Иррациональные неравенства.

 При решении иррациональных неравенств, так же как и при решении иррациональных уравнений, основная цель состоит в том, чтобы освободиться от знака корня и свести иррациональное неравенство к рациональному.

 Простейшее иррациональное неравенство имеет вид $ \sqrt{f(x)} >g\left(x\right)$(вместо знака $>$ могут быть знаки $<, \geq , \leq )$.

 Обычно при решении данных иррациональных неравенств составляют систему рациональных неравенств, либо совокупность систем рациональных неравенств.

 Но иррациональные неравенства могут решаться следующим образом.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F($x$)= $\sqrt{f\left(x\right)}$ $-g\left(x\right)$*.*
2. Находим её область определения.
3. Находим нули этой функции $x$1,$x$2, … $x$*n*, т. е. решаем уравнение F($x$)=0, делаем проверку корней (если проверка корней вызывает затруднение, то воспользуемся тем, что уравнение F($x$)=0 равносильно системе $\left\{\begin{array}{c}f(x)\geq 0,\\g\left(x\right)\geq 0,\\ f\left(x\right)=g^{2}\left(x\right). \end{array}\right.$
4. Изображаем на числовой прямой область определения функции F($x$) и отмечаем на ней нули этой функции.
5. Находим знаки функции F($x$) на каждом из полученных интервалов.
6. Записываем ответ, учитывая знак исходного неравенства.

Пример 1.

Решить неравенство $\sqrt{x+18 }<$ 2$ -x$.

Решение.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F($x$)=$ \sqrt{x+18 }–$ 2 +$ x$.
2. Она определена на промежутке [$-$18; +$ \infty )$.
3. Найдем нули этой функции, т. е. решим уравнение $\sqrt{x+18 }-$2 +$ x=0. $

$\sqrt{x+18 }=$ 2$-x$. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение: $x+18=\left(2-x\right)$2.

 Приведя уравнение к стандартному виду, получим: $x$2 $-$ 5$x-14=0. $

 Корни этого уравнения: $x$1=7, $x$2=$-$2.

 Проверка: а) если $x$1=7, то $\sqrt{7+18 }$= 5, 2$-$7=$-$5. 5$\ne -$5.

 Значит $x$1 не является корнем уравнения.

 б) если $x$2=$-$2, то $\sqrt{-2+18 }$= 4 и $ 2-(-$2)=4.

 Значит $x$2 $- $корень уравнения.

1. функция не определена $-$ +

 $-$18 $-$2 $x$

 F($0$)=$ \sqrt{0+18 }-$2+0 =$ \sqrt{18 }-$2$>0,$

 F($-17$)=$ \sqrt{-17+18 }-$2 $-17$=$ 1-$2$-17< $0.

1. Неравенство $\sqrt{x+18 }<$ 2$-x $выполняется, если F($x$)$ < $0, т.е. $ x$ ∈ [$-$18; $-$2$)$ Ответ: [$-$18; $-$2$)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\sqrt{x^{2}-3x+2 }\geq x+3$.

Решение.

1. Рассмотрим функцию F($x$)=$ \sqrt{x^{2} -3x+2 }-x-3$.
2. Найдем область определения функции: $x^{2}-3x+2\geq 0. $ $ Корни трехчлена$ $ x^{2}-3x+2$ $- $числа 1 и 2.

 + $ - $+

 1 2 $x$

Функция определена на ($-\infty ;1$] $∪$ [2; +$\infty )$.

1. Найдем нули функции.

 $\sqrt{x^{2} -3x+2 }-x-3$=0.

 Это уравнение равносильно системе$ \left\{\begin{array}{c}x^{2}-3x+2\geq 0,\\x+3\geq 0,\\ x^{2}-3x+2=(x+3)^{2}.\end{array}\right.$

 Решив систему, получим $x$=$ -\frac{7}{9}$ .

1. + $-$ функция не определена $-$

 $-\frac{7}{9}$ 1 2 $x$

$ $ F($3$)=$ \sqrt{9-9+2 }-3-3=\sqrt{2}-6<0,$

 F($0$)=$ \sqrt{0-0+2 }-0-3=\sqrt{2}-3<0,$

 F($-2$)$= \sqrt{4+6+2 }-1=\sqrt{12}-1>0.$

1. Учитывая, что F($x$)$ \geq 0, $запишем ответ.

Ответ: ($-\infty $;$-\frac{7}{9}$].

Пример 3.

Решить неравенство $\sqrt{x^{2}+x}>$1$-2x.$

Решение.

1. Рассмотрим функцию F($x$)=$ \sqrt{x^{2}+x}-1+2x.$
2. Функция имеет смысл, если $x^{2}+x\geq 0$, т.е. она определена на ($ -\infty ;-1] ∪$ [0;+$ \infty ).$
3. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение $\sqrt{x^{2}+x}-1+2x=0.$

Это иррациональное уравнение равносильно системе$ \left\{\begin{array}{c}x^{2}+x\geq 0,\\1-2x\geq 0,\\x^{2}+x=\left(1-2x\right)^{2}.\end{array}\right.$

 Решив систему, получим $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

1. $ - функция не определена$ $ - +$

 $-1$ 0 $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ $x$

$ $ Вычислив приближенно $ \frac{5-\sqrt{13}}{6}≈$0,2, определим знаки функции F($x$)

на данных промежутках F($3$) $>0, $ F(0,1) $<0, $ F($-$2) $<0.$

1. Учитывая, что F($x$) $>0, запишем ответ.$

Ответ: ( $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ ; +$ \infty ).$

Пример 4.

Решить неравенство $ \sqrt{x+3 }-$$ \sqrt{x-1 }$$>\sqrt{2x-1 }$ *.*

Решение.

1. Рассмотрим функцию F($x$)=$ \sqrt{x+3 }-$$ \sqrt{x-1 }$$- \sqrt{2x-1 }$*.*
2. Найдем область определения функции, решив систему$ \left\{\begin{array}{c}x+3\geq 0,\\x-1\geq 0,\\2x-1\geq 0.\end{array}\right.$

Получаем, что Д(F)=[1;+$ \infty ).$

1. Найдем нули функции, решив иррациональное $ уравнение \sqrt{x+3 }-$$ \sqrt{x-1 }-$$\sqrt{2x-1}$*=*0.

$\sqrt{x+3 }-$$ \sqrt{x-1 }$=$\sqrt{2x-1}$ .

 Возведем обе части уравнения в квадрат.

 Получим: $ x+3-2$∙$\sqrt{x+3 }$∙$\sqrt{x-1 }$+$ x-1=2x-1,$

$ $2$\sqrt{(x+3)(x-1)}=3,$ $\sqrt{(x+3)(x-1)}=1,5$.

 Возведем обе части уравнения в квадрат.

 Получим уравнение $x^{2}+2x-$5,25=0.

 Корни этого уравнения: $x$1 =1,5, $x$2 =$-3,5$.

 Проверка показывает, что 1,5 $- $корень данного уравнения.

1. $ функция не определена$ + $-$

 1 1,5 $x$

F($2$)$ <0, $F($1,1$)$ >0$.

1. Учтем, что F($x$)$ >0.$

Ответ: [1; 1,5).

Пример 5.

Решить неравенство $ \sqrt{6-2x }\geq 1-x.$

Решение.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию F($x$)=$ \sqrt{6-2x }-1+ x.$
2. Она определена на ($-\infty ; 3].$
3. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение $ \sqrt{6-2x }-1+ x$=0.

$\sqrt{6-2x }$=$1-x$.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Получим уравнение $ 6-2x$=($1-x)$2.

Приведя уравнение к стандартному виду, получим $x^{2}-5=0,$ $x$1=$\sqrt{5}$, $x$2=$-\sqrt{5}$.

Проверка показывает, что $x$2=$-\sqrt{5}$ $–$ корень данного уравнения.

1. $ -$ + $функция не определена$

 $-\sqrt{5}$ 3 $ x$

F($0$)$ >0, $ F($-3$)$ <0.$

1. Неравенство $\sqrt{6-2x }\geq 1-x$ выполняется, если F($x$)$ \geq 0.$

Ответ: [$-\sqrt{5};3]$.

Упражнения.

Решить неравенство:

1. $\sqrt{x+78 }<$ $x $+ 6 . Ответ: (3; +$\infty )$
2. $\sqrt{2x-1 }> x-2 $. Ответ: [$ \frac{1}{2}$; 5)
3. $x $+ 4 $>2\sqrt{4-x^{2} }$. Ответ: [$-$2; $-\frac{8}{5}$ )$ ∪$(0; 2$]$
4. $3\sqrt{1-x^{2}}<3- x $. Ответ: [$-1;0) ∪(\frac{3}{5}$; 1$]$
5. $\sqrt{\left(3x-2\right)(2- x) }>1$ . Ответ: (1; $\frac{5}{3}$)
6. $\sqrt{x+3 }$ + $\sqrt{x+2 }>\sqrt{2x+4}$ . Ответ: [$-2; +\infty )$
7. $2-\sqrt{1-x^{2}}$ $>\sqrt{4-x^{2}}$ . Ответ: [$-1; -\frac{\sqrt{15}}{4}$)$ ∪ $($\frac{\sqrt{15}}{4};1]$