**Городская научно-практическая конференция**

**«В науку шаг за шагом»**

**Исследовательская работа**

**« Метод математической индукции как**

**эффективный метод доказательства гипотез»**

**Выполнена: учеником 9-А класса МОУ «Гимназия №20»**

**Хоченковым Константином**

**Руководитель: учитель математики,**

**Бондаренко Ольга Валентиновна.**

**Донской,2011год**

**Содержание**

1. Введение…………………………………….……………………………..3
2. Из истории возникновения и развития метода математической

индукции …..………………………………………………………...…….4-5

III. Основные результаты исследования……………………………..………6

1) Общие и частные утверждения ……………………………………...6

2) Дедук­ция……………………………………………………………6

3) Индукция……………………………………………………………...…6

4) Неполная индукция…………………………………………………..…6

5) Полная индукция………………………………………………………...7

6) Метод математической индукции……………………………………..7

7) Применение метода математической индукции…………..….……...7-8

8)Второй вариант метода математической индукции……....................8-9

9)Замечание к методу математической индукции……….……...9

IV. Приложения………………………………………………………………10-24

V. Заключение…………………………………………………………………25

VI. Список литературы………………………………………………………..26

**Введение**

***Актуальность темы***

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории. Но дедукция не является единственным методом научного мышления. В экспериментальных науках велика роль индуктивных выводов. В математике индукция часто позволяет угадать формулировку теорем, а в ряде случаев и наметить пути доказательств.

Для исследования я выбрал тему « Метод математической индукции», т. к. в школьной программе с методом математической индукции знакомятся только поверхностно. В то время как подробное знакомство с этим методом полезно учащимся не только из-за расширения их кругозора, но также и потому, что на его принципе основано решение многих задач (включая олимпиадные). Мною был изучен принцип математической индукции, а также его широкое применение в решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств (в частности неравенства Бернулли), решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач.

***Цель работы:***

познакомиться с методом математической индукции, систематизировать знания по данной теме и применить её при решении математических задач и доказательстве теорем, обосновать и наглядно показать практическое значение метода математической индукции как необходимого фактора для решения задач.

***Задачи работы:***

1. Проанализировать литературу по данной теме.

2. Освоить разные методы и методики работы.

3.Обобщить и систематизировать знания по данной теме.

4. Совершенствовать знания, умения, навыки по данной теме.

5. Развивать творческий подход к решению задач.

6.Прорешать задачи различных видов, применяя данный метод.

7.Предоставить выводы по данной теме.

8.Сформировать представления о математики как части общечеловеческой культуры, понимать значимость математики.

***Гипотеза***

Метод математической индукции приводит только к верным выводам.

***Методы и методики исследования, используемые в работе***

1.Анализ математической литературы и ресурсов Интернета по данной теме.

2.Репродуктивное воспроизведение изученного материала.

3.Познавательно - поисковая деятельность.

4.Анализ и сравнение данных в поиске решения задач.

5.Постановка гипотез и их поверка.

6.Сравнение и обобщение математических фактов.

7.Решение задач различных видов.

8.Анализ полученных результатов.

**Из истории возникновения и развития метода математической индукции**

Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в XIX веке усиленное внимание к вопросам ее «обоснования», т.е. критического пересмотра ее исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических примеров, употребляемых при этих доказательствах.

Только к концу XIX века сложился стандарт требований к логической строгости, остающейся и до настоящего времени господствующими в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий.

Современная математическая логика дала на этот вопрос, определенный ответ: ***никакая единая дедуктивная теория не может исчерпать разнообразия проблем теории чисел.***

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений. После опытов Майкельсона по измерению скорости света в движущейся среде оказалось необходимым уточнить законы физики, создать теорию относительности.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломанного, естественно было сформулировать аксиому: для любых трех точек А, В и С выполняется неравенство

.

Лежащее в основе арифметики понятие «следовать за» тоже появилось при наблюдениях за строем солдат, кораблей и другими упорядоченными множествами.

Не следует, однако, думать, что этим исчерпывается роль индукции в математике. Разумеется, мы не должны экспериментально проверять теоремы, логически выведенные из аксиом: если при выводе не было сделано логических ошибок, то они постольку верны, поскольку истинны принятые нами аксиомы. Но из данной системы аксиом можно вывести очень много утверждений. И отбор тех утверждений, которые надо доказывать, вновь подсказывается индукцией. Именно она позволяет отделить полезные теоремы от бесполезных, указывает, какие теоремы могут оказаться верными, и даже помогает наметить путь доказательства.

В математике уже издавна используется индуктивный метод, основанный на том, что то или иное общее утверждение делается на основании рассмотрения лишь нескольких частных случаев. История, например, сохранила следующее высказывание Э й л е р а: « У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов… И кажется невозможным, чтобы закон, который, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

Веря в непогрешимость индукции, ученые иногда допускали грубые ошибки.

К середине семнадцатого столетия в математике накопилось немало ошибочных выводов. Стала сильно ощущаться потребность в научно обоснованном методе, который позволял бы делать общие выводы на основании рассмотрения нескольких частных случаев. И такой метод был разработан. Основная заслуга в этом принадлежит французским математикам П а с к а л ю (1623 - 1662) и Д е к а р т у, а также швейцарскому математику Якобу Б е р -н у л л и (1654-1705).

**Основные результаты исследования.**

1) В процессе работы я выяснил, что все утверждения можно разделить на общие и частные. Примером общего утверждения является, например, утверждение:«В любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны». Частным является, например, утверждение: «Число 136 делится на 2».

2) Переход от общих утверждений кчастным называется ***дедук­цией.***В математике дедуктивный метод мы применяем, например, в рассуждениях такого типа: данная фигура - прямоугольник; у каждого прямоугольника диагонали равны, следовательно, и у данного прямоугольника диагонали равны.

3) Но наряду с этим математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим, т.е. использовать метод, противоположный дедуктивному, который называется ***индукцией***.

***Индуктивный*** подход обычно начинается с анализа и сравнения, данных наблюдения или эксперимента. Многократность повторения какого-либо факта приводит к индуктивному обобщению. Результат, полученный индукцией, вообще говоря, не является логически обоснованным, доказанным. Известно много случаев, когда утверждения, полученные индукцией, были неверными. Т. е. индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам.

4) Рассмотрим **пример**. Подставляя в квадратный трехчлен *P(х)= х2+ х+ 41* вместо *х* натуральные числа 1,2,3,4,5, найдем: *Р(1)= 43; Р(2)=47; Р(3)= 53; Р(4)= 61; Р(5)= 71.* Все значения данного трехчлена являются простыми числами. Подставляя вместо *х* числа 0, -1, -2, -3, -4, получим: *Р(0)=41;*

*Р(-1)=41; Р(-2)=43; Р(-3)=47; Р(-4) =53.* Значения данного трехчлена при указанных значениях переменной *х* также являются простыми числами. **Возникает гипотеза**, что значение трехчлена *Р(х)* является простым числом при любом целом значении *х*. Но высказанная **гипотеза ошибочна**, так как, например, *Р(41)= 412+41+41=41∙43.*

Так как при этом методе вывод делается после разбора нескольких примеров, не охватывающих всех возможных случаев, то этот метод называется ***неполной или несовершенной индукцией.***

Метод неполной индукции, как мы видим, не приводит к вполне надежным выводам, но он полезен тем, что **позволяет сформулировать гипотезу**, которую потом можно доказать точным математическим рассуждением или опровергнуть. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является **мощным эвристическим методом открытия новых истин**.

5) Если же вывод делается на основании разбора всех случаев, то такой метод рассуждений называют ***полной индукцией.***

Вот **пример** подобного рассуждения. Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число *п* в пределах 10< *п* < 20 представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения: *10=7+3; 12=7+5; 14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7*. Эти шесть равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

6) Пусть некоторое утверждение справедливо в нескольких част­ных случаях. Рассмотрение всех остальных случаев или совсем невозможно, или требует большого числа вычислений. Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще? Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого ***методом математической индукции***.В основе данного ***метода*** лежит ***принцип математической индукции*.**

**Если предположение, зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 и из того, что оно истинно для n=k (где k-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа n=k+1, то предположение истинно для любого натурального числа n.**

Метод математической индукции - есть эффективный метод доказательства гипотез (утверждений), основанный на использовании принципа математической индукции, поэтому он приводит только к верным выводам.

Методом математической индукции **можно решать не все задачи**, а только задачи, **параметризованные** некоторой переменной. Эта переменная называется переменной индукции.

7) Метод математической индукции имеет наибольшее применение в арифметике, алгебре и теории чисел.

**Пример 1**. Найти сумму *Sп =*

Сначала найдем суммы одного, двух и трех слагаемых. Имеем:

*S1 = * ; *S2 = *;  *S3 = *.

В каждом из этих случаев получается дробь, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе — число, на единицу большее числа слагаемых. Это позволяет высказывать **гипотезу (** предположение), что при любом натуральном *п*  *Sп = *.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом матема­тической индукции.

1) При ***п*** = 1 гипотеза верна, так как *S1* =  .

2) Предположим, что гипотеза верна при *п* = k, то есть

Sk =  .

Докажем, что тогда гипотеза должна бытьверной и при *п**= k+*1, то есть

*Sk+1 =* .

Действительно, *S k+1 = Sk* 

*S k+1 =*

Таким образом, исходя из предположения, что гипотеза*Sп=*

верна при *п = k,* мы доказали, что она верна и при *п*= *k* ***+*** *1.*

Поэтому формула  *Sп =* верна при любом натуральном *п*.

**Пример 2.** Доказать, что для любого натурального числа *п* и любого действительного числа *а > -1* имеет место неравенство, называемое ***неравенством Бернулли*** ( названо в честь швейцарского математика XVII в. Якова Бернулли)***:*** *(1+a) п ≥ 1 + ап.*

1) Если *п=1*, то очевидно, что неравенство верно: *(1+а)1 ≥ 1+а.*

2) Предположим, что неравенство верно при *n=k:* *(1+a)k ≥ 1 + ak.*

Умножим обе части последнего неравенства на положительное число *1+ а,* в результате чего получим *(1+a)k+1 ≥ 1+ak+a+a2k.*

Отбрасывая последнее слагаемое в правой части неравенства, мы уменьшаем правую часть этого неравенства, а поэтому *(1+a)k+1 ≥ a(k+1).*

Полученный результат показывает, что неравенство верно и при *n=k+1.*

Обе части доказательства методом математической индукции проведены, и, следовательно, неравенство справедливо при любом натуральном *п.*

Заметим, что всё решение было разбито на **четыре этапа**:

**1.база** ( показываем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев ( ***п*** = 1);

**2.предположение** (предполагаем, что утверждение доказано для первых ***к*** случаев; **3**.**шаг** ( в этом предположении доказываем утверждение для случая ***п* = *к* + 1); 4.вывод ( у**тверждение верно для всех случаев, то есть для всех ***п)***.

8) **Второй вариант метода математической индукции.**

Некоторые утверждения справедливы не для всех натураль­ных *п,* а лишь для натуральных *п,* начиная с некоторого числа *р.* Такие утверждения иногда удается доказать методом, несколько отличным от того, который описан выше, но вполне аналогич­ным ему. Состоит он в следующем.

**Утверждение верно при всех натуральных значениях п ≥ р, если:** 1)оно верно при *п* =р (а не при *п* = 1, как было сказано выше);

2)из справедливости этого утверждения при *п* = k, где k ≥ р (а не k ≥ 1, как сказано выше), вытекает, что оно вер­но и при *п* = k + 1.

**Пример 1**. Докажите, что для любого  справедливо равенство



Обозначим произведение в левой части равенства через , т.е.

мы должны доказать, что .

Для n=1 формула не верна ( 1- 1) = 1( неверно ).

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2. , - верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е. 

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.





По принципу математической индукции равенство справедливо для любого натурального .

**Пример 2.** Докажите, что 2>2n + 1 при любом натуральном n3.

1) При n = 3 неравенство верно. 2>23 + 1.

2) Предположим, что 2>2k + 1 (k3).

3) Докажем, что 2> 2(k + 1) + 1.

В самом деле, 2 = 22>2(2k + 1) =(2k + 3)(2k - 1) > 2k + 3, так как 2k – 1>0 при любом натуральном значении k. Следовательно, 2>2n + 1 при всех n3.

9) **Замечание к методу математической индукции.**

Доказательство методом математической индукции состоит из двух этапов.

**l-й этап.** Проверяем, верно ли утверждениепри *п =* 1 (или при*п = р****,*** если речь идет о методе, описанном выше).

**2-й э т а п.** Допускаем, что утверждение верно при*п = k,* и,исходя из этого, доказываем, что оно верно и при *п = k+1.*

Каждый из этих этапов по-своему важен, рассмат­ривая пример *P(х)= х2+ х+41*, мы убедились, что утверждение может быть верным в целом ряде частных случаев, ноневерным вообще. Этот пример убеждает нас втом, насколько важен 2-йэтап доказательства методом математическойиндукции. Опус­тив его, можно прийти кневерному выводу.

Не следует, однако, думать, что 1-й этап менее важен, чем 2-й. Сейчас я приведу пример, показывающий,к какому нелепому выводу можно прийти, если опустить 1-й этап дока­зательства.

«Теорем а». ***При любом натуральном п число 2п +1* *четное.***

**Доказательство.** Пусть эта теорема верна при *п = k,*то есть число *2k + 1* четное. Докажем, что тогда число *2(k+1)+1* также четно.

Действительно, *2(k+1)+1 = (2k+1)+2.*

По предположению число *2k +1* четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. Теорема «доказана».

Если бы мы не забыли проверить, верна ли наша «теорема» при *п =* 1, мы не пришли бы к такому «результату».

**Приложение**

**Задачи на использование метода математической индукции.**

***Примеры применения метода математической индукции к доказательству неравенств.***

Пример 1. Доказать, что при любом натуральном n>1

.

Решение.

Обозначим левую часть неравенства через .

, следовательно, при n=2 неравенство справедливо.

Пусть  при некотором k. Докажем, что тогда и . Имеем , .

Сравнивая  и , имеем , т.е. .

При любом натуральном k правая часть последнего равенства положительна. Поэтому . Но , значит, и .

Пример 2. Найти ошибку в рассуждении.

*Утверждение.* При любом натуральном n справедливо неравенство .

Доказательство.

Пусть неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.

. (1)

Докажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, т.е.

.

Действительно,  не меньше 2 при любом натуральном k. Прибавим к левой части неравенства (1) , а к правой 2. Получим справедливое неравенство , или . Утверждение доказано.

Пример 3. Доказать, что , где >-1, , n – натуральное число, большее 1.

Решение.

При n=2 неравенство справедливо, так как .

Пусть неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.

. (1)

Покажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, т.е.

. (2)

Действительно, по условию, , поэтому справедливо неравенство

, (3)

полученное из неравенства (1) умножением каждой части его на . Перепишем неравенство (3) так: . Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое , получим справедливое неравенство (2).

Пример 4:

Пусть х1, х2, ..., хn — произвольные положительные числа, при­чем x1x2…xn = 1. Доказать, что

х1 + х2 + ... +хn ≥ n.

1. Если n = 1, то по условию х1 = 1 и, следовательно, можно написать x1 ≥ 1, т. е. для n = 1 утверждение верно.

2. Предположим, что утверждение верно для n = k. Пусть х1,х2, ...,хk,хk + 1 - произвольные положительные числа и

х1х2…хkхk+1 = 1.

Могут представиться два случая: либо все эти числа равны 1, и тогда их сумма равна k+1 и неравенство доказано, либо среди этих чисел есть хотя бы одно число, не равное единице, и тогда обязательно есть, по крайней мере, еще одно число, не равное единице, причем если одно из них меньше единицы, то другое больше единицы. Не ограничивая общности, можно считать, что хk > 1, а хk + 1 < 1. Рассмотрим теперь k чисел

x1, x2,…, xk-1, (xkxk+1).

Произведение их равно единице, и, следовательно, по индуктивному предположению

x1 + x2 + … + xk-1+ xkxk+1 ≥ k.

Прибавим к обеим частям последнего неравенства хk+хk+1,перенесем xkxk+1направо и преобразуем правую часть неравенства:

x1 + x2 + … + xk + xk+1 ≥ k - xkxk+1+хk + хk+1 =

= k+1 +хk(1-хk+1) + хk+1- 1=k+1+хk(1- хk+1) - (1 - хk+1) =

= k + 1+(1 - хk+1)(xk - l) ≥ k + l.

Таким образом, из истинности утверждения при n = k вытекает его истин­ность при n = k+ 1. Утверждение доказано. Из приведенного доказательства следует, что знак равенства в доказываемом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда x1 = х2 = ... = хn = 1.

Пример 5:

Доказать неравенство



Где x1, x2,…., x3 – произвольные положительные числа.

Это важное неравенство между средним арифметическим и средним гео­метрическим n чисел является простым следствием соотношения, доказанного в предыдущем примере. В самом деле, пусть х1, х2, ..., хn — произвольные положительные числа. Рассмотрим n чисел



Очевидно, что все эти числа положительны и произведение их равно единице. Следовательно, по доказанному в предыдущем примере их сумма больше или равна n, т.е.

≥ n

Отсюда



причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда x1 = х2 = ... = хn.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел часто оказывается полезным при доказательстве других неравенств, при отыскании наименьших и наибольших значений функций.

***Применение метода математической индукции к суммированию рядов.***

Пример 6. Доказать формулу

, n – натуральное число.

Решение.

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при n=k, т.е.

.

Прибавим к обеим частям этого равенства  и преобразуем правую часть. Тогда получим



Таким образом, из того, что формула верна при n=k, следует, что она верна и при n=k+1. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k. Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана.

Пример 7. Доказать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равна .

Решение.

Пусть .

.

Предположим, что . Тогда

 и окончательно .

Пример 8. Доказать, что .

Решение.

.

Если , то

.

Пример 9. Доказать, что

.

Решение.

При n=1 гипотеза очевидно верна.

Пусть .

Докажем, что .

Действительно,



Пример 10.

Найдите сумму +

S(1)= S(2)= S(3)=S(2)+ Можно предположить, что S(n)=

Докажем это. Для n=1 формула верна. Предположим, что она будет верна и для n=k+1:

S(k+1)=S(k)+ 

***Метод математической индукции в решении задач на делимость.***

С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.

Пример 11*. Если n – натуральное число, то число  четное.*

При n=1 наше утверждение истинно: - четное число. Предположим, что  - четное число. Так как , a 2k – четное число, то и четное. Итак, четность  доказана при n=1, из четности  выведена четность .Значит,  четно при всех натуральных значениях n.

Пример 12. Доказать истинность предложения

A(n)={число 5 кратно 19}, n – натуральное число.

Решение.

Высказывание А(1)={число кратно 19} истинно.

Предположим, что для некоторого значения n=k

А(k)={число  кратно 19} истинно. Тогда, так как

, очевидно, что и A(k+1) истинно. Действительно, первое слагаемое делится на 19 в силу предположения, что A(k) истинно; второе слагаемое тоже делится на 19, потому что содержит множитель 19. Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, предложение A(n) истинно при всех значениях n.

Пример 13**.**

Доказать, что *10 п* + *18 п – 28* кратно 27, где *п-* натуральное число.

1. Проверим, что данное утверждение верно при *п=1 :*

*10 1+ 18 – 28 = 10+18-28 = 0, 0  27,*

утверждение верно при *п =1.*

2)Предположим, что данное утверждение верно, при *п=k:*

*(10 k +18k - 28)  27*

3)И, докажем, что данное утверждение верно при  *п=k+1:*

*(10 k+1+18(k+1)-28) 27.*

Доказательство*:*

*10 k+1+18k+18-28=10 k ∙10+18k -10 = 10(10k+18k-28)-162k+270=*

*= 10(10 k +18k – 28) - 27(6k-10), (10 k+1+18(k+1)-28) 27.*

*27  27*

Так как данное утверждение верно при *п=k и*  *п* = *k+1* следовательно (*10 п* + *18 п – 28)* делитсяна *27* при любом натуральном *п.*

Пример 14**.**

Доказать, что *п3 +11п* делится на 6, где *п –* натуральное число.

* 1. Проверим, что данное утверждение верно при *п=1 :*

*13+11∙1= 1+11= 12, 12 6.*

2) Предположим, что данное утверждение верно, при *п=k:*

*(k3+11k)  6.*

3) И, докажем, что данное утверждение верно при  *п=k+1:*

*((k+1)3+ 11(k+1)) 6.*

Доказательство *:*

*(k+1)3+ 11(k+1)=(k3+3k2∙1+3k∙12+13)+11k+11=k3+3k2+3k+1+11k+11=*

*= k3+3k2+14k+12=(k3+11k)+(3k2+3k+12)=(k3+11k)+3(k2+k)+12 =((k3+11k)+3k(k+1)+12),* отсюда

*6 3 , 2 6*

*(k+1)3+ 11(k+1)* делится на *6.*

Так как данное утверждение верно при *п=1*  и доказано, что верно при *n=k+1* следовательно *n3+11k* делится на 6 при любом натуральном *n.*

***Доказательство тождеств***

Пример 15. Доказать, что при любом натуральном **n** справедливо равенство

 

1) Проверим, что это тождество верно при n = 1.



 - верно.

2) Пусть тождество верно и для n = k, т.е.



3)Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.



 

Что и требовалось доказать.



Пример 16. Докажите тождество

22 + 32 + 42 + … + n2 = (n - 1)2

1) Проверим, что это тождество верно при n = 2.

22 = (2 - 1)2

4 = 4 – верно

2) Пусть тождество верно для n = k, т.е.

22 + 32 + 42 + … + k2 = (k - 1)2

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

22 + 32 + 42 + …+ k2 + (k + 1)2 = k2

22 + 32 + 42 + …+ k2 + (k + 1)2 = (k - 1)2+ (k + 1)2 =

= (k –1 + k + 1)2 = 2k2 = k2

Пример 17. Докажите тождество

… 

При n 2

1. Проверим, что это тождество верно для n = 2



 - верно

2) Пусть формула верна для n = k, т.е.

…

3) Докажем, что эта формула верна и для n = k + 1, т.е.

…==

=

Пример 18. Докажите тождество



1) Проверим, что это тождество верно при n = 1.



- верно.

2) Пусть тождество верно и для n = k, т.е.



3)Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.



М – сумма 2) и 3).

М =  = =

= = ==  = 

 =  =  = 

Пример 19. Докажите, что для любого  справедливо равенство



Обозначим произведение в левой части равенства через , т.е.

Мы должны доказать, что .

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2.



-верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е.



3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.



Заметим, что 

Имеем 

По принципу математической индукции равенство справедливо для любого натурального .

***Метод математической индукции в решении задач на геометрическую прогрессию***

Пример 20. Докажем, что общий член геометрической прогрессии равен

*ап = а1∙q п-1,* методом математической индукции.

1) Проверим, что данное утверждение верно при *п=1 :*

a1= a1∙q0

a1 = a1∙1

a1 = a1

левая часть = правой части.

2) Предположим, что данное утверждение верно, при *п=k:*

a k = a1∙q k-1

3) И, докажем, что данное утверждение верно при  *п = k+1:*

ak+1= a1∙qk

Доказательство:

a k+1 = ak ∙q = a1∙qk-1 ∙ q = a1∙qk ,

что и требовалось доказать.

Оба условия принципа математической индукции выполняются и поэтому формула *an=a1∙ qn-1*верна для любого натурального числа*п.*

Пример 21***.*** Методом математической индукции доказать, что сумма *п -* членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

*Sn* =  (q≠1).

1) Проверим, что данное утверждение верно при *п=1 :*

Левая часть: *S1=b1*

Правая часть: **

*b1 = b1.*

2) Предположим, что данное утверждение верно, при *п=k:*

*Sk =*

3)И, докажем, что данное утверждение верно при  *п=k+1:*

Sk+1 = .

Доказательство:

S k+1 = Sk+(k+1) член =

= .

Оба условия принципа математической индукции выполняются, поэтому формула *Sn=*  верна для любого натурального *п.*

***Задачи реальной действительности***

Пример 22:

Докажем, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна π(n-2).

1. Минимальное число углов — три. Поэтому начнем  
доказательство с n = 3. Получаем, что для треугольника  
формула дает π (3~2) = π Утверждение для n = 3

справедливо.

2. Допустим, что формула  
верна при n=k. Докажем, что  
она верна для любого выпуклого  
(к +1) -угольника. Разобьем

(к +1) -угольник диагональю

так, что получим k-угольник и треугольник (см. рисунок).

Так как формула верна для треугольника и k-угольника, получаем π (к - 2) + π = π (к -1).

То же мы получим, если в исходную формулу под­ставить п = к + 1 : π (к +1 - 2) = π (к -1).

Пример 23:

Имеется лестница, все ступени которой одинаковы. Требуется указать минимальное число положений, которые гарантировали бы возможность «забраться» на любую по номеру ступеньку.

Все согласны с тем, что должно быть условие. Мы должны уметь забраться на первую ступень. Далее должны уметь с 1-ой ступеньки забраться на вторую. Потом во второй – на третью и т.д. на n-ую ступеньку. Конечно, в совокупности же «n» утверждений гарантирует нм то, что мы сможем добраться до n-ой ступеньки.

Посмотрим теперь на 2, 3,…., n положение и сравним их друг с другом. Легко заметить, что все они имеют одну и ту же структуру: если мы добрались до k ступеньки, то можем забраться на (k+1) ступеньку. Отсюда становится естественной такая аксиома для справедливости утверждений, зависящих от «n»: если предложение А(n), в котором n – натуральное число, выполняется при n=1 и из того, что оно выполняется при n=k (где k – любое натуральное число), следует, что оно выполняется и для n=k+1, то предположение А(n) выполняется для любого натурального числа n.

**Примеры предлагаемые при поступлении в ВУЗ.**

**Пример 1.** Мех.мат. МГУ:

Докажите, что при любом натуральном числе *п 9 п+1- 8п – 9* кратно 16.

1) Проверим, что данное утверждение верно при *п=1:*

*9 2- 8 – 9 = 81- 8 – 9 = 64, 64 16.*

При *п=1* утверждение верно.

2) Предположим, что данное утверждение верно, при *п = k :*

*(9 k+1 - 8k - 9)  16.*

3) И, докажем, что данное утверждение верно при *п = k+1*:

*(9 k+2 – 8 (k+1) - 9) 16.*

Доказательство:

*9 k+2 - 8(k+1) – 9 =9 k+1 ∙ 91 - 8k – 8 – 9 = 9 k+ 1∙ 9 - 8k – 17 =*

*= 9(9 k+1 - 8k - 9) + 64k + 64 = 9(9 k+1 - 8k - 9) +64(k+1)=*

*= 9(9 k+1 – 8k - 9)+ 64(k+1).*

*16 16*

Следовательно: (*9(9 k+1 - 8k - 9) + 64(k-1)) 16.*

Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и поэтому 9k+1*- 8п-9* кратно 16 при любом натуральном *п.*

**Пример 2.**

Доказать, что при любом натуральном числе *п* выполняется условие :

*13+23+33+…n3=.*

*Sn= .*

1. Проверим, что данная формула верна при *п=1:*

Левая часть *= 13=1*

Правая часть = 

Формула верна при *п=1.*

2) Предположим, что данная формула верна при *n=k*:

*13+23+33+…k3=.*

*Sk =.*

3) И, докажем, что данная формула верна при *п=k+1:*

*13+23+33+…+(k+1)3=.*

*Sk+1= .*

Доказательство:

*Sk+1= Sk+(k+1)3*

**

Итак, данная формула верна в двух случаях и доказали, что верна при *n=k+1* следовательно она верна при любом натуральном числе *п.*

**Пример 3.**

Доказать, что при любом натуральном числе *п* выполняется условие :

*12+32+52+…+(2п+1)2=.*

*Sn= .*

1) Проверим, что данная формула верна при *п=1*:

Левая часть *= 12=1.*

Правая часть = .

Левая часть = правой части.

2) Предположим, что данная формула верна при *n=k:*

*12+32+52+…+(2k-1)2=.*

*Sk= .*

3) И, докажем, что данная формула верна при *n=k+1:*

*12+32+52+…+ (2k+1)2=.*

*Sk+1= .*

Доказательство :

*Sk+1=Sk+(2k+1)2*

**

*2k2+5k+3=2(k+*

*Д= 25-4∙2∙3=1,*

*k1=,*

*k2= .*

Итак, данная формула верна в двух случаях и доказали, что верна при *n=k+1* следовательно она верна при любом натуральном числе *п.*

**Пример 4.**

Доказать, что при любом натуральном числе *п* выполняется условие :

*1∙2∙3+2∙3∙4+…+ п(п+1)(п+2)=.*

*.*

1) Проверим, что данная формула верна при *п=1:*

Левая часть *= 1∙2∙3=6.*

Правая часть *= .*

6 = 6; условие верно при *п=1.*

2) Предположим, что данная формула верна при *n=k:*

*1∙2∙3+2∙3∙4+…+k(k+1)(k+2)=.*

*Sk=.*

3) И, докажем, что данная формула верна при *n=k+1:*

*1∙2∙3+2∙3∙4+…+(k+1)(k+2)(k+3)=.*

*Sk+1=.*

Доказательство:

.

Итак, данное условие верно в двух случаях и доказали, что верно при *n=k+1,* следовательно она верно при любом натуральном числе *п.*

**Пример 5.**

Доказать, что любом натуральном *п* справедливо равенство

.

1) При *п=1* мы получаем верное равенство

Sin .

2) Сделав предположение индукции, рассмотрим сумму, стоящую в левой части равенства, при *n=k+1;*

**

3) Для завершения доказательства заметим, что

.

Следовательно, равенство справедливо.

**Пример 6**

В плоскости проведено *п* прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через точку. Определить, на сколько частей разбивают плоскость эти прямые.

Нарисовав необходимые чертежи, мы можем записать следующее соответствие между числом *п* прямых, удовлетворяющих условию задачи, и числом *ап* частей, на которые разбивают плоскость эти прямые:

**

Судя по первым членам, последовательность, *ап* такова, что разности *а2-а1, а3-а2, а4-а3,…*составляют арифметическую прогрессию. Если воспользоваться уже разобранным примером, то можно высказать гипотезу, что *п* прямых, удовлетворяющих условию задачи, разбивают плоскость на



частей. Эта формула легко проверяется для нескольких первых значений *п*, однако, конечно, из этого не следует еще, что она дает ответ на предложенную задачу. Это утверждение требует дополнительного доказательства методом математической индукции.

Отвлекаясь от проведенного только что «подбора», докажем, что *п* прямых ( из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на *ап* частей, где *ап* вычисляется по формуле.

Очевидно, что при *п=1* формула справедлива. Сделав предположение индукции, рассмотрим *k+1* прямых, удовлетворяющих условию задачи. Выделив из них произвольным образом *k* прямых, мы можем сказать, что они делят плоскость на



частей. Присоединим теперь *(k+1)*-ю прямую. Так как она не параллельна ни одной из предыдущих прямых, то она пересечет все *k* прямых. Так как она не пройдет ни через одну из точек пересечения предыдущих прямых, то она пройдет по *k+1* куску, на которые плоскость уже была разбита, и каждый из этих кусков разделит на две части, т.е. добавится еще *k+1*кусков. Следовательно, общее число кусков, на которые плоскость разбивается *k+1* прямыми, есть



Доказательство этим завершается.

**Пример 7**

Доказать, что

*(a+b)n < 2n(an+bn), (1)*

где *a >0* и  *b>0, п* – любое натуральное число.

Доказательство.

1. При *п=1* неравенство принимает вид  *a+b <2(a+b).* Справедливость этого неравенства очевидна, так как a+b > 0.
2. Допустим, что справедливо неравенство

*(a+b)k <2k(ak+bk), (2)*

и докажем, что в этом случае имеет место неравенство

*(a+b)k+1 <2k+1(ak+1 + bk+1). (3)*

В самом деле, умножая обе части неравенства (2) на положительное число *a+b,* получаем

*(a+b)k+1<2k(ak+bk)(a+b). (4)*

Остается показать, что правая часть неравенства (4) меньше или равна правой части неравенства (3). Рассмотрим разность:

*2k+1(ak+1+bk+1) - 2k(ak+bk)(a+b)= 2k(2ak+1+2bk+1 - ak+1 – bk+1 - akb - abk=*

*=2k(ak+1+2bk+1 - akb - abk)=2k[ak(a - b) - bk(a - b)]=* *2k(a - b)(ak - bk).*

Если *a=b,*то правые части неравенств (3) и (4) равны между собой. Если же *a≠b,* то произведение *2k(ak - bk)(a-b)* положительно при *a>b* и при  *a<b.* Следовательно,

*2k(ak+bk)(a+b) ≤ 2k+1(ak+1+bk+1). (5)*

Сопоставляя (4) и (5), заключаем, что верно неравенство (3). В силу принципа, на котором основан метод математической индукции, исходное неравенство справедливо.

**Заключение**

Итак, индукция (от лат. inductio — наведение, по­буждение) — одна из форм умозаключения, приём ис­следования, применяя который от знания отдельных фактов приходят к общим положениям. Индукция бывает полная и неполная. Метод неполной индукции состоит в переходе к универсальной формулировке после проверки истинности частных формулировок для отдельных, но не всех значений n. Применяя полную индукцию, мы лишь тогда считаем себя вправе объявить об истинности универсальной формулировки, когда убедились в её истинности для каждого без исключения значения n. Метод математической индукции – метод доказательства, основанный на принципе математической индукции. Он позволяет в поисках общего закона испытывать гипотезы, отбрасывать ложные и утверждать истинные.

Метод математической индукции является одной из теоретических основ при решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств, решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач и т. д.

Знакомясь с методом математической индукции, я изучал специальную литературу, консультировалась с педагогом, анализировал данные и решения задач, пользовался ресурсами Интернета, выполнял необходимые вычисления.

**Вывод:**

В ходе работы я узнал, чтобы решать задачи методом математической индукции нужно знать и понимать основной принцип математической индукции.

Достоинством метода математической индукции является его универсальность, так как с помощью этого метода можно решить многие задачи. Недостатком неполной индукции является то, что порой она приводит к ошибочным выводам.

Обобщив и систематизировав знания по математической индукции, я убедился в необходимости знаний по теме «метод математической индукции». Кроме того эти знания повышают интерес к математике, как к науке.

Так же в ходе работы приобрел навыки решения задач по использованию метода математической индукции. Считаю, что эти навыки помогут мне в будущем.

**Список литературы.**

1.Боковнев О. А., Фирсов В. В., Шварцбурд С. И. Избранные вопросы математики. 9 класс. Факультативный курс.-М.: Просвещение, 1979г.

2.Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. Москва: Просвещение, 1996г.

3.Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: методические рекомендации, дидактические материалы.

4.Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Шварцбурд С.И. М.: Просвещение, 1990г.

5.Коровин П. П. Неравенства. Популярные лекции по математике, выпуск 5-М.: Наука, 1983г.

6.Соминский И.С. Метод математической индукции. Популярные лекции по математике, выпуск 3-М.: Наука, 1974г.

7.Петраков И. С. Математические кружки в 8-10 классах: Кн. для учителя М.: Просвещение, 1987г.

8.Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач учебное пособие для 10 класса средней школы – М.: Просвещение,1989г.

**Обзор литературы**

Метод математической индукции рассматривается во многих учебных пособиях, в методической литературе. Данной теме посвящена книга Соминского И.С. « Метод математической индукции». Кроме теоретического материала в ней даны рекомендации к решению задач. Очень подробно изложен данный метод « Избранные вопросы математики» (составители Боковнев О. А., Фирсов В.В., Шварцбург С. И.). В учебном пособии «Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа» Галицкого М. Л. И др. содержатся методические рекомендации по изучению теоретических вопросов, к решению задач по данной теме. Даны дополнительные упражнения для самостоятельного решения. Книга « Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа» Ивлева Б. М. и др. содержит более сложные задачи по данной теме. В книге Коровина П. П.

« Неравенства» показано применение метода математической индукции при решении неравенств. Более сжато тема рассмотрена в книгах Петракова И. С. «Математические кружки», Виленкина Н. Я. И др. « За страницами учебника математики». В пособии Шарыгина И. Ф. « Факультативный курс по математике» немало трудных задач, снабжённых лишь краткими указаниями.