|  |
| --- |
|  |
| ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ |
|  |

В помощь учителю.

***Учитель***  ***математики Сыроватская Е.А.***

В школьном курсе математики решаются различные уравнения: линейные, иррациональные, логарифмические, показательные, тригонометрические и другие.

С решением уравнений учащиеся встречаются не только на уроках алгебры при решении непосредственно уравнений, систем уравнений, задач на составление уравнений, но и на уроках геометрии, физики, химии, биологии.

Следовательно, основная задача, стоящая перед школьным курсом математики - научить учащихся решать уравнения разных типов и разными способами.

Алгебраическим уравнением называется уравнение вида

- некоторый многочлен. Решить уравнение - значит найти множество всех корней (решений) этого уравнения на его области определения или доказать, что решений нет.

Число a называется корнем уравнения с переменной x, если выполняется равенство

В процессе решения уравнений обычно производим некоторые преобразования, т.е. последовательно заменяем данное уравнение другими уравнениями, равносильными (эквивалентными) данному, или уравнениями – следствиями.

Два уравнения *f1(x)=g1(x)* называются равносильными на некотором множестве M , если они имеют в этом множестве одни и те же решения, т. е. каждый корень данного уравнения, принадлежащий множеству М, является корне полученного уравнения, и, наоборот, каждый корень уравнения *f1(x)=g1(x)*, принадлежащий множеству М, является корнем уравнения .

Пример: х+4=3х и х-2=0 равносильные. Т. к. каждое из них имеет единственный корень х=2 на множестве R. {х-4=3х}{х-2=0}

Уравнение *f1(x)=g1(x)* называется следствием уравнения , если при переходе от уравнения к уравнению *f1(x)=g1(x)* не происходит потери корней, т.е. все корни данного уравнения являются корнями уравнения следствия. *{f(x)=g(x)}{f1(x)=g1(x)}.*

***Пример***: {х=1}{x2=1}, где х=1 является единственным корнем первого уравнения, и вместе с тем это число – корень второго уравнения.

Решение уравнений школьного курса алгебры основано на шести теоремах о равносильности.

**Теорема 1.**  Если какой – либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному: *f(x)=g(x)*

**Теорема 2.**  Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 3.**  Показательное уравнение *af(x)=ag(x)* ( где a

Равносильно уравнению .

**Теорема 4.**  Если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение *h(x)*, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения ( в области допустимых значений ) уравнения

б) нигде в этой области не обращается в ноль, т. е. получится уравнение , равносильное данному.

**Теорема 5.**  Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: *f(x)n=g(x)n*

**Теорема 6.** Если *f(x)>0 и g(x)>0*, то логарифмическое уравнение *logaf(x)= logag(x)*, где a>0, a

Решение многих уравнений легче осуществить за счет перехода к равносильным уравнениям или уравнениям – следствиям.

При решении уравнений любых видов используются наиболее общие методы решения уравнений.

*Первый метод* – метод замены уравнения *h(f(x))=h(f(x))* уравнением . Этот метод применяется при решении показательных уравнений *af(x)=aa(x) (a>0, a*, когда от данного уравнения переходим к уравнению

При решении логарифмических уравнений, когда переходим от уравнения *logaf(x)= logag(x)* к уравнению (где f(x)>0; g(x)>0); при решении иррациональных уравнений, когда переходим от уравнения = к уравнению , при xОДЗ .

Этот метод можно применять только в том случае, когда *y=h(x)*- монотонная функция, которая свое значение применяет по одному разу. Например, y=x7- возрастающая функция, поэтому от уравнения можно перейти к уравнению 2х+2=5х-9, откуда находим х=.

Расширение ОДЗ здесь не произошло, значит это равносильное преобразование уравнения.

Если же *y=h(x)* немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку возможна потеря корня. Так заменить уравнение (2x+2)4=(5x-9)4 уравнением 2x+2=5x-9 нельзя, т.к. произошла потеря корня х=1. По той же причине нельзя переходить от уравнения к уравнению 17x=7x.

***Пример***: решить уравнение . Потенцируя, получим: x=6-x2, x2+x-6=0, x1=2, x2=-3.

С учетом ОДЗ получим х=2. Значение х=2. Значение х=-3 не удовлетворяет ОДЗ. Ответ: х=2.

*Второй метод* – метод разложения на множители Этот метод основан на теореме: произведение нескольких функций обращается в ноль только и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом существуют. Уравнение *f(x)\*g(x)\*h(x)=0* можно заменить совокупностью уравнений: , если x

Решив уравнения этой совокупности, мы должны взять те корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

***Пример***: решить уравнение: ( -3)(2x2+6x+5-1)

Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств:

Решение уравнения сводится к решению совокупности трех уравнений:

Из четырех корней лишь х=9 удовлетворяет ОДЗ. Ответ: х=9.

***Пример***: решить уравнение: *x3-7x+6=0*

Заменим данное уравнение равносильным *x3-x-6x+6=0*, группируем слагаемые *(x3-x)-(6x-6)=0*

*(x2-1)x-6(x-1)=0*

*(x-1)(x+1)x-6(x-1)*

*(x-1)(x2+x-6)=0 x-1=0 или x2+x-6=0*

*X1=1; x2=2, x3=-3.*

Все три значения переменной являются корнями заданного уравнения.

*Третий метод* – метод введения новой переменной. Этот метод основан на том, что если уравнение *f(x)=0* можно преобразовать к виду *p(q(x))=0* то нужно ввести новую переменную *U=q(x),* решить уравнение *p(U)=0*, а затем решить совокупность уравнений: , где *U1, U2,…Un* - корни уравнения *p(U)=0*

Удачный выбор переменной намного упростит решение уравнения.

***Пример***: решить уравнение: +=

Удачной будет замена *x2-x=U*, тогда данное уравнение примет вид: +=.

Возведем обе части уравнения во вторую степень:

(+)2=()2,

U+2+2,

=12,

=6,

U2+9U+14=36,

U2+9U-22=0, U1=2, U2= -11- посторонний корень, т.к. , , - не существуют в области действительных чисел

Возвращаемся к исходной переменной: x2-x=2; x2-x-2=0; x1=2, x2= -1.

***Пример***: Решить уравнение: Преобразуем данное уравнение, заменив его равносильным: .

При решении этого уравнения уместна замена 3x=a, где а>0. Получим уравнение и далее имеем: 3a2+a=252 3a2+a-252=0, a1=9, a2= - (не удовлетворяет условию) Возвращаясь к исходной переменной, получим: 3x=9, 3x=32, x=2. Ответ: x=2

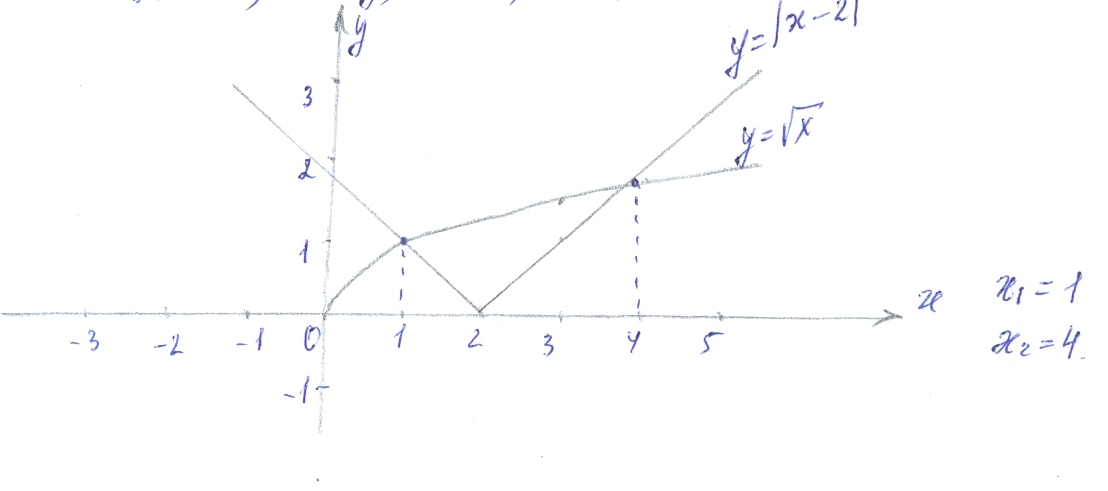
***Пример:*** Решить уравнение: 1+()=()2

1+()=2) |\*2 2+2()= Выполним замену переменной: , тогда ()2=t2, t2=1+, t2-1 Исходное уравнение примет вид: 2+2t=1-(t2-1) t2+2t=0 t(t+2)=0t=0 или t+2=0 Возвращаемся к замене переменной или (решений нет) x= Ответ: x=

***Пример***: Решить уравнение: lg2x3+-7=0 Используя свойства логарифмов, упростим каждое из слагаемых уравнения: lg2x3=(3lgx)2=9lg2x, = -lg10x= -(lg10+lgx)= -1-lgx Исходное уравнение примет вид: 9lg2x-lg x-8=0, область определения уравнения x>0 Замена переменной очевидна lg x=U, тогда 9U2-U-8=0 Решаем полученное квадратное уравнение: D=1+4\*9\*8=289=172, U= ; U1=1; U2= - ; Далее lg x=1 или lg x= ; x1=10, x2= Ответ: x1=10, x2= , с учетом области определения.

*Четвертый метод* - функционально-графический. Идея этого метода состоит в том, что для решения уравнения надо построить графики функций *y=f(x), y=g(*x) и найти точки их пересечения- корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, указать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

***Пример***: Решить графически уравнение: *=* Построим графики функций: *y=, D(y)=[0;+); E(y)=[0;+) y=|x-2|, D(y)=R; E(y)=[0;+)*



В некоторых случаях построение графиков можно заменить опорой на свойства функций. Если одна из функций *y=f(x), y=g(*x) возрастает, а другая убывает, то уравнение либо не имеет корней, либо имеет один корень, который можно угадать.

Пример. Решить уравнение: =2-x. Функция y= возрастает на множестве *[0;+).* Функция *y=2-x* убывает на множестве R. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень. «Угадываем» корень уравнения, х=1.

Пятый метод- метод оценок значений функций. Предварительная оценка левой части или правой части уравнения помогает решить уравнение или убедиться в том, что уравнение не имеет решений. Пример. Решить уравнение: *2=5* Оценим левую часть уравнения: т.к. |sinx|, то |. Следовательно, данное уравнение не имеет корней. Пример. Решить уравнение: Левая часть уравнения является возрастающей функцией, а правая- убывающей функцией. Следовательно, уравнение имеет единственный корень: х=1 (ОДЗ: 5х-4) Ответ: х=1.

В школьном курсе математики решение уравнений занимает одно из центральных мест. Не может быть какого-то единого и, более того, всеобщего метода решения уравнений. Для каждого типа уравнений разработаны нестандартные приемы, вытекающие из общих идей, но часто более эффективные в конкретных ситуациях.

Литература:

1. «Лекции и задачи по элементарной математике», В.Г. Болтянский и др., изд. «Наука», Москва, 1972г., стр.276-287.
2. Газета «Математика», №47-2000г., «Алгебраические уравнения в курсе элементарной математики», стр.15-17.
3. Учебник «Алгебра и начала анализа 10-11 кл»., А.Д. Мордкович, Москва, 2000г., стр.302-304.
4. «Подготовка к письменному экзамену за курс средней школы», Г.В. Дорофеев, изд. «Дрофа», Москва, 2001г.
5. «Математика»(подготовка к ЕГЭ-2004), Лысенко Ф.Ф. и др., Ростов-на-Дону, 2003.
6. Учебник «Алгебра и начала анализа 11кл.», М.И. Башмаков., Москва, изд. «Просвещение», 1993г.