Цикл практических занятий по математике «Решим задачи части «С» ЕГЭ

Решение алгебраических неравенств с одной переменной (задания С3)

I. Решить неравенства и системы неравенств.

1. Решить систему неравенств: **а)** $\begin{cases} x^2-2x-15\ge 0 \\ 2-x\ge \dfrac{8-9x}{7}. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-x-12\ge 0 \\ 3x-5\le \dfrac{4x+5}{3}. \end{cases}$

2. Решить систему неравенств: **а)** $\begin{cases} \left(x^2-6x-7\right)\sqrt{8+2x-x^2}\ge 0 \\ |x+1|\le 1. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \left(x^2-4\right)\sqrt{5-4x-x^2}\ge 0 \\ |x+1|\le 2. \end{cases}$

3. $(x-2)\sqrt{16-x^2}\le 0$. **Ответ:** $[-4;2]\cup\{4\}$.

4. $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}\le 0$. **Ответ:** $[-3;1)\cup\{3\}$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2^x+1}}\ge\dfrac{1}{5-2^x}$. **Ответ:** $(-\infty;\log_2 3]\cup(\log_2 5;+\infty)$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{3-\lg x}}\ge\dfrac{1}{\lg x-1}$. **Ответ:** $(0;10)\cup[100;1000)$.

7. $\log_{0,2}\left(x^2+4x-2\right)\ge\log_{0,2}|x+2|-1$. **Ответ:** $\left[-8;-2-\sqrt{6}\right)\cup\left(-2+\sqrt{6};4\right]$.

8. $\log_5\left(x^2-6x-5\right)\le\log_5|x-3|+1$. **Ответ:** $\left[-4;3-\sqrt{14}\right)\cup\left(3+\sqrt{14};10\right]$.

9. $\dfrac{\left(\log_{3-x}(x+1)\right)^2}{1-x^2}\le 0$. **Ответ:** $(1;2)\cup(2;3)\cup\{0\}$.

10. $\dfrac{\left(\log_{x-1}(5-x)\right)^2}{x^2-8x+15}\ge 0$. **Ответ:** $(1;2)\cup(2;3)\cup\{4\}$.

11. $\log_2 x-\log_x 32<4$. **Ответ:** $(0;0,5)\cup(1;32)$.

12. $2\log_3 x-\log_x 9<3$. **Ответ:** $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(1;9)$.

13. $3^x-3^{\frac{1}{2}-x}>\sqrt{3}-1$. **Ответ:** $(0,5;+\infty)$.

14. $5^x-3\cdot 5^{\frac{1}{2}-x}+3-\sqrt{5}\ge 0$. **Ответ:** $[0,5;+\infty)$.

15. $\log_{x+1}\left(2x^2-3x+1\right)\le 2$. **Ответ:** $(-1;0)\cup(0;0,5)\cup(1;5]$.

16. $\log_{x+\frac{3}{2}}\left(2x^2-x\right)\le 2$. **Ответ:** $(-1,5;-0,5)\cup(0,5;0)\cup(0,5;4,5]$.

17. $\sqrt{4\lg x-24}\ge 9-\lg x$. **Ответ:** $\left[10^7;+\infty\right)$.

18. $\sqrt{12\lg x-8}\ge 1-3\lg x$. **Ответ:** $\left[10^{\frac{2}{3}};+\infty\right)$.

19. $\dfrac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2}\le 1$. **Ответ:** $(-\infty;-1]\cup(1;2)\cup(2;3)\cup[4;8)$.

20. $\dfrac{\lg\left(\dfrac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\dfrac{x}{3}-1\right)^2}\le 1$. **Ответ:** $(-15;3]\cup(0;3)\cup(3;6)\cup[12;+\infty)$.

II. Задана функция $f(x)$. Найти область определения функции $y(x)$.

1. $f(x)=\log_{(1-x)^2}\left(1-\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)^{-1}\right);\quad y(x)=f(x)\cdot\sqrt{36-x^2}$.

Ответ: $(-2;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;5)\cup(5;6]$.

2. $f(x)=\log_{|x|}\left(1-\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{-1}\right);\quad y(x)=f(x)\cdot\sqrt{16-x^2}$.

Ответ: $[-4;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;3)$.

III. Решить уравнения и системы неравенств.

1. **а)** Решить уравнение:

$4^{\lg x}=128-x^{\lg 4}$

б) Решить неравенство:

$$\left(4^{\lg x}+x^{\lg 4}-128\right)\cdot\left(\frac{5^x-25}{3-2^x}\right)\cdot\left(\frac{(x-3)(1-x)}{|(x-3)(x-1)|}+\frac{1}{5}\sin 4x\right)\ge 0$$

Ответ: **а)** 1000; **б)** $(1;\log_2 3)\cup[2;3)\cup[1000;+\infty)$.

2. **а)** Решить уравнение:

$6^{\lg x}=12-x^{\lg 6}$

б) Решить неравенство:

$$\left(6^{\lg x}+x^{\lg 6}-12\right)\cdot\left(\frac{3^x-27}{5-2^x}\right)\cdot\left(\frac{(x-6)(4-x)}{|(x-6)(x-4)|}+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\le 0$$

Ответ: **а)** 10; **б)** $(0;\log_2 5)\cup[3;4)\cup(6;10]$.

3. Решить систему неравенств: $\begin{cases}9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\ge 6\\ \log_2^2 x+6>5\log_2 x\end{cases}$ **Ответ:** $(\sqrt{10};4)\cup(8;+\infty)$.

4. Решить систему неравенств: $\begin{cases}5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\ge 2\sqrt[4]{5}\\ \log_3^2 x+2>3\log_3 x\end{cases}$ **Ответ:** $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt5}\right]\cup\left[\sqrt5;3\right)\cup(9;+\infty)$.

5. Решить систему неравенств: $\begin{cases}\log_{3-x}(x+1)\cdot\log_{x+5}(4-x)\ge 0\\ \left|\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\right|^{x-1,2}+\left|\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\right|^{1,2-x}\le 2\end{cases}$

Ответ: $1{,}2$.

6. Решить систему неравенств: $\begin{cases}\log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3)\ge 0\\ |2x-6|^{x+1}+|2x-6|^{-x-1}\le 2\end{cases}$

Ответ: $-1;\,2{,}5$.

7. **а)** Решить неравенство: $7\log_3\left(x^2-7x+12\right)\le 8+\log_3\dfrac{(x-3)^7}{x-4}$

б) Решить систему неравенств: $\begin{cases}7\log_9\left(x^2-x-6\right)\le 8+\log_9\dfrac{(x+2)^7}{x-3}\\ \dfrac{1}{3^{x-1}}+\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{3^{x+1}}<52\end{cases}$

Ответ: **а)** $[1;3)\cup(4;7]$; **б)** $(-1-\log_3 4;-2)\cup(3;12]$.

8. **а)** Решить неравенство: $4^{x+1}-13\cdot 6^x+9^{x+1}\le 0$

б) Решить систему неравенств: $\begin{cases}4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}+3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}\ge 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}\\ \log_{\frac{1}{3}}|x-2|-\log_{2-x}3\le 2\end{cases}$

Ответ: **а)** $[-2;0]$; **б)** $[-\sqrt2;1)$.