|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

ФГКОУ Санкт-Петербургский кадетский корпус Министерства обороны РФ

**Методическая работа по теме:**

**Элементарные методы решения диофантовых уравнений на факультативных занятиях в старших классах**

Преподаватель математики: А.А. Дегтерева

Данная работа посвящена одному из наиболее интересных разделов теории чисел - решение диофантовых уравнений (неопределённых уравнений). В работе была сделана попытка систематизировать методы решения и рассмотреть те уравнения, которые могут быть посильны учащимися средней школы.

Целью настоящей работы является углубление и систематизация знаний, полученных по теме «диофантовы уравнения» при изучении на уроках в старших классах. Многие задания, изложенные в данной работе, могут быть использованы в курсе алгебры средней школы и на факультативах по теме «диофантовы уравнения» с целью расширения математического кругозора учащихся, подготовки к олимпиадам, сдачи ЕГЭ (часть С6).

Содержание работы:

1. Введение. Историческая справка.
2. Элементарные методы решения диофантовых уравнений:
3. Перебор случаев;
4. Выбор фиксированного модуля;
5. Разложение на множители;
6. Выделение целой части;
7. Метод оценки;
8. Сведение уравнения к квадратному и последующий анализ дискриминанта;
9. Метод бесконечного «спуска».
10. Список литературы.

1. **Введение.Историческая справка**

**Диофантовыми уравнениями** называются уравнения или их системы с целыми коэффициентами, в которых число неизвестных больше числа уравнений и при этом требуется найти целые решения уравнений.

Своё название они получили в честь древнегреческого математика Диофанта, который жил и работал в Александрии. Время его жизни в точности неизвестно; большинство историков относит его к III или IV веку нашей эры. То немногое, что мы знаем о его жизни, известно только благодаря одной арифметической задаче, составленной в поэтической форме вскоре после смерти Диофанта.

Путник! Здесь прах погребен Диофанта,

И числа поведать могут, о чудо, сколь долг был век его жизни.

Часть шестую его представляло счастливое детство.

Двенадцатая часть протекла еще жизни –

пухом покрылся тогда подбородок.

Седьмую в бездетном браке Диофант.

Прошло пятилетье.

Он был осчастливлен рожденьем
 прекрасного первенца сына,

 Коему рок половину лишь жизни

 Счастливой и светлой

 Дал на земле по сравненью с отцом.

 И в печали глубокой старец земного
 удела конец воспринял,

 Переживши года четыре с тех пор,
 как сына лишился.

Скажи, скольких лет жизни достигнув,
 Смерть воспринял Диофант?

В ответе, который получается при решении этой задачи, содержится, в частности, что Диофант умер 84 лет от роду.

Диофант написал «Арифметику», стоящую из 13 книг, «Поризмы», «Полигональные числа». Большая часть его книг и сочинений не сохранилась.

Из 13 книг «Арифметики» до нас дошло только 7 книг. Большая часть из них посвящена решению систем неопределённых уравнений второй степени. Решая весьма разнообразные системы неопределенных уравнений, Диофант проявил большое мастерство и изобретательность. В отличие от Евклида и большинства других древнегреческих математиков, Диофант не излагает строго логических доказательств, обосновывающих применяемые им приёмы. Основная цель – дать метод нахождения решения. Он не ставит себе задачу нахождения всех решений неопределённого уравнения даже тогда, когда их бесчисленное множество, и вполне удовлетворяется отысканием одного решения.

После Диофанта неопределённые уравнения были предметом изучения математиков арабского Востока в X-XI вв., а затем, начиная, с XIIIв и в Европе. Причём уже на Востоке наряду с методами Диофанта мы встречаем другие, более древние методы решения задач диофантова анализа, особенно на композиции форм $x^{2}+y^{2}$ и на применении пифагоровых троек. Оба эти метода были известны ранним пифагорейцам, но восходят, по-видимому, к древнему Вавилону. Именно эти методы и перекочевали первыми в Европу. Мы находим их у Леонардо Пизанского, Луки Паголи, Джироламо Кардано. Эти методы были чисто арифметическими и излагались без применения языка буквенного исчисления и учения об уравнениях. Эта линия получила известное завершение в творчестве Ф.Виета.

Проникнуть в наиболее глубокие слои «Арифметики» сумел только Пьер Ферма (1601-1665гг.), который и был основателем теории чисел и учения об неопределённых уравнениях нового времени.

Исследования Ферма были продолжены и систематизированы Л. Эйлером. В его творчестве были рассмотрены все аспекты «Арифметики». Последующие математики, занимаясь неопределёнными уравнениями, обращались уже не к Диофанту, а к Эйлеру.

Несмотря на то, что задачи на неопределённые или диофантовы уравнения возникли ещё в глубокой древности, интерес к ним не ослабевает, а за последние 30 -40 лет он особенно возрос. По-видимому, в этом сыграла роль и близость диофантова анализа к алгебраической геометрии, и то обстоятельство, что к таким уравнениям привлекали внимание проблемы алгоритмической неразрешимости. Тема появилась и в школьных учебниках, а также как один из видов задания на ЕГЭ в блоке С6.

1. **Элементарные методы решения диофантовых уравнений**

**1) Перебор случаев**

Если в процессе решения уравнений в целых числах нам удастся найти конечный промежуток возможных значений хотя бы одной из переменных, то, организуя перебор этих значений, мы можем найти из самого уравнения те из них, которые удовлетворяют нашему уравнению. В нахождении конечного промежутка и заключается основная сложность данного метода.

Пример.**При каких натуральных** $m и n$ **уравнение** $m+cosx=(m+sinx)n$**(1) имеет решение?**

*Решение:* Подстановка $cosφ=\frac{1}{\sqrt{1+n^{2}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^{2}}}cosx-\frac{n}{\sqrt{1+n^{2}}}sinx=\frac{m\left(n-1\right)}{\sqrt{1+n^{2}}}⟺\sin(\left(φ-x\right))=\frac{m\left(n-1\right)}{\sqrt{1+n^{2}}}⇒\left|\frac{m\left(n-1\right)}{\sqrt{1+n^{2}}}\right|\leq 1⟺-1\leq \frac{m\left(n-1\right)}{\sqrt{1+n^{2}}}\leq 1⟺\frac{m(n-1)}{\sqrt{1+n^{2}}}\leq 1$$

1. $n=1⟹0\leq 1$ - верно для любого натурального $m$.
2. $n=2⟹m\leq \sqrt{5}⟹mϵ\left\{1,2\right\}$
3. $n\geq 3⟹\frac{m\left(n-1\right)}{\sqrt{1+n^{2}}}\geq \frac{m\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^{2}}}}\geq \frac{m\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\frac{2m}{\sqrt{10}}$

Если $\frac{2m}{\sqrt{10}}\leq 1$, то уравнение (1) имеет решение при $m=1$.

При $\frac{2m}{\sqrt{10}}>1$, т.е. $m\geq 2$ уравнение (1) не имеет решений.

***Ответ:*** данное уравнение имеет решение, когда выполняется одно из условий:

1. $n=1, m-любое натуральное,$
2. $m=1, n-натуральное,$
3. $n=m=2$.

*Задание.***Решить уравнение в целых числах**$x^{2}y=9999x+y\left(\pm 2;\pm 6666\right);\left(\pm 10;\pm 990\right);(\pm 100;\pm 100)$(Указание. Из уравнения находим

$y=\frac{9999x}{x^{2}-1}. $ П$оскольку x и x^{2}-1 взаимно просты, то x^{2}-1 является делителем 9999$.

**2) Выбор фиксированного модуля**

Фиксируем некоторое число $m$ и рассматриваем остатки, которые даёт, например, левая часть уравнения по модулю $m$, аналогичные остатки должны давать и правая часть по этому модулю, т.е. $g=f⋀g≡a \left(mod m\right)⟹f≡a(mod m)$, где $g, f$ - многочлены от нескольких переменных.

*Пример.***Сколько существует положительных целых чисел** $x$**меньших 10000, для которых** $2^{x}-x^{2}$ **делится на 7.**

*Решение:*

$$\left(2^{x}-x^{2}\right):7⟹2^{x}-x^{2}=7y, \left(2^{x}-x^{2}\right):7⟺2^{x}≡x^{2} (mod 7)$$

Рассмотрим остатки левой и правой частей сравнения в зависимости от $x$ ($x=1,2,3…$)

$$2^{x}: 2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1…$$

$$x^{2}: 1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,1,4…$$

Т=21 – период повторения остатков. Таких групп в результате $\left(0;10000\right)∩Z$ получится 476 и ещё останется 4 элемента, которые содержат одно решение. Каждая группа содержит по 6 решений. Отсюда *ответ:*$6∙476+1=2857$.

*Пример.***Доказать, что уравнение** $x^{3}-x=3y^{2}+1$ **для любых натуральных** $x, y$ **не имеет решений.**

*Доказательство:*$x^{3}-x≡0 \left(mod 3\right) ∀xϵN$

$$3y^{2}+1≡1 (mod 3)∀xϵN$$

Следовательно, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

*Пример.***Найти натуральные числа** $x и у$**, для которых выполняется равенство** $2^{x}-15=y^{2}$**.**

*Решение:*Рассмотрим два случая.

1. $x=2k+1 (x-нечётное число)$. Поскольку $2^{2}$ при делении на 3 даёт в остатке 1, то $2^{2k+1}$при делении на 3 даёт в остатке 2$\left(2^{2k+1}=\left(2^{2}\right)^{k}∙2≡1∙2 \left(mod 3\right)=2\right)$, 15 делится на 3. Следовательно, $y^{2}$ не делится на 3. Но квадрат числа, не делящегося на 3, даёт при делении на 3 в остатке 1. Таким образом, равенство не возможно(правая и левая части дают при делении на 3 разные остатки).
2. $x=2k (x-чётное число)$. Тогда $2^{2k}-y^{2}=15, откуда \left(2^{k}-y\right)\left(2 ^{k}+y\right)=15$. Оба множители слева целые и положительные (так как второй множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта:

$2^{k}-y=1, 2^{k}+y=15 и 2^{k}-y=3, 2^{k}+y=5$*.*

*Ответ:* (6;7); (4;1).

*Задание.***Решить уравнения в целых числах**

1. $y^{2}=5x^{2}+6$нет решений
2. $y^{2}+1=2^{x}\left(0;0\right); (1;\pm 1)$
3. $x^{2}+1=3y$ нет решений
4. **Доказать, что уравнение** $15x+40y=7$ **не имеет целочисленных решений.**
5. $x^{2}+9y^{2}=3z+2$нет решений
6. $x^{2}+5y^{2}=20z+2$нет решений
7. $3^{x}=1+y^{2}$ (0;0)

 **3) Разложение на множители**

Уравнение преобразовывается к виду, в котором левая часть уравнения раскладывается на множители, а правая часть является числом. А т.к. множители левой части также должны быть делителями числа, стоящего в правой части, то задача сводится к системе уравнений.

*Пример.***Найти все решения в целых числах** $x,y$ **уравнения** $xy=20-3x+y$ **(1).**

*Решение:*$\left(1\right)⟺\left(x-1\right)\left(y+3\right)=17⇒\left\{\begin{array}{c}x-1=1\\y+3=17\end{array}; \left\{\begin{array}{c}x-1=-1\\y+3=-17\end{array}; \left\{\begin{array}{c}x-1=17\\y+3=1\end{array}; \left\{\begin{array}{c}x-1=-17\\y+3=-1\end{array}\right..\right.\right.\right.$

*Ответ:*(2,14); (0,-20); (18,-2); (-16,-4).

*Пример.***Найти все целочисленные решения уравнения** $3x^{2}+4xy-7y^{2}=13$**.**

*Решение:*Разложим левую часть на множители:

$3x^{2}+4xy-7y^{2}=\left(x-y\right)\left(3x+7y\right)$*.*

Имеем $\left(x-y\right)\left(3x+7y\right)=13$. Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учётом порядка четырьмя способами ($13=1∙13=13∙1=\left(-1\right)∙\left(-13\right)=\left(-13\right)∙\left(-1\right)$), то получаем четыре системы:

$$\left\{\begin{array}{c}x-y=1,\\3x+7y=13,\end{array}\left\{\begin{array}{c}x-y=13,\\3x+7y=1,\end{array}\left\{\begin{array}{c}x-y=-1,\\3x+7y=-13,\end{array}\left\{\begin{array}{c}x-y=-13,\\3x+7y=-1.\end{array}\right.\right.\right.\right.$$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

*Ответ:* (2,1); (-2,-1).

*Пример.***Найти все пары целых чисел** $\left(x;y\right)$**, при которых является верным равенство** $3xy+16x+13y+61=0$**.**

*Решение:*Умножим данное уравнение на 3 и преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$9xy+3∙16x+3∙13y+3∙61=3y\left(3x+13\right)+16\left(3x+13\right)+3∙61-16∙13=\left(3x+13\right)\left(3y+16-25\right)$$

Решим уравнение

$$\left(3x+13\right)\left(3y+16\right)=25.\left(1\right)$$

Так как делителями числа 25 являются числа $\pm 1, \pm 5, \pm 25$, то множество всех целочисленных решений уравнения (1) содержится в множестве целочисленных решений следующих шести систем:

$$1)\left\{\begin{array}{c}3x+13=1,\\3y+16=25;\end{array} 2)\left\{\begin{array}{c}3x+13=-1,\\3y+16=-25;\end{array} 3) \left\{\begin{array}{c}3x+13=5,\\3y+16=5;\end{array}\right.\right.\right.$$

$$4) \left\{\begin{array}{c}3x+13=-5,\\3y+16=-5;\end{array} 5) \left\{\begin{array}{c}3x+13=25,\\3y+16=1;\end{array} 6) \left\{\begin{array}{c}3x+13=-25,\\3y+16=-1;\end{array}\right.\right.\right.$$

Первая, четвёртая и пятая системы имеют целочисленные решения (-4;3), (-6;-7), (4;-5) соответственно. Остальные системы не имеют решений в целых числах.

*Ответ:* (-4;3), (-6;-7), (4;-5).

*Задание.***Решить уравнения в целых числах**

1. $x^{3}-x^{2}y+x-y=102$ (0;-102); (1;-50); (-1;-52); (4;-2); (-4;-10)
2. $x^{2}-3xy+2y^{2}=3\left(\pm 1;\pm 2\right); \left(\pm 5;\pm 2\right)$
3. $x^{2}-y^{2}=21$(5;2); (5;-2); (-5;-2); (-5;2); (11;10); (11;-10); (-11;-10);
4. $x^{2}=y^{2}+7$ (4;3); (4;-3); (-4;-3); (-4;3)
5. $xy=5-x$ (5;0); (-5;-2); (1;4); (-1;-6)
6. $3xy+10x-13y-35=0$ (6;-5); (4;5); (-4;-3)
7. $3xy+19x+10y+55=0$ (-5;-8); (-3;2); (5;-6)

**4) Выделение целой части**

Метод выделения целой части используется при решении диофантовых уравнений при выполнении следующих условий:

1. Уравнение является линейным относительно одной из переменных.
2. Переменную из условия 1) можно представить в виде$P\left(x\right)+\frac{a}{B(x)}$, где a – целое число.

При выполнении условий 1)-2) можно решить исходное уравнение организовав перебор делителей числа a.

*Пример.***Решить уравнение** $2\left(m+n\right)-mn=2$ **в целых числах.**

*Решение:*$m=\frac{2n-2}{n-2}=2+\frac{2}{n-2}ϵZ⟹$

случаи:

1. $n-2=1⟹n=3⟹m=4$
2. $n-2=-1⟹n=1⟹m=0$
3. $n-2=2⟹n=4⟹m=3$
4. $n-2=-2⟹n=0⟹m=1$

*Ответ:* (1,0); (4,3); (3,4); (0,1).

*Пример.***Решить в целых числах уравнение** $2x^{2}-2xy+9x+y=2$**.**

*Решение:*Выразим $y$через $x:y=\frac{2x^{2}+9x-2}{2x-1}$. Преобразуем полученную дробь:

$y=\frac{2x^{2}+9x-2}{2x-1}=\frac{2x^{2}-x+10x-5+3}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}$.

Поскольку $y и x$ – целые, то $\frac{3}{2x-1}$ должно быть целым числом. Имеем четыре возможности:

1. $2x-1=1; 2) 2x-1=3; 3) 2x-1=-1; 4) 2x-1=-3. $

Затем находим $x и y$.

*Ответ:* (1;9); (2;8); (0;2); (-1;3).

*Задание.***Решить уравнение в целых числах**

1. $x+y=xy$ (0;0); (2;2)
2. $x^{3}-6x^{2}-xy+13x+3y+7=0$ (4;27); (2;-17); (22;423); (-16;307)
3. $x^{3}-xy-7x+2y+23=0$ (3;29); (1;-17); (19; 397); (-15;191)
4. **Решить в натуральных числах уравнение** (650;26); (150;30)

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$**, где** $m>n$**.**

**5) Метод оценки**

*Пример.***Найти все решения в натуральных числах** $x,y,z,t$ **уравнения** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$ **(1).**

*Решение:* Пусть$x\leq y\leq z\leq t$ (\*). Очевидны следующие оценки $x\leq 4∧x\geq 2$, тогда возможны три случая:

1. $x=2⟹\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$ (\*). Т.к. $y\leq z\leq t⇒\frac{3}{y}\geq \frac{1}{2}⟹y\leq 6$, а с другой стороны из (\*) $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}⟹y\geq 3$. Таким образом, $y=3,4,5 или 6$.

$$\left.\begin{array}{c} а) если y=3, то \frac{1}{6}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\leq \frac{2}{z}⟹z\leq 12\\\frac{1}{6}>\frac{1}{z}⟹z>6\end{array}\right|⟹zϵ\left\{7,8,9,10,11,12\right\}$$

* $z=7⟹t=42⟹\left(2,3,7,42\right)$
* $z=8⟹t=24⟹\left(2,3,8,24\right)$
* $z=9⟹t=18⟹\left(2,3,9,18\right)$
* $z=10⟹t=15⟹\left(2,3,10,15\right)$
* $z=11⟹t\notin N$
* $z=12⟹t=12⟹\left(2,3,12,12\right)$

Аналогично рассматриваются случаи $y=4, y=5, y=6$.

Аналогично рассматриваются случаи $x=3 и x=4$.

*Ответ:* (2,3,7,42); (2,3,8,24); (2,3,9,18); (2,3,10,15); (2,3,12,12); (2,4,5,20); (2,4,6,12); (2,4,8,8); (2,5,5,10); (2,5,6,6); (2,6,6,6); (3,3,4,12); (3,3,6,6); (3,4,4,6); (4,4,4,4).

Для оценки можно использовать также некоторые известные неравенства:

1. *Неравенство Коши:*

$$\frac{a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}}{n}\geq \sqrt[n]{a\_{1}∙…∙a\_{n}}$$

1. *Неравенство Чебышева:*

$$\left(a\_{1}\geq a\_{2}\geq …\geq a\_{n}\geq i\right)⋀\left(b\_{1}\geq b\_{2}\geq …\geq b\_{n}\geq 0\right)⟶\left[\left(a\_{1}b\_{1}+a\_{2}b\_{2}+…+a\_{n}b\_{n}\right)\geq \left(a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}\right)\left(b\_{1}+b\_{2}+…+b\_{n}\right)\right]$$

1. *Свойство среднего квадратического:*

$$\sqrt{\frac{a\_{1}^{2}+a\_{2}^{2}+…+a\_{n}^{2}}{n}}\geq \frac{a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}}{n}$$

*Пример.***Найти все решения уравнения** $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$ **в целых числах** $x,y,z$ **отличных от нуля и попарно взаимно простых.**

*Решение:*$\frac{x}{y}∙\frac{y}{z}∙\frac{z}{x}=1⟹т.к. \frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\in Q⋂\left[0,+\infty )\right.$, то эти числа не могут быть все < 1, если же хотя бы одно из них $\geq 1$, то $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>1⟹нет решения.$

*Пример.***Доказать, что для** $m=1 и m=2$ **уравнение** $x^{3}+y^{3}+z^{3}=mxyz$ **(\*) не имеет решений в натуральных числах** $x,y,z$ **и найти все его решения в натуральных числах** $x,y,z$**для**$m=3$**.**

*Решение:*$\left(\*\right)⟺\frac{x^{2}y}{y^{2}z}+\frac{y^{2}z}{z^{2}x}+\frac{z^{2}x}{x^{2}y}=m$. Из предыдущего примера вытекает, что $m\ne 1$.

Если $m=2⟹\frac{x^{2}y}{y^{2}z}+\frac{y^{2}z}{z^{2}x}+\frac{z^{2}x}{x^{2}y}=2 (\*\*)$. Если бы числа $\frac{x^{2}y}{y^{2}z}, \frac{y^{2}z}{z^{2}x}, \frac{z^{2}x}{x^{2}y}$ были бы все равны между собой, то, т.к. они положительны и произведение их рано 1, то все они должны быть равны 1 и мы имели бы $\frac{x^{2}y}{y^{2}z}+\frac{y^{2}z}{z^{2}x}+\frac{z^{2}x}{x^{2}y}=3>2$. В силу неравенства Коши:

$\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^{2}y}{y^{2}z}+\frac{y^{2}z}{z^{2}x}+\frac{z^{2}x}{x^{2}y}\right)\right]^{3}\geq \frac{x^{2}y}{y^{2}z}∙\frac{y^{2}z}{z^{2}x}∙\frac{z^{2}x}{x^{2}y}=1⟹\frac{x^{2}y}{y^{2}z}+\frac{y^{2}z}{z^{2}x}+\frac{z^{2}x}{x^{2}y}\geq 3⟹$ противоречие с (\*\*).

Если $m=3⟹\frac{x^{2}y}{y^{2}z}=\frac{y^{2}z}{z^{2}x}=\frac{z^{2}x}{x^{2}y}=1⇒x^{2}y=y^{2}z=z^{2}x=n, n\in N⟹\left(xyz\right)^{3}=n^{3}⟹xyz=n⟹\frac{z}{x}=1⟹z=x$.

Аналогично доказывается, что$y=x$.

Итак, все решения (\*) мы получим, положив $z=x$=y, где $x$ - любое натуральное число.

*Пример.***Решить в натуральных числах уравнение**

$\left(x\_{1}^{2}+1\right)∙\left(x\_{1}^{2}+2^{2}\right)∙…∙\left(x\_{n}^{2}+n^{2}\right)=2^{n}∙n!∙x\_{1}∙x\_{2}∙…∙x\_{n}, где nϵN$***.***

$Указание$*:*оценить каждый множитель левой части, используя неравенства.

*Ответ:*($1,2,…,n$).

**6) Сведение уравнения к квадратному и последующий анализ дискриминанта.**

Этот метод основан на рассмотрении уравнения как квадратного относительно одной из переменных. Используется при решении диофантового уравнения вида

$$Ax^{2}+By^{2}+Cx+Dy+Exy+F=0 \left(1\right),где A\ne 0 или B\ne 0$$

Допустим, что $A\ne 0$, тогда рассматриваем это уравнение как квадратное относительно $x:\left(1\*\right) Ax^{2}+x\left(C+Ey\right)+\left(By^{2}+Dy+F\right)=0$.

1. Анализ дискриминанта.

а) Если Д-полный квадрат, то можно разложить (1\*) на множители, т.е. получить следующий вид уравнения (1\*): $\left(x-P(y)\right)\left(x-Q(y)\right)=0$.

*Пример*.**Решить уравнение** $x^{2}-xy+\left(y-1\right)=0$ **в целых числах.**

*Решение:*$D=y^{2}-4y+4=\left(y-2\right)^{2}⟹x\_{1}=1, yϵZ x\_{2}=1-y, yϵZ$.

б) Если $D\geq 0$ на конечной области некоторого отрезка $\left[a,b\right]$, то организуем перебор, выбирая те значения, для которых $D$ является полным квадратом.

*Пример.***Решить уравнение** $x^{2}+y^{2}-4x-7y+2=0$ **в целых числах.**

*Решение:*$x^{2}-4x+\left(y^{2}-7y+10\right)=0⟹D\_{1}=-y^{2}+7y-6=-\left(y-1\right)\left(y-6\right)$

$D\_{1}\geq 0⟺yϵ\left[1;6\right]$*.* Перебирая возможные случаи, получаем.

Ответ: (2,1); (2,6); (0,2); (4,2); (0,5); (4,5)

в) Если $D\geq 0$ на бесконечной области, то попытаться проанализировать дискриминант, исходя из других соображений.

*Пример.***Решить уравнение в целых числах** $x^{2}+2xy+5y=0$**.**

*Решение:*

$$D=4y\left(y-5\right) D\geq 0⟺yϵ(\left.-\infty ,0\right]∪\left[5,+\infty )\right.$$

$$Пусть d=(y,y-5)⟹5\vdots d⟹dϵ\left\{1,-1,5,-5\right\}$$

$$1) d=\pm 5⟹y=5m, mϵZ⟹D=4∙25∙m∙\left(m-1\right).$$

$$Т.к. \left(m, m-1\right)=1⟹$$

$$\left(D=n^{2}⟺m=a^{2} и m-1=b^{2}, где a,bϵZ\right)⟹a^{2}-b^{2}=1⟺a^{2}=1^{2} и b^{2}=0^{2}⇒d=\pm 5⟹y=5 ⇒x=-5$$

*2)*$d=\pm 1⟹\left(y,y-5\right)=1$

$D=n^{2}⟺\left\{\begin{array}{c}y=a^{2}\\y-5=b^{2}\end{array} или \left\{\begin{array}{c}y=-a^{2}\\y-5=-b^{2}\end{array}, где a,bϵZ\right.\right.$*.*

$$a) Из первой системы получаем a^{2}-b^{2}=5⟹\left[\begin{array}{c}a=3⇒y=9\\a=-3⟹y=9\end{array}\right.$$

б) Решая вторую систему получаем $y=-4$.

$D=0⟺y=0 или y=5$*.*

Итак, $D=n^{2}, nϵZ⟺yϵ\left\{9,-4,0,5\right\}$.

*Ответ:* (0,0); (-5,5); (-15,9); (-3,9); (-2,-4); (10,-4).

1. Иногда полезно бывает применять при решении уравнения (1) другие приёмы, не прибегая к анализу дискриминанта.

а) сведение (1) к виду $\left(ax+b\right)^{2}+\left(cy+d\right)^{2}+\left(ex+fy\right)^{2}=m (\*)$

* $m<0⟹$уравнение не имеет решения
* $m=0⟹$ уравнение (1) имеет решения, которые получаются при решении системы $\left\{\begin{array}{c}ax+b=0\\cy+d=0∩Z\\ey+fy=0\end{array}\right.$

*Пример.***Решить в целых числах уравнение**$log\_{2}^{2}\left(x+y\right)+log\_{2}^{2}\left(xy\right)+1=2log\_{2}\left(x+y\right) (\*)$**.**

*Решение:*$\left(\*\right)⟺log\_{2}^{2}\left(xy\right)+\left(log\_{2}\left(x+y\right)-1\right)^{2}=0⟺$

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{2}\left(xy\right)=0\\log\_{2}\left(x+y\right)=1\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}xy=1\\x+y=2\end{array}⟹x=y=1\right.\right.$$

* $m>0⟹$ при небольшом значении $m$ значения для квадратов можно получить методом подбора.

*Пример.***Решить в целых числах уравнение** $x+y=x^{2}-xy+y^{2}$ **(1).**

*Решение:*$\left(1\right)⟺\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}+\left(x-y\right)^{2}=2⇒$

$$1)\left\{\begin{array}{c}\left(x-y\right)^{2}=0\\\left(x-1\right)^{2}=1\\\left(y-1\right)^{2}=1\end{array}\right.⟹\left(0,0\right);\left(2,2\right). 2) \left\{\begin{array}{c}\left(x-1\right)^{2}=0\\\left(y-1\right)^{2}=1\\\left(x-y\right)^{2}=1\end{array}⟹\left(1,0\right);\left(1,2\right). \right.$$

$$3) \left\{\begin{array}{c}\left(y-1\right)^{2}=0\\\left(x-1\right)^{2}=1\\\left(x-y\right)^{2}=1\end{array}⟹\left(0,1\right);\left(2,1\right).\right.$$

*Ответ:* (0,0); (2,2); (1,0); (1,2); (0,1); (2,1).

б) перенос свободного члена в правую часть. Если правая часть раскладывается на множители, то данное уравнение можно решить методом «разложения на множители», т.е. через анализ свободного члена.

*Пример.***Найти все пары целых чисел** $\left(x,y\right)$**, удовлетворяющих уравнению** $x^{2}=y^{2}+2y+13$ **(1).**

*Решение:*$\left(1\right)⟺x^{2}=\left(y+1\right)^{2}+12⟺\left(x-y-1\right)\left(x+y+1\right)=12\left(\*\right)$

$\left(\*\right)⟹\left(x-y-1\right)\vdots 2 и \left(x+y+1\right)\vdots 2⟹$ 4 возможности: одна из скобок равна $\pm 2$, вторая $\pm 6$.

*Ответ:* (4,1); (4,-3); (-4,1); (-4,-3).

*Пример.***Выяснить имеет ли уравнение (\*)** $19x^{2}-76y^{2}=1976$**решение в целых числах.**

*Решение:*$\left(\*\right)⟺x^{2}-4y^{2}=104⟺A∙B=104, где A=x+2y, B=x-2y$.

Очевидно, что $\left(x+2y\right)\vdots 2 и \left(x-2y\right)\vdots 2 и \left(x+2y\right)-\left(x-2y\right)=4y\vdots 4⟹$ четыре возможности

$104=2∙52=4∙26=\left(-2\right)∙\left(-52\right)=\left(-4\right)∙\left(-26\right), но A-B не делится на 4⟹нет решения$*.*

в) иногда полезно оставить в левой части многочлен, зависящий только от одной переменной, а все другие элементы перенести в правую часть.

*Пример.*$x^{2}+x-y^{4}-y^{3}-y^{2}-y=0$ **(\*) решить в целых числах.**

*Решение:*$\left(\*\right)⟺x^{2}+x=y^{4}+y^{3}+y^{2}+y$ (\*\*)$⟺\left(2x+1\right)^{2}=4y^{4}+4y^{3}+4y^{2}+4y+1$

$$\left(4y^{4}+4y^{3}+4y^{2}+4y+1\right)=\left(4y^{4}+4y^{3}+y^{2}\right)+\left(3y^{2}+4y+1\right)=\left(2y^{2}+y\right)^{2}+\left(3y^{2}+4y+1\right)=P^{2}\left(y\right)+Q(y)$$

$$Q\left(y\right)=3y^{2}+4y+1>0 ∀yϵZ\\left\{-1\right\}⟹\left(2x+1\right)^{2}>P^{2}\left(x\right)=\left(2y^{2}+y\right)^{2}(1)$$

$$\left(4y^{4}+4y^{3}+4y^{2}+4y+1\right)=\left(2y^{2}+y+1\right)^{2}+\left(2y-y^{2}\right)=P\_{1}^{2}\left(y\right)+Q\_{1}(y)$$

$Q\_{1}\left(y\right)<0 ∀yϵZ\\left\{0,1,2\right\}⟹\left(2x+1\right)^{2}<P\_{1}^{2}\left(y\right)=\left(2y^{2}+y+1\right)^{2} (2)$.

Из (1), (2)$⟹∀yϵZ\\left\{0,-1,1,2\right\}\left(2y^{2}+y+1\right)^{2}>\left(2x+1\right)^{2}>\left(2y^{2}+y\right)^{2}$, т.к. $A=B+1, где A=2y^{2}+y+1, B=2y^{2}+y⟹\left(2x+1\right)\notin Z$.

Рассмотрим случаи $y\in \left\{0,-1,1,2\right\}⟹$правая часть (\*\*)$ϵ\left\{0,4,30\right\}x^{2}+x=c, cϵ\left\{0,4,30\right\}⟹$

*Ответ:*(0,-1); (-1,-1); (0,0); (-1,0); (5,2); (-6,2).

*Пример.***Найти какие-нибудь натуральные числа, удовлетворяющие уравнению** $x^{2}-51y^{2}=1$ **(1).**

*Решение:*$\left(1\right)⟺51y^{2}+1=x^{2}⇒51y^{2}+1-полный квадрат.$

$51y^{2}+1=\left(7y+1\right)^{2}+2y\left(y-7\right)⟹y=7⟹x=50$ *.*

*Ответ:* (50,7).

*Задание.***Решить в целых числах уравнения**

1. $x^{3}+7y=y^{3}+7x$ (ответ: ($\pm 1;\pm 2$); $\left(\pm 1;\mp 3\right); \left(\pm 2;\pm 1\right); \left(\pm 2;\mp 3\right); \left(\pm 3;\mp 1\right);\left(\pm 3;\mp 2\right)$)
2. $x^{2}+2xy=4x+7$(7;-1); (-7;5); (1;5); (-1;-1)
3. $2x^{2}-12xy+19y^{2}=132$ (14;2);(2;-2); (-2;2);(-14;-2); (-34;-10);(34;10);(26;10); (-26;-10) (у-четное)
4. $2x^{2}+3xy+3y^{2}=2x+6y$ (0;0); (1;0); (1;1); (0;2); (-2;2)
5. $x^{2}+4xy+13y^{2}=58$ (5;1); (-5;-1); (9;-1); (-9;1)

**7) Метод бесконечного спуска**

Этот метод обычно используется для доказательства того, что уравнение имеет в целых числах решение вообще или кроме указанных. В качестве примера рассмотрим **уравнение** $x^{4}+y^{4}=z^{2}$ (1) **–доказать, что оно не имеет целочисленных решений с**$xyz\ne 0, z>0$**.**

Предполагая, что (1) имеет целочисленное решение, мы построим другое решение с меньшим положительным $z$. Очевидно, что это невозможно, ибо в этом случае мы получили бы бесконечную последовательность убывающих положительных целых чисел.

*Доказательство:*

Предположим, что $\left(x,y,z\right)=1, z>0$.

$$\left\{\begin{array}{c}x=2k+1\\y=2m+1\end{array}-не выполняется, т.к. \left[\begin{array}{c}z-чёт.⟶z^{2}≡0 \left(mod 4\right)\\z-неч.⟶z^{2}≡1 \left(mod 4\right)\end{array}⟹x^{4}+y^{4}≢2 \left(mod 4\right)\right.\right.$$

$\left(1\right)⟹\left.\begin{array}{c}x=2k\\y=2m+1\end{array}\right|⇒z=2l+1$.

$y^{4}=\left(z-x^{2}\right)\left(z+x^{2}\right)$, а т.к. любое простое число, делящее два сомножителя справа, должно делить также $2z и 2x^{2}$, то получаем $\left(z-x^{2}, z+x^{2}\right)=2⟹два случая:$

$$\left(\*\right)\left\{\begin{array}{c}z-x^{2}=2a^{4},a>0, a-неч.\\z+x^{2}=8b^{4}\\\left(a,b\right)=1\end{array}\right. (\*\*)\left\{\begin{array}{c}z-x^{2}=8b^{4}\\z+x^{2}=2a^{4}, a>0, a-неч.\\\left(a,b\right)=1\end{array}\right.$$

Рассмотрим случай (\*) $\left.\begin{array}{c}x^{2}≡1 \left(mod 4\right)\\-a^{4}+4b^{4}≡3 (mod 4)\end{array}\right|⟹x^{2}≢-a^{4}+4b^{4}⟹\left(\*\right) не выполняется$.

Рассмотрим случай (\*\*)$⇒4b^{4}=\left(a^{2}-x\right)\left(a^{2}+x\right).$

Т.к. $\left(a,b\right)=1⇒\left(a,x\right)=1⟹\left(a^{2}-x,a^{2}+x\right)=2⇒\left\{\begin{array}{c}a^{2}-x=2c^{4}\\a^{2}+x=2d^{4}\end{array}⇒a^{2}=c^{4}+d^{4}\right..$

Таким образом, мы нашли решение уравнения (1) с меньшим $z$ и тем самым завершили доказательство.

*Пример.***Найти целочисленные решения уравнения** $113x+179y=17$**, удовлетворяющие неравенствам** $x>0, y>-100$**.**

*Решение:* Воспользуемся методом, сходным с алгоритмом Евклида. Имеем 179=113+66. Перепишем наше уравнение в виде

$$113\left(x+y\right)+66y=17.$$

Обозначим $x+y=u, 113u+66y=17$. Как видим, у нового уравнения один из коэффициентов уменьшился. Можно вновь 113 разделить на 66 с остатком, а лучше так: $113=2∙66-19$. Получаем

$$66\left(2u+y\right)-19u=17.$$

Обозначим $2u+y=v, 66v-19u=17, 66=19∙3+9.$Получаем уравнение

$$19\left(3v-u\right)+9v=17, 3v-u=w;$$

$$19w+9v=17, 9\left(2w+v\right)+w=17, 2w+v=t.$$

Наконец, получаем уравнение $9t+w=17$. Это уравнение имеет очевидное решение: $w=17-9t, где t-любое целое число.$

Двинулись в обратный путь: $v=t-2w=t-34+18t=19t-34, u=3v-w=66t-119, y=v-2u=-113t+204, x=u-y=179t-323.$

Таким образом, $x=179t-323, y=-113t+204, где t-произвольное целое.$ Из условия $x>0, y>-100 найдём t=2, x=35, y=-22$.

*Ответ:* 35; -22.

*Задание.*

1. **Доказать, что уравнение** $15x+40y=7$ **не имеет целочисленных решений.**
2. **Найти все целочисленные решения уравнения** $4x-3y=11$**.**
3. **Найти все целочисленные решения уравнения** $3x+4y=18$**.**
4. **Найти все целочисленные решения уравнения** $9x-7y=4$**.**
5. **Найдите натуральные**$x и y$**, такие, что** $117x-79y=17$**, для которых** $x+y$ **имеет наименьшее значение**.

**Список литературы**

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и проф. уровни/ Колягин Ю.М, Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. - 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 368 с.
2. ЕГЭ задание С6 с решениями и ответами. Шевкин А.В., Пукас Ю.О. – М.: Экзамен, 2011. – 64 с.
3. Математика в задачах для поступающих в вузы/Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др.; Под ред. М.И. Сканави. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование»», 2011. – 912 с.
4. О решении уравнений в целых числах./ Серпинский В. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 89 с.
5. Решение уравнений в целых числах. / Гельфонд А.О.- 5-е изд. – М.: Либроком, 2010. – 96 с.
6. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. Пособие для 10 кл. сред. шк./Шарыгин И.Ф. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
7. Математика в школе.