круг с центром в точке A содержится внутри круга с центром в точке B и касается его границы. В этом случае круги касаются, и координаты точки касания C – единственное решение системы (см. рис. 53). Данная ситуация возможна, если

$$|a| + 10 = |2a+3|.$$

Решая последнее уравнение, получим $a = -13$ и $a = 7$.

Ответ. $-13; 0; 7$.

Пример 91. *При каких значениях параметра a система неравенств*

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 \le a^2, \\ 2y - x \ge 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Геометрическое место точек F_1 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, есть круг с центром $M(a; a)$ и радиусом $r = |a|$.

Геометрическое место точек F_2 плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы, представляет верхнюю полуплоскость с границей $-x + 2y - 4 = 0$ (см. рис. 54).

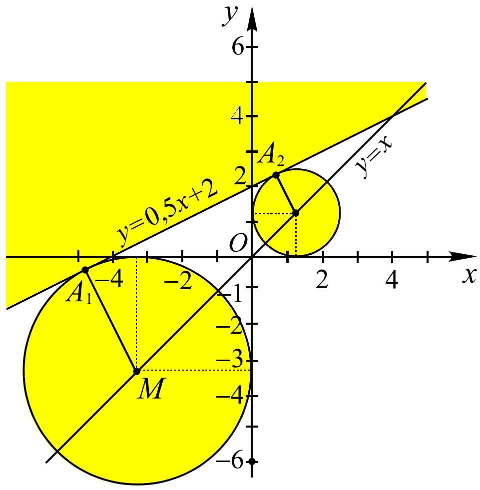


Рис. 54

При $a = 0$ система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 0, \\ 2y - x \ge 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

С увеличением значения $|a|$ радиус круга увеличивается, причем круг перемещается вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$.

Данная система неравенств будет иметь хотя бы одно решение, если множества F_1 и F_2 будут иметь хотя бы одну общую точку. При увеличении радиуса при некоторых значениях $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$ круг коснется прямой $-x+2y-4=0$, а при дальнейшем увеличении $|a|$ множества F_1 и F_2 будут иметь общие точки.

Используя формулу расстояния от точки $M(a;a)$ до прямой l, заданной уравнением $-x+2y-4=0$, получим:

$$\rho(M,l)=\frac{|-a+2a-4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{5}}.$$

Значения параметра a, при которых произойдет касание, находим из уравнения $\rho(M,l)=|a|$ или $|a-4|=\sqrt{5}|a|$. Отсюда получаем два решения $a_1=-1-\sqrt{5}$ и $a_2=-1+\sqrt{5}$. Соответственно, условию задачи удовлетворяют все a такие, что

$$a\in(-\infty;-1-\sqrt{5}]\cup[-1+\sqrt{5};+\infty).$$

Ответ. $(-\infty;-1-\sqrt{5}]\cup[-1+\sqrt{5};+\infty)$.

Замечание. Значения параметра a, при которых произойдет касание можно было найти, подставив $y=0{,}5x+2$ в уравнение окружности

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

затем поставить условие равенства нулю дискриминанта.

Пример 92. (ЕГЭ, 2011, пробный экзамен, Смоленск). *Найти все значения a и b такие, что система*

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-6|y|+13-b^2\le 0, \\ y=ax-2\sqrt{8} \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Преобразуем неравенство системы: $(x-2)^2+(|y|-3)^2\le b^2$.

Геометрическое место точек F плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству системы – точки двух кругов радиуса $|b|$ с центрами в точках $O_1(2;3)$ и $O_2(2;-3)$ (см. рис. 55). При $|b|<3$ эти круги не имеют общих точек.

Уравнение системы $y+2\sqrt{8}=ax$ задает пучок прямых, проходящих через точку $A(0;-2\sqrt{8})$ с угловым коэффициентом, равным a.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $|b|\le 2$. Любая прямая пучка, пересекающая какой либо из кругов, будет иметь бесконечно много общих точек с фигурой F. Соответственно, исходная система будет иметь более двух решений. Для того чтобы система имела два решения, прямая пучка должна коснуться обоих кругов, т.е. должна являться их общей касательной. Так как круги имеют равные радиусы и их центры лежат на прямой $x=2$, параллельной оси ординат, то их общие внешние касательные параллельны оси Oy, а их общие внутренние касательные пересекаются в точке $C(2;0)$.

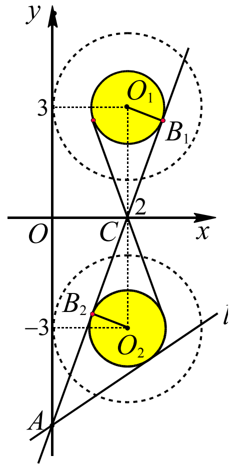


Рис. 55

При $|b|=2$ окружности касаются оси ординат, но не существует такого значения a, при котором прямая, совпадающая с осью Oy, принадлежит пучку, т.е. никакая прямая пучка не может являться внешней касательной к рассматриваемым кругам. Следовательно, только при $|b|<2$ прямая AC пучка может служить внутренней касательной к этим кругам. Найдем значения параметров a и b, в этом случае. Угловой коэффициент прямой AC равен

$$a=\mathrm{tg}\angle OCA=\frac{OA}{OC}=\frac{2\sqrt{8}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Радиус кругов, равный $|b|$, найдем из отношения сторон $\frac{O_1B_1}{OC}=\frac{O_1C}{AC}$ подобных треугольников CO_1B_1 и AOC. Так как $O_1C=3$, $OC=2$, $AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=$ $=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=6$, то

$$O_1B_1 = \frac{O_1C\cdot OC}{AC} = \frac{3\cdot 2}{6} = 1.$$

Из уравнения $|b| = 1$ получаем два значения $b = 1$ и $b = -1$.

2. Пусть $|b| > 2$. В этом случае получим, что при $|b| > O_2A = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{8}-3)^2} = \sqrt{45 - 24\sqrt{2}}$ точка A является внутренней точкой множества F и в этом случае условие задачи не выполняется, а при $2 < |b| \le O_2A$ касательная, проведенная к нижней окружности не пересекает верхнюю окружность.

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$, $b = -1$ или $a = 2\sqrt{2}$, $b = 1$.

3.4. Уравнение параллелограмма

• Уравнение

$$|a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| = m,$$

где $m > 0$ и $a_i^2 + b_i^2 \ne 0$ $(i = 1;2)$, $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости параллелограмм, не включая внутренних точек.

• Уравнение

$$\frac{|x - x_0|}{k} + \frac{|y - y_0|}{l} = 1,$$

где $k > 0, l > 0$, задает на координатной плоскости ромб с центром (x_0, y_0), диагоналями $d_1 = 2k$ и $d_2 = 2l$, параллельными соответственно осям Ox и Oy.

• Уравнение

$$|x| + |y| = k,$$

где $k > 0$, задает на координатной плоскости квадрат с центром $(0; 0)$ и диагональю $d = 2k$, параллельной оси Ox.

Рассмотрим интерпретации некоторых уравнений ромба с параметром a:

• Уравнение

$$\frac{|x - a|}{k} + \frac{|y - a|}{l} = 1,$$

где $k > 0$, $l > 0$, задает на координатной плоскости семейство ромбов с центрами (a, a), расположенными на прямой $y = x$, диагоналями $d_1 = 2k$ и $d_2 = 2l$, параллельными соответственно осям Ox и Oy.

• уравнение $|x - x_0| + |y - y_0| = a$ задает на координатной плоскости семейство квадратов с общим центром (x_0, y_0) и диагональю $d = 2a$, параллельной оси Ox, при $a > 0$; если $a = 0$, то саму точку (x_0, y_0).

Пример 93. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12, \\ y = |x - a| - 1 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы в каноническом виде $\frac{|x|}{4} + \frac{|y|}{3} = 1$ задает ромб с большой полудиагональю 4 на оси Ox и малой полудиагональю 3 на оси Oy. Центр симметрии ромба расположен в начале координат. График уравнения состоит из частей прямых с угловыми коэффициентами $\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{4}$. Второе уравнение системы задает семейство углов с вершиной $(a; -1)$, расположенной на прямой $y = -1$. График второго уравнения состоит из частей прямых с угловыми коэффициентами 1 или –1.

Рассмотрим особые расположения угла и ромба (см. рис. 56).

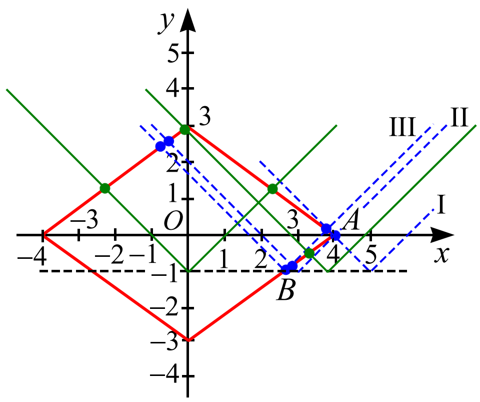


Рис. 56

1. Угол имеет с ромбом одну общую точку $A(4; 0)$, причем точка лежит на прямой $y = a - x - 1$. Из уравнения $0 = a - 4 - 1$ находим $a = 5$.

2. Угол имеет с ромбом общую точку $A(4;0)$, причем точка лежит на прямой $y = x - a - 1$. Из уравнения $0 = 4 - a - 1$ находим $a = 3$. В этом случае ромб и угол имеют три общие точки.

При $a \in (3;5)$ ромб и угол имеют две общие точки.

3. Вершина угла расположена в точке $B\left(\frac{8}{3};-1\right)$ – точке пересечения прямых $3x - 4y = 12$ и $y = -1$. В этом случае $a = \frac{8}{3} < 3$, ромб и угол имеют три общие точки.

При $a \in \left(\frac{8}{3};3\right)$ ромб и угол имеют четыре общие точки.

Пусть $a \geq 0$. Ромб и угол имеют две общие точки при $a \in \left[0;\frac{8}{3}\right) \cup (3;5)$. Аналогично при $a < 0$ получим значения $a \in (-5;-3) \cup \left(-\frac{8}{3};0\right]$.

Ответ. $(-5;-3) \cup \left(-\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right) \cup (3;5)$.

Пример 94. *В зависимости от значений a найти число решений системы*

$$\begin{cases} a|x-1| + a|y-2| = 1, \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y + 4. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ задает на координатной плоскости окружность с центром (1; 2) и радиуса 3 (см. рис. 57).

Так как при $a \leq 0$ первое уравнение системы не имеет решений, то запишем его в виде

$$\frac{|x-1|}{1/a} + \frac{|y-2|}{1/a} = 1.$$

Последнее уравнение при $a > 0$ задает квадрат с центром (1; 2) и полудиагональю $\frac{1}{a}$. Особые значения параметра:

квадрат вписан в окружность, когда $\frac{1}{a} = 3$, то есть $a = \frac{1}{3}$;

квадрат описан около окружности, когда полудиагональ $\frac{1}{a} = 3\sqrt{2}$ (см. прямоугольный треугольник), то есть $a = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Окружность и квадрат не имеют общих точек, если $\frac{1}{a} < 3$ или $\frac{1}{a} > 3\sqrt{2}$; имеют четыре общие точки, если $a = \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{a} = 3\sqrt{2}$; имеют восемь общих точек, если $3 < \frac{1}{a} < 3\sqrt{2}$. Отсюда получим значения параметра a.

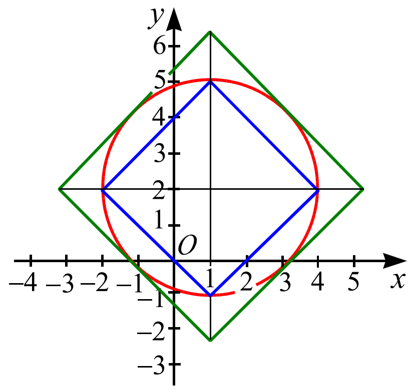


Рис. 57

Ответ. При $a \in \left\{\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3}\right\}$ четыре решения; при $a \in \left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3}\right)$ восемь решений; при $a \in \left(-\infty;\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ нет решений

взаимное расположение параллелограмма и окружности

Пример 95. *При каких действительных значениях параметра a система*

$$\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Решение. Первое уравнение системы $\frac{|x|}{4} + \frac{|y|}{6} = 1$ задает ромб с центром симметрии (0;0) и полудиагоналями $OA = 4$, $OB = 6$ (см. рис. 58).

Выражения $3|x|+2|y|$ и x^2+y^2 не меняют свой вид при замене x на $-x$ и y на $-y$. Поэтому ромб и окружность имеют общие оси симметрии Oy и Ox. Так как окружность с прямой (отрезком) может иметь самое большее две общие точки, то данная система имеет наибольшее число решений, когда окружность $x^2+y^2=a$ пересекает каждую сторону ромба в двух внутренних точках (общее количество – восемь точек). Это возможно тогда, когда радиус этой окружности ($r=\sqrt{a}$) больше радиуса вписанной в ромб окружности, но меньше половины его меньшей диагонали.

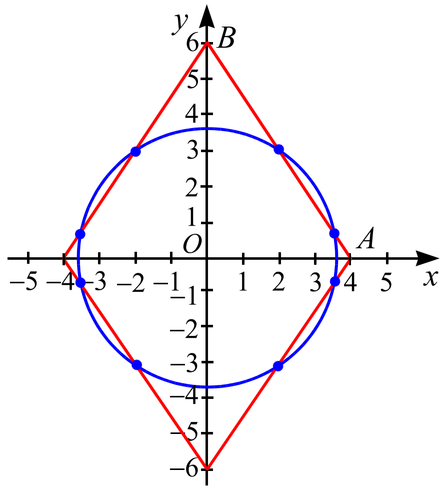


Рис. 58

Рассмотрим треугольник AOB: высота, проведенная к гипотенузе AB, равна $h=\dfrac{OB\cdot OA}{AB}$, где $OA=4$, $OB=6$, $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$, $h=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$. Значит, $\dfrac{12\sqrt{13}}{13}<\sqrt{a}<4$ или $\dfrac{144}{13}<a<16$.

Ответ: $\left(\dfrac{144}{13};16\right)$.

Пример 96. *Найти все значения* a, *при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases}2|x|+3|y|=6,\\ x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Первое уравнение системы задает ромб. Второе уравнение задает семейство окружностей с центром (0; a) на оси y и радиуса 1.

Для окружности, касающейся всех сторон ромба, центр должен находиться в начале координат. Радиус этой окружности равен $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$, высоте треугольника AOB, опущенной на гипотенузу AB.

Так как радиус данной окружности равен 1 и меньше $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$, то имеем случай касания как на рисунке 59*а* (две общие точки – два различных решения системы). Определим в этом случае значение параметра a, то есть ординату центра окружности.

Треугольники AOB и ADC подобны, поэтому $\dfrac{CD}{OB}=\dfrac{AC}{AB}$ или $\dfrac{1}{3}=\dfrac{AC}{\sqrt{13}}$. Отсюда

$$AC=\frac{\sqrt{13}}{3} \text{ и } OC=2-AC=\frac{6-\sqrt{13}}{3}.$$

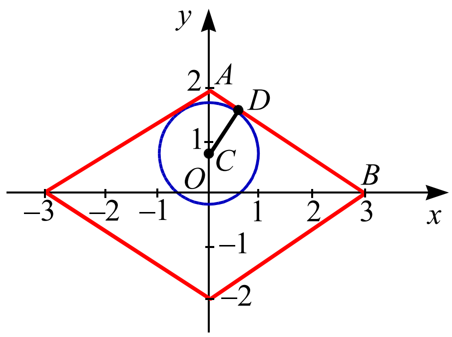


Рис. 59*а*

Рассмотрим еще особое положение окружности, проходящей через точку A и пересекающей стороны ромба (см. рис. 59*б*).

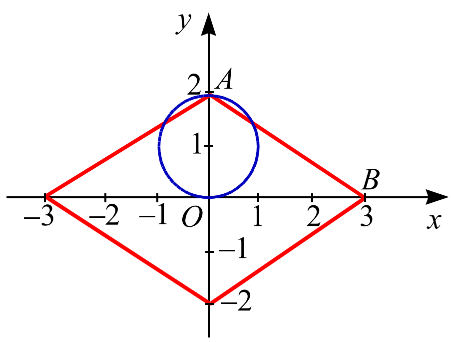


Рис. 59*б*

В этом случае имеем три общие точки и центр окружности будет (0;1), т.е. a = 1.

При значениях параметра от $\frac{6-\sqrt{13}}{3}$ до 1 получаем четыре общие точки.

Следующее особое положение окружности на рисунке 59*в*. Центр окружности будет (0; 3) то есть $a = 3$. При всех значениях a от 1 до 3 окружность имеет с ромбом ровно две общие точки.

Так как при замене x на $-x$ данная система не меняется то значения ординаты (параметра) центра окружности будут симметричны относительно начала координат.

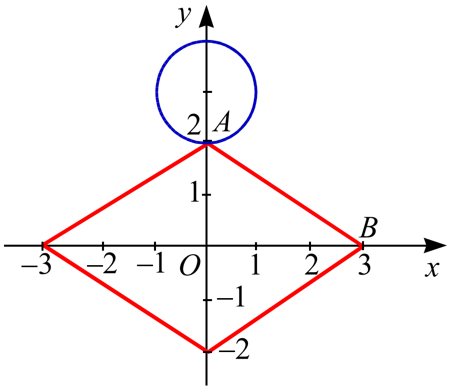


Рис. 59*в*

Ответ: $(-3;-1)\cup(1;3)\cup\left\{\pm\frac{6-\sqrt{13}}{3}\right\}$.

параллелограмм и области на координатной плоскости

• Неравенство

$$\left|a_1x+b_1y+c_1\right|+\left|a_2x+b_2y+c_2\right|<m,$$

где $m>0$ и $a_i^{\,2}+b_i^{\,2}\neq 0$ $(i=1;2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, задает на координатной плоскости множество внутренних точек параллелограмма, а неравенство

$$\left|a_1x+b_1y+c_1\right|+\left|a_2x+b_2y+c_2\right|>m-$$

множество точек, расположенных вне параллелограмма.

Пример 97. (МГУ, 1999). *Найти все значения параметра a, при которых неравенство*

$$|ax+2y-5|+a|x+2ay-2|\le 3a$$

задает на координатной плоскости параллелограмм с внутренностью.

Решение. Перепишем неравенство

$$|ax+2y-5|+|ax+2a^2y-2a|\le 3a.$$

Неравенство задает параллелограмм и множество внутренних точек при следующих условиях

$$\begin{cases}3a>0,\\ \frac{a}{a}\neq\frac{2}{2a^2},\\ a^2+2^2\neq 0,\\ a^2+(2a^2)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ a\neq\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<a<1,\\ a>1.\end{array}\right.$$

Ответ. $0<a<1;\ a>1$.

Упражнения

66. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}2y-5x\ge 4a+12,\\ x+y\ge -3a+4,\\ 3y-x\le 5a+6\end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

67. (МГУ, 2001) При каких значениях параметра a, на плоскости $(x;y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}2y-x\le 1,\\ y+2x\le 2,\\ y+ax\ge -1.\end{cases}$$

68. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0,\\ x^2+a^2=4\end{cases}$$

имеет решения.

69. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}2|x|+3|y|=6,\\ x^2+(y-a)^2=9\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

70. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2|x|+3|y|=6, \\ x^2+(y-a)^2=4 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

71. (МГУ, 1999). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2-(2a-2)x+a^2-2a-3=0, \\ \sqrt{(y-a)^2+x^2}+\sqrt{(y-a)^2+(x-4)^2}=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

72. (МГУ). Найдите все пары целых чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

73. (МГУ, 2001). При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y\le k^2+10k+20, \\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky\le 5-k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

74. (аналог, **МГУ, 1996).** Для каждого значения a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+a^2-14x-10a+58=0, \\ \sqrt{x^2+a^2-16x-12a+100}+ \\ \qquad +\sqrt{x^2+a^2+4x-20a+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

75. (ЕГЭ, 2011, пересдача). При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x\le\sqrt{2x-y^2+2}, \\ y\ge 4-ax \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

76. (МИОО, 2011). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2|\le 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

77. (МГУ, 2001). При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y\le k^2+10k+20, \\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky\le 5-k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

78. (МФТИ, 2008). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+31\le 8(|x|+|y|), \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

79. (ЕГЭ, 2011, пробный вариант № 52 от ФЦТ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+|y|+12=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=8(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

80. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2-4x+2y\le -5, \\ x^2+y^2-4a^2+8x-14y\le 12a-56 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

81. (МГУ, 2009). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество точек координатной плоскости, координаты которых $(x,\, y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-16x+10y+65}{x^2+y^2-14x+12y+79}\le 0, \\ (x-a)(y+a)=0 \end{cases}$$

является отрезком.

82. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 2ay-a^2+1, \\ y+a\le |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

83. (МГУ, 2006). Определите, при каких значениях параметра b при любых значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+ax+ab=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения $(x; y)$.

84. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a?

85. (ЕГЭ, 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

86. (ЕГЭ, 2011). Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-4)^2=4, \\ (x-1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

87. (ЕГЭ, 2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-6)^2=25, \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

88. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3|x|+4|y|=12, \\ |y|-|x|=a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

89. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0, \\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

90. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |7x+7y-24|\le|x-y|, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=\dfrac{6-a}{25} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

91. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |7x+7y-24|\ge x-y, \\ (x-a)^2+\left(y+a-\dfrac{24}{7}\right)^2=\dfrac{84-a}{1225} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

92. (МГУ, 2005). Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии

$$|2x+4-2a|+|x-2+a|\le 3.$$

93. (МГУ, 1996). При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$|2x+y|+|x-y+3|\le p$$

будет равна 24?

Глава 4. Решение задач разными способами

В данной главе предлагаются различные подходы к решению одной задачи.

Пример 98. (ЕГЭ, 2010). *Найдите все значения* a, *при каждом из которых функция* $f(x)=x^2+3|x-a^2|-5x$ *имеет более двух точек экстремума.*

Решение (*1-й способ, предложенный в критериях*). 1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a^2$: $f(x)=x^2-8x+3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$;

б) при $x\le a^2$: $f(x)=x^2-2x-3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 60*а*, *б*, *в*:

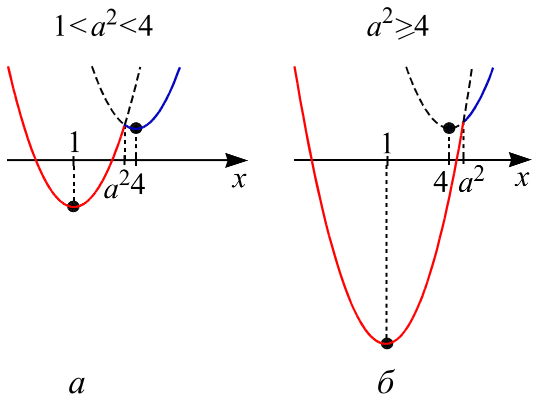


Рис. 60

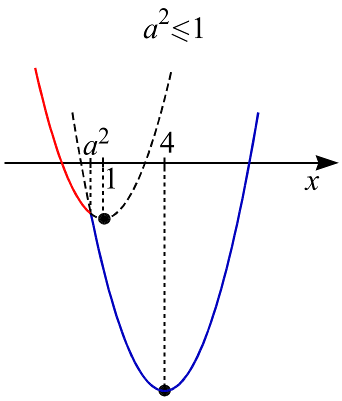


Рис. 60*в*

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2, f(a^2))$, где $f(a^2)=a^4-5a^2$.

3. Функция $y=f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (см. рис. 60*а*): $1<a^2<4 \quad\Leftrightarrow\quad 1<|a|<2$.

Решение (*2-й способ*). 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Раскрывая модуль при каждом фиксированном значении параметра a, получаем $f(x)=x^2-8x+3a^2$ при $x\ge a^2$ и $f(x)=x^2-2x-3a^2$ при $x\le a^2$. Производная функции равна $f'(x)=2x-8$ при $x>a^2$ и $f'(x)=2x-2$ при $x<a^2$. В точке $x=a^2$ функция не имеет производной, так как равенство $2x-8=2x-2$ не выполняется ни при каком значении x. Используя достаточное условие существования экстремума, найдем все такие значения a, при которых найдется более двух точек, в которых производная равна нулю или не существует и при переходе через которые ее производная меняет знак.

Производная функции не существует в точке $x=a^2$ и может равняться нулю в точках $x=1$ и $x=4$ при соответствующем расположении их относительно $x=a^2$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (см. рис. 61).

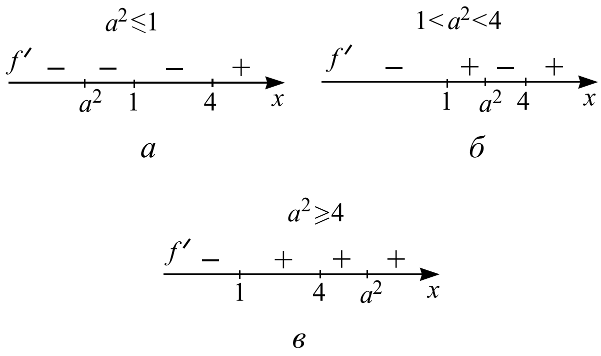


Рис. 61

Функция $y=f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (см. рис. 61*б*): $1<a^2<4 \quad\Leftrightarrow\quad 1<|a|<2$.

Решение (*3-й способ*). Данная функция имеет следующий вид

$$f(x)=\begin{cases}x^2-8x+3a^2,\text{если } x\le a^2,\\ x^2-2x-3a^2,\text{если } x\ge a^2.\end{cases}$$

Функция $g(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(4; -16 + 3a^2)$, а функция $h(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(1; -1 - 3a^2)$. Условие задачи выполняется (см. рис. 60), если имеет решение система неравенств:

$$\begin{cases} g(1) > h_{\text{в}} \\ h(4) > g_{\text{в}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 3a^2 > -1 - 3a^2 \\ 8 - 3a^2 > -16 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 1 \\ a^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \ -2 < a < -1 \text{ или } 1 < a < 2.$$

Ответ. $-2 < a < -1; 1 < a < 2$.

Пример 99. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение (1-*й способ*). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет один положительный корень? Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, имеем два случая (t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения):

1) $t_1 t_2 < 0 \ \Leftrightarrow \ 16a^2 + 20a - 14 < 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ -\dfrac{7}{4} < a < \dfrac{1}{2}$.

2) $\begin{cases} t_1 t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 + 20a - 14 = 0, \\ 8a + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ a = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $-\dfrac{7}{4} < a \le \dfrac{1}{2}$.

Замечание. В рассмотренных случаях нет необходимости в исследовании дискриминанта на наличие действительных корней уравнения. В первом случае свободный член $c = t_1 t_2$ отрицательный, а значит, дискриминант положительный. Во втором случае свободный член равен нулю, а второй коэффициент отличен от нуля, поэтому уравнение имеет корни.

Решение (2-*й способ*). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Дискриминант D полученного уравнения положительный $D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$. Следовательно, уравнение имеет два различных корня $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a - 2 < 4a + 7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a - 2$ и $4a + 7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0, \\ 4a - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{4} < a \le \frac{1}{2}.$$

Решение (3-*й способ*)**.** Пусть $6^x = t$, тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

и найдем его корни $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

Возвратимся к переменной x: $6^x = 4a - 2$ или $6^x = 4a + 7$. Отсюда получаем $a = \dfrac{6^x + 2}{4}$ и $a = \dfrac{6^x - 7}{4}$ или $a = \dfrac{6^x}{4} + \dfrac{1}{2}$ и $a = \dfrac{6^x}{4} - \dfrac{7}{4}$.

Построим графики полученных функций (см. рис. 62). Рассмотрим прямые, параллельные оси x и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при условии $-\dfrac{7}{4} < a \le \dfrac{1}{2}$.

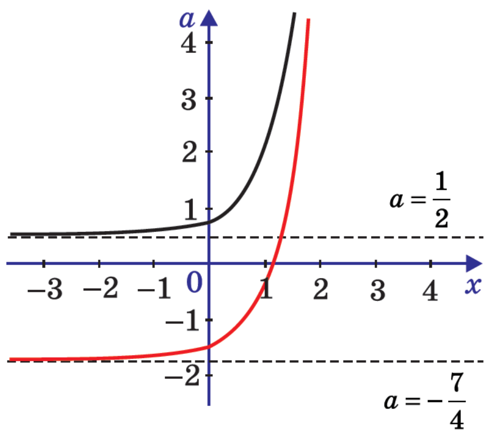


Рис. 62

Ответ. $-\frac{7}{4}<a\le\frac{1}{2}$.

Пример 100. *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases}3xy+3ax-ay-a^2-3=0,\\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. (*1-й способ, введение двух новых переменных*). Группируя в первом уравнении системы члены, получим

$$(3xy-ay)+(3ax-a^2)=3 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (y+a)(3x-a)=3\,.$$

Группируя члены и выделяя полные квадраты во втором уравнении, имеем

$$(3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17\,.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}(y+a)(3x-a)=3,\\ (3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17.\end{cases}$$

Введем новые переменные $u=3x-a$ и $v=y+a$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases}uv=3,\\ u^2+9v^2=3a^2+2a+17.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на (-6) и складывая со вторым уравнением, получим уравнение

$$(u-3v)^2=3a^2+2a-1\,. \qquad (1)$$

Если $3a^2+2a-1<0$, то уравнение (1), а значит и исходная система не имеют решения.

Если $3a^2+2a-1=0$, что выполняется при $a=-1$ или $a=\frac{1}{3}$, то уравнение (1), а значит и исходная система имеют решения. Из уравнения (1) при этих значениях параметра получаем $u=3v$. Учитывая первое уравнение системы, имеем $3v^2=3$, т.е. $v_1=1$ и $v_2=-1$. Отсюда $u_1=3$ и $u_2=-3$. Следовательно, исходная система будет иметь два различных решения.

Если $3a^2+2a-1>0$, то уравнение (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}u-3v=\sqrt{3a^2+2a-1},\\ u-3v=-\sqrt{3a^2+2a-1}.\end{array}\right.$$

Учитывая первое уравнение системы, имеем:

если $u=3v+\sqrt{3a^2+2a-1}$, то $3v^2+v\sqrt{3a^2+2a-1}-3=0$ (*);

если $u=3v-\sqrt{3a^2+2a-1}$, то $3v^2-v\sqrt{3a^2+2a-1}-3=0$ (**).

Каждое из уравнений (*) и (**) будет иметь два решения. Следовательно, исходная система будет иметь более двух решений.

Ответ. -1 и $\frac{1}{3}$.

Решение. (*2-й способ, графический*). Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases}(y+a)(3x-a)=3,\\ (3x-a)^2+9(y+a)^2=3a^2+2a+17\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+a)\left(x-\frac{a}{3}\right)=1,\\ \left(x-\frac{a}{3}\right)^2+(y+a)^2=\frac{3a^2+2a+17}{9}.\end{cases}$$

Введем новые переменные $u=x-\frac{a}{3}$ и $v=y+a$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} uv = 1, \\ u^2 + v^2 = \dfrac{3a^2 + 2a + 17}{9}. \end{cases}$$

Полученная система, а значит и исходная, имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда окружность $u^2 + v^2 = \dfrac{3a^2 + 2a + 17}{9}$ касается гиперболы $uv = 1$ (см. рис. 63), так как если пара (u_0, v_0) – решение системы, то пары $(-u_0, -v_0)$, (v_0, u_0) и $(-v_0, -u_0)$ – также решение.

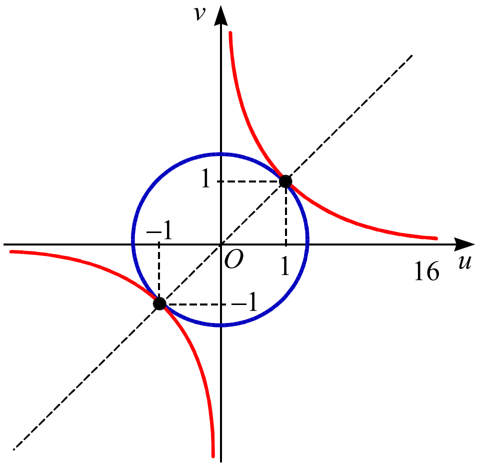


Рис. 63

Радиус этой окружности равен $\sqrt{2}$. Отсюда из уравнения $\dfrac{3a^2 + 2a + 17}{9} = 2$ получаем $3a^2 + 2a - 1 = 0$. Следовательно, система будет два различных решения при $a = -1$ и $a = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. -1 и $\dfrac{1}{3}$.

Пример 101. (ЕГЭ, 2010). *Найти все значения параметра* a, *при каждом из которых наименьшее значение функции* $f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ *меньше* 1.

Решение (*1-й способ, предложенный в критериях*). 1. Функция f имеет вид:

а) если $x^2 - 6x + 8 \ge 0$, то $f(x) = x^2 + (2a - 6)x + 8$, поэтому ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3 - a$;

б) если $x^2 - 6x + 8 < 0$, то $f(x) = -x^2 + (2a + 6)x - 8$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3 + a$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (см. рис. 64*а*, *б*, *в*, *г*):

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принимать только в точках $x = 2$ или $x = 4$, а если $3 - a \notin [2; 4]$, то в точке $x = 3 - a$.

3. Наименьшее значение функция $f(x)$ меньше единицы тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} f(2) < 1, \\ f(4) < 1, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3 - a < 2, \\ 3 - a > 4, \end{array}\right. \\ f(3 - a) < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a < 1, \\ 8a < 1, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < -1, \end{array}\right. \\ |3 - a| > \sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \dfrac{1}{4}, \\ a > 3 + \sqrt{7}. \end{array}\right.$$

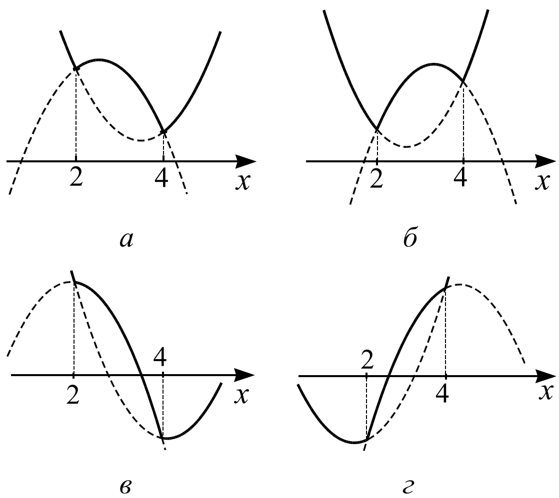


Рис. 64

Решение (*2-й способ*). При каждом фиксированном значении параметра a, функция $y_a(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ определена на всей числовой прямой и является непрерывной на всей области определения. Функция задается формулой $y_a(x) = x^2 - (6 - 2a)x + 8$ при $x \le 2$ и $x \ge 4$, а при $2 \le x \le 4$

$y_a(x) = -x^2 + (6+2a)x - 8$. На каждом из промежутков $(-\infty; 2]$, $[2; 4]$ и $[4; +\infty)$ функция $y_a(x)$ является ограниченной снизу.

Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все такие значения параметра a, при которых неравенство

$$y_a(x) < 1$$

или

$$2ax + |x^2 - 6x + 8| < 1 \Leftrightarrow 2ax < 1 - |x^2 - 6x + 8|$$

имеет хотя бы одно решение, т.е. график функции $g(x) = 1 - |x^2 - 6x + 8|$ расположен выше графика функции $y = 2ax$ хотя бы при одном значении x.

Построим на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (см. рис. 65). Равенство $y = 2ax$ задает на плоскости Oxy семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.

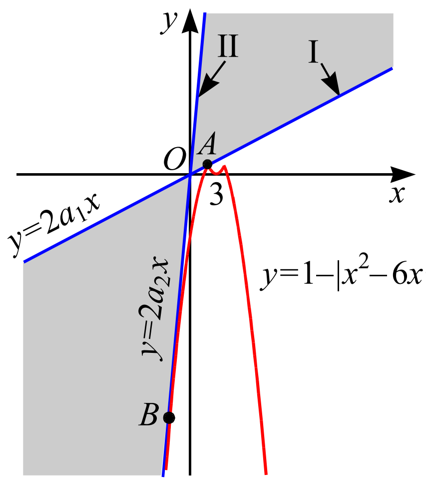


Рис. 65

(I) График функции $y = 2a_1x$ проходит через точку $A(2;1)$ как указано на рис. 65. Из уравнения $2a_1x = 1$ при $x = 2$ получаем угловой коэффициент первой прямой $k_1 = 2a_1 = 0{,}5$.

(II) График функции $y = 2a_2x$ касается графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ на промежутке $(-\infty; 2]$, т.е. проходит через точку B как указано на рис. 65. Из условия касания найдем угловой коэффициент второй прямой:

$$\begin{cases} g'(x_0) = y'(x_0), \\ g(x_0) = y(x_0), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0 + 6 = 2a_2, \\ -x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2a_2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{7}, \\ 2a_2 = 6 + 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Отсюда получаем угловой коэффициент второй прямой $k_2 = 2a_2 = 2\sqrt{7} + 6$.

Рассматриваемое неравенство не будет иметь решение при $k_1 \le k \le k_2$, $0{,}5 \le 2a \le 2\sqrt{7} + 6$, $0{,}25 \le a \le \sqrt{7} + 3$, т.е. прямые расположены в выделенной фоном области на рис. 65. Соответственно, решение будет существовать при $a \in (-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Пример 102. (ЕГЭ, 2010). *При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня*?

Решение (*1-й способ, графический*). Выполняя равносильные переходы, преобразуем исходное уравнение:

$$|x + a^2| = |a + x^2| \Leftrightarrow (x + a^2)^2 = (a + x^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + a^2)^2 - (a + x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + a^2 + a + x^2)(x + a^2 - a - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + a^2 + a + x^2 = 0, \\ x + a^2 - a - x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ (x - a)(x + a - 1) = 0. \end{array}\right.$$

Геометрическое место точек на плоскости Oax, координаты которых являются решениями полученной совокупности, представляют собой фигуру Φ, состоящую из окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ и двух прямых $x = a$ и $x = 1 - a$ (см. рис. 66).

Исходное уравнение будет иметь ровно три решения при тех и только тех значениях параметра a, при которых фигура Φ и прямая $a = \mathrm{const}$ имеют три общие точки. Этому условию соответствуют случаи прохождения прямой $a=\text{const}$ через точки:

1) A и C (в этом случае прямые являются касательными к окружности и удалены от центра окружности на расстояние $\frac{1}{\sqrt{2}}$, равное ее радиусу), т.е. при

$a=-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ или

$a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$;

2) B и O (точки пересечения окружности $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ и прямой $x=a$). Из уравнения $2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ получаем значения $a=-1$ или $a=0$.

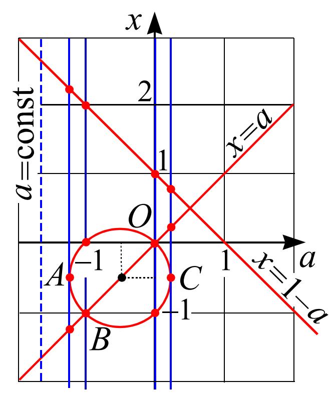


Рис. 66

При всех остальных значениях параметра количество решений исходного уравнения будет больше или меньше трех.

Ответ. $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}, -1, 0$.

Решение (*2-й способ, аналитический*). Выполняя равносильные переходы, преобразуем исходное уравнение:

$$|x+a^2|=|a+x^2| \Leftrightarrow (x+a^2)^2=(a+x^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+a^2+a=0, \\ x^2-x-a^2+a=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности $x^2+x+a^2+a=0$ при $D=1-4a^2-4a\ge 0$, т.е. при $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\le a\le\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, имеет корни $x_1=\frac{-1-\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}$ и $x_2=\frac{-1+\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}$.

Второе уравнение совокупности $x^2-x-a^2+a=0$ при всех a имеет корни $x_3=a$ и $x_4=1-a$.

Исходное уравнение будет иметь три корня в случае, если среди чисел x_1, x_2, x_3 и x_4 имеется три различных.

Рассмотрим возможные варианты:

1. Равенство $x_1=x_2$ возможно, если $D=1-4a^2-4a=0$, т.е. при $a=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ или $a=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. В этом случае $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$, а x_3 и x_4 различны и не равны $-\frac{1}{2}$.

2. Равенство $x_3=x_4$, т.е. $a=1-a$ возможно при $a=\frac{1}{2}$, но в этом случае первое уравнение совокупности не имеет решений.

3. $x_1=x_3$, т.е. $a=\frac{-1-\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a+1=-\sqrt{1-4a^2-4a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1\le 0, \\ 4a^2+4a+1=1-4a^2-4a \end{cases} \Leftrightarrow a=-1.$$

В этом случае $x_1=x_3=-1$, $x_2=0$ и $x_4=2$.

4. $x_2=x_3$, т.е. $a=\frac{-1+\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a+1=\sqrt{1-4a^2-4a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1\ge 0, \\ 4a^2+4a+1=1-4a^2-4a \end{cases} \Leftrightarrow a=0.$$

В этом случае $x_2=x_3=0$, $x_1=-1$, $x_4=1$.

5. $x_1=x_4$, т.е. $1-a=\frac{-1-\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3-2a=-\sqrt{1-4a^2-4a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-2a\le 0,\\ a^2-a+1=0.\end{cases} \text{ Решений нет.}$$

6. $x_2=x_4$, т.е. $1-a=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a^2-4a}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3-2a=\sqrt{1-4a^2-4a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-2a\ge 0,\\ a^2-a+1=0.\end{cases} \text{ Решений нет.}$$

Следовательно, исходное уравнение имеет три корня при $a\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}, -1, 0\right\}$.

Пример 103. (МИОО, 2010). *Найти все значения* a, *при каждом из которых система неравенств* $\begin{cases}\dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\ge 0,\\ x-8>ax\end{cases}$ *не имеет решений.*

Решение (*1-й способ*)**.** Рассмотрим второе неравенство системы $(1-a)x>8$. Если $a=1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений; если $a<1$, то решением неравенства являются все значения $x>\dfrac{8}{1-a}$; если $a>1$, то $x<\dfrac{8}{1-a}$.

При $a\ne 1$ первое неравенство системы равносильно системе

$$\begin{cases}(1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a))\ge 0,\\ x-2(1-a)\ne 0.\end{cases}\qquad (*)$$

Сравнивая числа $\dfrac{a}{1-a}$ и $2(1-a)$, получим:

$$\frac{a}{1-a}\ge 2(1-a)\Leftrightarrow\frac{2a^2-5a+2}{a-1}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-0{,}5)(a-2)}{a-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0{,}5\le a<1,\\ a\ge 2;\end{array}\right.$$

$$\frac{a}{1-a}\le 2(1-a)\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}a\le 0{,}5,\\ 1<a\le 2.\end{array}\right.$$

Запишем решение системы $(*)$:

при $a\le 0{,}5$ все $x\le\dfrac{a}{1-a}$ или $x>2(1-a)$;

при $0{,}5<a<1$ все $x<2(1-a)$ или $x\ge\dfrac{a}{1-a}$;

при $1<a<2$ все $\dfrac{a}{1-a}\le x<2(1-a)$;

при $a\ge 2$ все $2(1-a)<x\le\dfrac{a}{1-a}$.

Замечаем, что при $a<1$ система неравенств, данная в условии, имеет решения.

При $a>1$ система не будет иметь решения, если множества решений первого и второго неравенства системы не пересекаются, т.е.

$$\begin{cases}a>1,\\ \dfrac{a}{1-a}\ge\dfrac{8}{1-a},\\ 2(1-a)\ge\dfrac{8}{1-a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1\\ 1<a\le 8,\\ (1-a)^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow 1<a\le 3.$$

Учитывая, что при $a=1$ система также не имеет решений, получаем ответ.

Ответ. $1\le a\le 3$.

Решение (*2-й способ*)**.** Воспользуемся методом областей для решения данной задачи.

Рассмотрим второе неравенство системы $(1-a)x>8$. Уравнение $(1-a)x=8$ задает на плоскости Oax гиперболу, которая разбивает ее на три области. Для определения знака значения выражения $f_1(x,a)=(1-a)x-8$ достаточно подставить координаты точки $O(0;0)$ и затем воспользоваться правилом знакочередования. На плоскости Oax множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $f_1(x,a)\ge 0$, на рис. 67 показано вертикальной штриховкой, гипербола отмечена пунктирной линией.

Для другого неравенства системы рассмотрим выражение $f_2(x,a)=\dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}$, которое определено при $x\ne 2(1-a)$ и обращается в нуль при $x=\dfrac{a}{1-a}$. Прямая $x=2(1-a)$ и гипербола $x=\dfrac{a}{1-a}$ разбивают координатную плоскость на шесть частей. С учетом того, что $\frac{a}{1-a}=2(1-a)$ (графики функций, стоящих в левой и правой частях равенства пересекаются в точках A и B) при $a=0{,}5$ и $a=2$, на плоскости Oax множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $f_2(x,a)\ge 0$, выделено на рис. 67 темным фоном.

Графики функций $x=-2a+2$ и $x=\frac{8}{1-a}$ пересекаются в точках $D(-1;4)$ и $C(3;-4)$.

Проводя прямые $a=\text{const}$, видим (см. рис. 67), что существует два критических положения этих прямых I ($a=1$) и II ($a=3$), между которыми множества решений неравенств данной в условии системы не имеют общих точек.

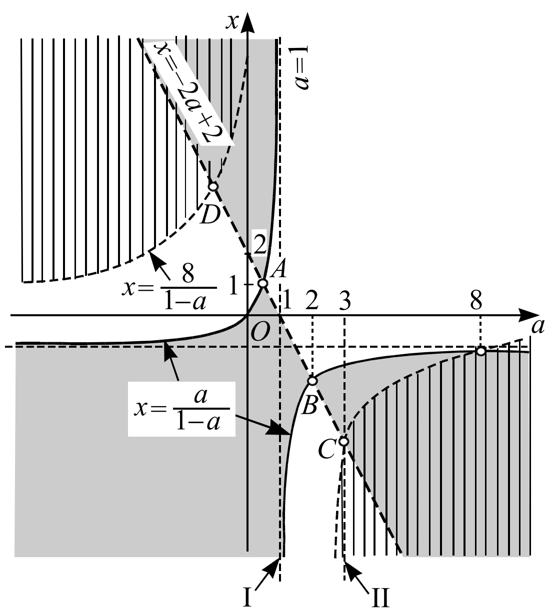


Рис. 67

Ответ. $1\le a\le 3$.

Ответы и указания

1. [13;15). **2.** (3; 5). **3.** $-1<a<2-2\sqrt{2}$ или $4\le a<2+2\sqrt{2}$. **4.** $a=1$. **5.** $-2,\,-0{,}5$. **6.** Если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то нуля два $x_1=1$ и $x_2=-3$; если $0<a<4$, то – четыре $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{4+a}$ и $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{4-a}$; если $a=4$, то – три $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{4+a}$ и $x_3=-1$; если $a>4$, то – два $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{4+a}$. **7.** $-5;\,2$. **8.** 1.

9. $\frac{5}{8}$. **10.** 0. **11.** 9. **12.** $a=1$. **13.** -1.

14. -50. **15.** 50. **16.** $-2<a<-1;\,1<a<2$.

17. $-\sqrt{6}<a<-2;\,2<a<\sqrt{6}$. **18.** Если $a<2$, то $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=3a^2-8a+16$; если $a\ge 2$, то $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(0)=3a^2$.

19. $-1<a<2$. **20.** $1<a<3$. **21.** $a\le -4$, $a\ge 5$. **22.** $\left(-\infty;-\frac{21}{4}\right)\cup\left(\frac{13}{4};+\infty\right)$. **23.** $\left(-\frac{8}{3};-1\right)\cup\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **24.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

25. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(6+2\sqrt{10};+\infty\right)$.

26. $(-\infty;2)$. **27.** $1-\sqrt{2}$ и $5+\sqrt{10}$.

28. а) $\frac{5-3\sqrt{5}}{2};\frac{9+\sqrt{53}}{2}$;

б) $\left(-\infty;\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{9+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$;

в) $\left[\frac{5-3\sqrt{5}}{2};2\right)\cup\left(4;\frac{9+\sqrt{53}}{2}\right]$;

г) $\frac{-7-\sqrt{21}}{2};\frac{9+\sqrt{53}}{2}$;

д) $\left(-\infty;\frac{-7-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left[\frac{9+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$;

е) $\left[\frac{-7-\sqrt{21}}{2};\frac{9+\sqrt{53}}{2}\right]$. **29.** $1-\sqrt{2}$; $5+\sqrt{10}$. **30.** $a\ge -\frac{33}{64}$. **31.** $a=9$, $\left[-\frac{4}{3};1\right]$.

32. $a\le -2,\,a\ge 0$. **33.** $(-3{,}5;1)$. **34.** $y=0$,

$y=-\frac{a}{2}x,\ y=4ax$. **35.** $a>25$. **36.** $a\le -9$, $a>5/3$. **37.** $(-\infty;-6]\cup(0{,}4;+\infty)$.
38. $(0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$. **39.** $\frac{4}{3}\le a\le 2$.
40. $a\le -1{,}5$, $a>0$. **41.** $-90, -9$.
42. $a_1=0,\ a_2=-\frac{2}{3}$. *Указание.* Ввести новую переменную $t=x-1$ и использовать симметрию относительно знака t.
43. $(0;1)\cup(1;4)\cup(4;5)$. *Указание.* Разложить на множители. **44.** $a>16$. **45.** $(0;9]$.
46. $p<-7;\ p>11$. **47.** $a=-16$. **48.** $-1\le a<2\sqrt[4]{24}-5$. **49.** $-2\le a<2\sqrt[4]{27}-6$.
50. 2. **51.** $-\frac{18}{41}$. **52.** При $a=0$ $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0;0\right)$, где $k\in\mathbf{Z}$; при $a=4$ $(2\pi k;0;2)$, где $k\in\mathbf{Z}$. **53.** $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$. **54.** $-\frac{5}{2}<a\le-\frac{1}{4}$. **55.** $-1<a\le 0$, $1\le a<1{,}5$.
56. -2. *Указание.* Использовать симметрию относительно перестановки переменных x и y. **57. а)** $a=-0{,}25$. *Указание.* Использовать симметрию относительно перестановки переменных x и y; **б)** $a=2{,}25$. *Указание.* Использовать симметрию относительно знака x. **58.** $-\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. **59.** $[-2;0]$. **60. а)** $[1;3]$; **б)** $[-3;-1]$. **61.** $a<-1-\sqrt{5}$. **62.** $-1{,}25$ и 5. **63.** $a\in[0;1]$.
64. -2 и $\frac{1}{3}$. **65.** $a_1=1-2\sqrt{3}$ и $a_2=1+2\sqrt{3}$. **66.** $a=1$; $x=-2$ и $y=3$.
67. $\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **68.** $\left(-\sqrt{2};-\frac{16}{17}\right)$; $\left(0;\sqrt{2}\right)$.
69. $\left(-5;2-\sqrt{13}\right)\cup\left(\sqrt{13}-2;5\right)\cup\{0\}$.
70. $\left(-4;\frac{6-2\sqrt{13}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{13}-6}{3};4\right)$.
71. $[-1;3)\cup(3;7]$. **72.** $(-7;7), (-6;6)$.

73. $\mathbf{Z}\setminus\{-11;-10;\ldots-4;-3\}$. **74.** $x=\frac{217-5\sqrt{415}}{29}$ при $a=\frac{180+2\sqrt{415}}{29}$; при остальных a решений нет.
75. $\left(-\infty;\frac{-4-\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\frac{-4+\sqrt{42}}{2};+\infty\right)$.
76. $-\frac{4}{3}$; 2. **77.** $\mathbf{Z}\setminus\{-11;-10;\ldots-4;-3\}$.
78. $4\le|a|\le\sqrt{41}+1$.
79. $\left(-2;-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{2};2\right)$.
80. $-\frac{13}{3}$ и $\frac{7}{3}$. **81.** $(5-2\sqrt{6};8-2\sqrt{6})\cup(5+2\sqrt{6};8+2\sqrt{6})$. **82.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **83.** $(-4;-1)$.
84. При $a<1$ или $a>\sqrt{2}$ решений нет; при $a=1$ или $a=\sqrt{2}$ – четыре решения; при $1<a<\sqrt{2}$ – восемь решений.
85. $\frac{8-\sqrt{14}}{8}$ и $\frac{11+\sqrt{31}}{8}$. **86.** 3; $\sqrt{41}+2$.
87. $8-5\sqrt{2}$; 3; $5\sqrt{2}-2$. **88.** $(-4;3)$.
89. -2 и $\frac{1}{3}$. **90.** $\frac{69}{49}$ и 2. **91.** 3. **92.** $[-1;5]$.
93. 6.

Список и источники литературы

1. Высоцкий В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. – М.: Научный мир, 2011. – 316 с.

2. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. Учреждений: базовый и профильный уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 16-е изд. – М.: Просвещение, ОАО «Московские учебники. – 251 с.

3. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2010.

4. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 95 с.

5. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011. – 144 с.

6. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами // Математика в школе. М.: ООО «Школьная пресса», 2011, №1 (начало) – С. 18-26, №2 (окончание) – С. 25-32.

7. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ // Математика. М.: Издательский Дом «Первое сентября», 2011, № 5 − С. 11–21.

8. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С5). Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений. 2011, − 79 стр. http://www.alexlarin.net/ege/2011/c52011.html

9. Математика: Школьная энциклопедия / Гл. ред. С.М. Никольский. – М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 1996, – 527 с.

10. Неравенства с двумя переменными: графическое и аналитическое решения / А. Корянов. – М.: Чистые пруды. 2008. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 22).

11. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

12. Прокофьев А.А., Шабунин М.И. Системы уравнений и неравенств с двумя переменными // Журнал «Потенциал», 2011, №3 – С. 29-36.

13. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. Учебное пособие. – М.: МИЭТ, 2004. – 256 стр.

14. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2012: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – 93 с. – (Федеральный институт педагогических измерений).

15. Сергеев И. Н. ЕГЭ: 1000 задач с ответами и решениями по математике. Все задания группы С / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 301 с.

16. Сергеев И. Н. ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 126 с.

17. Ященко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2012 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2012. – 208 с.

18. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2012 (открытый банк заданий).

19. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

20. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.