Иррациональные неравенства.

При решении иррациональных неравенств, так же как и при решении иррациональных уравнений, основная цель состоит в том, чтобы освободиться от знака корня и свести иррациональное неравенство к рациональному.

Простейшее иррациональное неравенство имеет вид (вместо знака могут быть знаки .

Обычно при решении данных иррациональных неравенств составляют систему рациональных неравенств, либо совокупность систем рациональных неравенств.

Но иррациональные неравенства могут решаться следующим образом.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F()= *.*
2. Находим её область определения.
3. Находим нули этой функции 1, 2, … *n*, т. е. решаем уравнение F()=0, делаем проверку корней (если проверка корней вызывает затруднение, то воспользуемся тем, что уравнение F()=0 равносильно системе
4. Изображаем на числовой прямой область определения функции F() и отмечаем на ней нули этой функции.
5. Находим знаки функции F() на каждом из полученных интервалов.
6. Записываем ответ, учитывая знак исходного неравенства.

Пример 1.

Решить неравенство 2.

Решение.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F()= 2 +.
2. Она определена на промежутке [18; +.
3. Найдем нули этой функции, т. е. решим уравнение 2 +

2. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение: 2.

Приведя уравнение к стандартному виду, получим: 2 5

Корни этого уравнения: 1=7, 2=2.

Проверка: а) если 1=7, то = 5, 27=5. 55.

Значит 1 не является корнем уравнения.

б) если 2=2, то = 4 и 2)=4.

Значит 2 корень уравнения.

1. функция не определена +

18 2

F()=2+0 =2

F()=2 =20.

1. Неравенство 2выполняется, если F()0, т.е. ∈ [18; 2 Ответ: [18; 2.

Пример 2.

Решить неравенство .

Решение.

1. Рассмотрим функцию F()=.
2. Найдем область определения функции: числа 1 и 2.

+ +

1 2

Функция определена на (] [2; +.

1. Найдем нули функции.

=0.

Это уравнение равносильно системе

Решив систему, получим = .

1. + функция не определена

1 2

F()=

F()=

F()

1. Учитывая, что F()запишем ответ.

Ответ: (;].

Пример 3.

Решить неравенство 1

Решение.

1. Рассмотрим функцию F()=
2. Функция имеет смысл, если , т.е. она определена на ( [0;+
3. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение

Это иррациональное уравнение равносильно системе

Решив систему, получим .



0

Вычислив приближенно 0,2, определим знаки функции F()

на данных промежутках F() F(0,1) F(2)

1. Учитывая, что F()

Ответ: ( ; +

Пример 4.

Решить неравенство  *.*

Решение.

1. Рассмотрим функцию F()= *.*
2. Найдем область определения функции, решив систему

Получаем, что Д(F)=[1;+

1. Найдем нули функции, решив иррациональное  *=*0.

= .

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Получим: ∙∙+

2 .

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Получим уравнение 5,25=0.

Корни этого уравнения: 1 =1,5, 2 =.

Проверка показывает, что 1,5 корень данного уравнения.

1. +

1 1,5

F()F().

1. Учтем, что F()

Ответ: [1; 1,5).

Пример 5.

Решить неравенство

Решение.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F()=
2. Она определена на (
3. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение =0.

=.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Получим уравнение =(2.

Приведя уравнение к стандартному виду, получим 1=, 2=.

Проверка показывает, что 2= корень данного уравнения.

1. +

3

F() F()

1. Неравенство выполняется, если F()

Ответ: [.

Упражнения.

Решить неравенство:

1. + 6 . Ответ: (3; +
2. . Ответ: [; 5)
3. + 4 . Ответ: [2; )(0; 2
4. . Ответ: [; 1
5. . Ответ: (1; )
6. + . Ответ: [
7. . Ответ: [)(