Муниципальное образовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа №5 г. Михайловки»

Волгоградской области

**Способы решения нестандартных уравнений**

Программа элективного курса по математике для профильной подготовки

Авторы: Соломатина Татьяна Александровна,

учитель математики I категории,

Воронина Наталья Владимировна,

учитель математики I категории

Михайловка, 2009

**Пояснительная записка**

Элективный курс «Способы решения нестандартных уравнений» разработан для обеспечения старшеклассников занятиями по выбору из вариативного компонента базисного учебного плана в старшей профильной школе. Предлагаемый элективный курс позволяет осуществлять задачи профильной подготовки старшеклассников. Курс рассчитан на 34 часа и ориентирован на учащихся 10-11 классов.

Данный элективный курс направлен, прежде всего, на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника в математике, способствует удовлетворению познавательных потребностей школьников в методах и приемах решения нестандартных задач. Содержание курса углубляет линию уравнений в школьном курсе математике и не дублирует программу базового и профильного изучения алгебры и начал анализа. Именно поэтому при изучении данного элективного курса у старшеклассников повысится возможность намного полнее удовлетворить свои интересы и запросы в математическом образовании. Этот курс займет значимое место в образовании старшеклассников, так как может научить их применять свои знания в нестандартных ситуациях, дать возможность поучиться не для аттестата, а для реализации дальнейших жизненных планов. С другой стороны, курс позволяет выпускнику средней школы приобрести необходимый набор умений по решению уравнений и лучше подготовиться к обучению в высших учебных заведениях, где математика является профилирующим предметом.

Целесообразность введения данного курса состоит в том, что содержание курса, форма его организации помогут школьнику через практические занятия оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы и предоставят ему возможность работать на уровне повышенных возможностей. Данный элективный курс позитивно влияет на мотивацию старшеклассника к учению, развивает его учебную мотивацию по предметам естественно-математического цикла.

Задания, предлагаемые программой данного курса, носят исследовательский характер и способствуют развитию навыков рационального мышления, способности прогнозирования результатов деятельности.

Материал курса разбит на 8 модулей, каждый из которых посвящен специальному виду нестандартных уравнений. Каждый из модулей имеет законченный вид, что позволяет старшекласснику, который ошибочно выбрал курс, пойти в следующей четверти или полугодии на занятия по изучению другого элективного курса.

**Цель курса**

Углубление знаний учащихся о различных методах решения уравнений и базовых математических понятий, используемых при обосновании того или иного метода решения; формирование у школьников компетенций, направленных на выработку навыков самостоятельной и групповой исследовательской деятельности.

**Задачи курса**

* классификация способов решения нестандартных уравнений, углубление теоретических основ школьной математики для решения каждого вида уравнений.
* интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе. Развитие мыслительных способностей учащихся: умение анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать.
* воспитание личности в процессе освоения математики и математической деятельности, развитие у учащихся самостоятельности и способности к самореализации.

**Формы учебных занятий**

Лекции, семинары, практикум.

**Методические рекомендации**

Основой проведения занятий может служить технология деятельностного метода, которая обеспечивает системное включение ребенка в процесс самостоятельного построения им нового знания и позволяет учителю проводить разноуровневое обучение. Занятия должны носить проблемный характер. Ученики самостоятельно, в микрогруппах, в сотрудничестве с учителем выполняют задания, предполагающие исследовательскую деятельность, на занятиях организуется обсуждение результатов этой работы.

Оперативную коррекцию в овладении учебной деятельностью можно провести на уроках-практикумах. Урок-практикум – это своеобразная самостоятельная работа, вариант, объем заданий учащиеся выбирают сами, исходя из уровня усвоения материала, мотивации развития норм оценок. Каждому ученику предоставляется право проверить правильность решения каждого задания, получить консультацию учителя. Учитель выступает как субъект педагогической деятельности, помощник, а не контролер. Ученик управляет своей деятельностью, своим развитием, формируя качества субъекта учения и самовоспитания.

**Требования к уровню освоения курса**

В результате изучения курса учащиеся должны овладеть следующими знаниями, умениями и способами деятельности:

* иметь представление о математике как форме описания и методе познания действительности;
* уметь анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать;
* уметь самостоятельно работать с методической литературой;
* знать основные приемы решения нестандартных уравнений, понимать теоретические основы способов решения уравнений;
* уметь решать нестандартные уравнения различными методами;
* уметь представлять результат своей деятельности, участвовать в дискуссиях;
* уметь проводить самоанализ деятельности и самооценку ее результата.

**Формы контроля**

Смысл профильного курса заключается в предоставлении каждому ученику индивидуальной зоны потенциального развития, поэтому нельзя требовать от каждого ученика твердого усвоения каждого нестандартного приема. Специальный зачет или экзамен по курсу не предусмотрен, но предлагаются некоторые варианты выполнения учениками зачетных заданий:

1. Решение учеником в качестве индивидуального домашнего задания предложенных учителем задач из того списка, что завершает каждый модуль и называется «Упражнения для самостоятельной работы», т.к. осознание и присвоение учащимися достигаемых результатов происходит с помощью рефлексивных знаний. Подбор индивидуальных заданий осуществляется с учетом уровневой дифференциации, причем выбор делают сами ученики, оценивая свои возможности и планируя перспективы развития.
2. Решение группой учащихся в качестве домашнего задания предложенных учителем задач из того же раздела. Работа в группе способствует проявлению интереса к учению как к деятельности.
3. Учащимся, ориентированным на выполнение заданий более высокого уровня сложности, предлагается:
   * Самостоятельное изучение некоторых вопросов курса с последующей презентацией.
   * Самостоятельное решение предложенных задач с последующим разбором вариантов решений.
   * Самостоятельное построение метода, позволяющего решить предложенную задачу.
   * Самостоятельный подбор задач на изучаемую тему курса из дополнительной методической литературы.

Итоговое занятие предлагается провести в форме круглого стола с презентациями каждого модуля курса.

**Тематический план курса**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Тема | Количество часов |
| 1 | Уравнения-тождества | 2 |
| 2 | Уравнения, при решении которых используются прогрессии | 4 |
| 3 | Уравнения, при решении которых используется ограниченность функции | 4 |
| 4 | Уравнения, при решении которых используется монотонность функции | 4 |
| 5 | Уравнения с двумя неизвестными | 4 |
| 6 | Комбинированные уравнения | 4 |
| 7 | Использование неотрицательности функций | 1 |
| 8 | Практикум по решению некоторых других нестандартных уравнений | 9 |
|  | Итоговое занятие | 2 |
|  | **Всего** | **34** |

**Математическое содержание курса**

**Тема 1. *Уравнения-тождества***

Область определения элементарных функций. Область определения и множество решений уравнения. Виды уравнений.

*Учащиеся должны знать:*

* формулы алгебры и тригонометрии;
* понятие области определения элементарных функций;
* понятие области определения и множества решения уравнения.

*Учащиеся должны уметь:*

* выделять «опасные операции» над переменной Х, содержащиеся в записи уравнения (извлечение корня четной степени, деление на выражение с переменной, логарифмирование, возведение в степень, «взятие» тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса).
* составлять и решать систему ограничений.

**Тема 2. *Уравнения, при решении которых используются прогрессии***

Теория прогрессий: понятийный аппарат, характеристические свойства, формулы n-го члена и суммы членов прогрессий. Уравнения высших степеней, дробно-рациональные и трансцендентные уравнения.

*Учащиеся должны знать:*

* определение базовых понятий последовательностей, формулы n-го члена и суммы членов прогрессий, характеристические свойства прогрессий;
* приемы решения показательных, дробно-рациональных уравнений, трансцендентных уравнений, в записи которых присутствуют суммы прогрессий.

*Учащиеся должны уметь:*

* выделять в уравнении сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (сумму арифметической прогрессии);
* решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения, используя теорию прогрессий.

**Тема 3. *Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций***

Множество значений функции. Понятие ограниченности функции. Метод замены исходного уравнения системой уравнений. Виды уравнений, при решении которых используется ограниченность функции.

*Учащиеся должны знать:*

* таблицу множеств значений элементарных функций;
* определения ограниченной функции (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на промежутке;
* теорему, позволяющую заменить данное уравнение системой уравнений, учитывая ограниченность функций, входящих в исходное уравнение;
* обобщенный алгоритм решения уравнений методом оценки и критерии его применения.

*Учащиеся должны уметь:*

* исследовать функции на ограниченность;
* определять тип уравнения, к которому применим метод оценки;
* применять метод оценки к решению уравнений;
* решать нестандартные системы уравнений методом оценки.

**Тема 4. *Уравнения, при решении которых используется монотонность функций.***

Теорема, устанавливающая связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения. Виды уравнений, при решении которых используется монотонность функций.

*Учащиеся должны знать:*

* определения возрастающей, убывающей, монотонной функций;
* теорему, устанавливающую связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения;
* обобщенный алгоритм решения уравнений методом использования монотонности функций;
* виды уравнений, решаемых с использованием монотонности функций.

*Учащиеся должны уметь:*

* находить область определения функций;
* исследовать функцию на монотонность;
* применять обобщенный алгоритм решения уравнений методом использования монотонности функции к соответствующим видам уравнений.

**Тема 5. *Уравнения с двумя неизвестными***

Виды уравнений с двумя неизвестными и способы их решения. Метод оценки. Решение уравнения как квадратного относительно одной из неизвестных, разложением на множители, заменой исходного уравнения системой уравнений.

*Учащиеся должны знать:*

* условие равенства нулю суммы неотрицательных чисел;
* множество значений элементарных функций;
* понятие ограниченности функций;
* способы решения уравнений с двумя неизвестными:

– замена исходного уравнения системой уравнений,

– метод оценки,

– решение уравнения с двумя неизвестными второй степени, как квадратного, относительно одной из неизвестных,

– разложение на множители.

*Учащиеся должны уметь:*

* определить вид уравнения;
* находить область определения уравнения;
* оценивать левую и правую части уравнения, применяя метод оценки;
* раскладывать на множители;
* выбирать рациональный способ решения;
* решать системы уравнений.

**Тема 6*.Комбинированные уравнения***

Понятие комбинированного уравнения. Метод сведения уравнения к совокупности систем уравнений и неравенств.

*Учащиеся должны знать:*

* определения, свойства степенной, показательной и др. функций;
* способы и особенности решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств.

*Учащиеся должны уметь:*

* анализировать, сопоставлять, сравнивать, обобщать;
* исследовать комбинированные уравнения;
* сводить их к совокупности систем уравнений и неравенств;
* решать системы уравнений и неравенств.

**Тема 7*. Использование неотрицательности функций***

Множество значений функции. Понятие неотрицательности функции. Метод замены исходного уравнения системой уравнений. Виды уравнений, при решении которых используется неотрицательность функции.

*Учащиеся должны знать:*

* условие равенства нулю суммы неотрицательных чисел;
* теорему, позволяющую заменить данное уравнение системой уравнений

*Учащиеся должны уметь:*

* определять тип уравнения, к которому применим данный метод;
* сводить уравнение к совокупности систем уравнений

**Тема 8. *Практикум по решению некоторых других нестандартных уравнений***

Предполагает исследовательскую деятельность учащихся.

**Итоговое занятие.**

Предлагается провести в форме круглого стола с презентациями.

*Учащиеся должны знать:*

* этапы исследовательской деятельности.

*Учащиеся должны уметь:*

* использовать этапы исследовательской деятельности на практике.

**Используемая литература**

* 1. Зорин В.В. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд. 3, М., «Высшая школа», 1973.
  2. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат.спец.пед.ин-тов.- 2-е изд., перераб. и доп..- М.: Просвещение, 1991.
  3. Концепция модернизации российского образования на период до 2010// «Вестник образования» -2002-№6-с.11-40.
  4. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования: Приказ № 2783 от 18.07.2002 Министерства образования РФ.
  5. Концепция математического образования (проект)// Математика в школе.-2000.-№2.-с.13-18.
  6. Кармакова Т.С., Володькин Е.Г. Способы решения нестандартных уравнений и систем уравнений: Дидактические материалы для учителей математики.- Хабаровск: ХК ППК ПК, 2005.
  7. Кармакова Т.С. Практикум по элементарной математике для подготовки к ЕГЭ.- Хабаровск: ХК ППК ПК, 2004.
  8. Кармакова Т.С., Попова Ю.В. Приложение прогрессий. Элективный курс по математике для предпрофильной подготовки учащихся 9 кл.- Хабаровск: ХК ИППК ПК, 2005.
  9. Ковалева Г.И., Бузулина Т.И. и др. Математика для учащихся 11 класса и поступающих в вузы. Тренировочные тематические задания.- Волгоград: Учитель, 2005.
  10. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике (школа и ВУЗ).- Домашний репетитор. АЙРИС, 1996.
  11. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Математика для абитуриента.-М.: Научно-технический центр «Университетский», 1994.
  12. Ткачук В.В. Математика-абитуриенту. М.: МЦНМО, ТЕИС, 1996
  13. Шахно К.У. Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике. Минск, изд. «Высшая школа», 1965

**Программно-техническое сопровождение курса**

Компьютер, проекционная система.

**Приложение**

***К теме 1***

*Корнем уравнения* называется такое значение переменной, при подстановке которой в уравнение получается верное числовое равенство.

*Решить уравнение –* значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Значение переменной называется *допустимым*, если при этом обе части уравнения имеют смысл, т.е. могут быть вычислены. Например, для уравнения значение х=2 не является допустимым, т.к. при х=2 дробь не имеет смысла.

Не нужно смешивать понятие допустимого значения переменной с понятием корня уравнения. Для рассматриваемого уравнения допустимым будет любое значение х, кроме х=2, а его корнем лишь значение х=5.

Совокупность всех допустимых значений переменной называется *областью определения уравнения.* Очевидно, что корнем уравнения может быть лишь допустимое значение переменной, но не наоборот: не всякое допустимое значение переменной является корнем уравнения. Например, для уравнения = 3х на множестве действительных чисел допустимым будет любое значение х≥5, в частности и значение х=6, но это число, как легко видеть, не является корнем уравнения.

Если уравнение удовлетворяет всем допустимым значениям переменной, то оно является *тождеством.* Например, каждое из уравнений= ; х+1 = 1+х; sin²x+cos²x = 1 есть тождество.

Решая уравнение, мы обычно совершаем над ним различные преобразования с тем, чтобы получить из него более простое уравнение, такое, которое мы умеем решать. Однако не все из этих преобразований будут тождественными: некоторые из тех значений переменной, которые не являлись допустимыми, могут стать допустимыми после преобразования уравнения или наоборот, т.е. область определения уравнения может расшириться или сузиться. При таких преобразованиях, изменяющих область определения уравнения, могут появиться посторонние корни или, наоборот, некоторые из корней будут утеряны.

При расширении области определения уравнения чаще происходит появление посторонних корней, а при сужении области, наоборот, чаще происходит потеря корней уравнения.

Преобразования, которые обычно совершаются над уравнением, чаще всего расширяют, но не сужают область его определения. Рассмотрим примеры.

Решить следующие уравнения.

1. х +

***Решение.*** Приводя подобные члены, т.е. «вычеркивая» взаимно противоположные слагаемые, получим х=0. Но значение х=0 не является допустимым для заданного уравнения. Операция приведения подобных слагаемых расширила область определения уравнения. Следовательно, х=0 есть посторонний корень. Данное уравнение корней не имеет.

1. = 2х

***Решение***. Сокращая числитель и знаменатель дроби на х-1, получим х+1 = 2х, откуда х=1. Но значение х=1 не является допустимым для заданного уравнения. Операция сокращения дробного члена расширила область определения уравнения. Следовательно, х=1 есть посторонний корень. Значит, данное уравнение не имеет корней.

***Решение.*** Умножаем обе части уравнения на х²-4, т.е. отбрасываем общий знаменатель, получаем (х+1)(х+2)-(х-3)(х-2) = 12, откуда х = 2. Однако, значение х =2 не является допустимым для данного уравнения. Операция умножения уравнения на общий знаменатель расширила область допустимых значений переменной. Значит, данное уравнение корней не имеет.

1. = 3-х

***Решение.*** Это уравнение определено на множестве действительных чисел для всех значений х≤5. возведя обе части уравнения в квадрат, получим 5-х = 9-6х+х²,

х²-5х+4 = 0, откуда хı = 4, х = 1.

Проверка. ≠ 3-4, = 3-1, 2=2.

Как видим, х=4 – это посторонний корень. Уравнение имеет только один корень х=1.

Каждое из рассмотренных преобразований уравнений может привести к появлению посторонних корней. Следовательно, при каждом из таких преобразований необходима проверка.

Заметим, что при логарифмировании уравнения область его определения может сузиться, а при его потенцировании она может лишь расшириться. Например, уравнение х²=9 имеет два корня х=3 и х=-3. Логарифмируя его по основанию 3, получим уравнение = 2, которое имеет только один корень х=3. Потеря отрицательного корня х=-3 явилась следствием того, что при логарифмировании произошло сужение области определения уравнения: уравнение х²=9 определено для всех действительных значений х, а логарифмическое уравнение только для положительных значений х. При логарифмировании данного уравнения можно избежать потери корня, если написать так: 2 =2, =1, │х│=3, х=3, х=-3.

Поскольку преобразования, которые мы совершаем над уравнениями, связаны с потерей или приобретением посторонних корней, очень важным является понятие равносильности уравнений. Уравнения являются *равносильными,* если они имеют одни и те же корни. Уравнения, не имеющие корней, так же считают *равносильными.*

**Утверждения о равносильности уравнений.**

1. f(x) = g(x) ‹=› f(x) - g(x) = 0
2. f(x) = g(x) ‹=› αf(x) = αg(x), где α-действительное число, α≠0.
3. f(x) = g (x) ‹=› f(x) = h(x) на М, если h(x)=g(x) для всех х из М
4. f(x) = g(x) ‹=› φ(x)f(x) = φ(x)f(x) на М, если φ(х)≠0 для всех х из М
5. а) f(x) = g(x) ‹=› (f(x))²ⁿ+¹ = (g(x))²ⁿ+¹, где n-натуральное число;

б) f(x) = g(x) ‹=› (f(x))²ⁿ = (g(x))²ⁿ на М, если f(x)≥0 и g(x)≥0 для всех х из М, n-натуральное число

6. f(x) = g(x) ‹=› на М, если f(x)› 0 и g(x)› 0 для всех х из М, а-действительное число, а› 0, а≠ 1.

Есть и другие.

Возведение в четную степень можно применять при решении уравнений, содержащих модуль.

1+sinx = │cosx│

Обе части уравнения определены и неотрицательны на множестве всех действительных чисел, поэтому после возведения обеих частей уравнения в квадрат, получим уравнение, равносильное данному.

(1+sinx)² = cos²x;

1+2sinx + sin²x = cos²x;

sin²x + cos²x + 2sinx + sin²x - cos²x = 0;

2sin²x + 2sinx = 0; 2sinx(1+sinx) = 0;

Sinx = 0 или 1+sinx = 0;

х=πк, к-целое число или х=- + πк, к-целое число.

Все эти числа и только они являются решением данного уравнения.

= 2 - х

Возведя уравнение в третью степень, получим уравнение 12х²-28х+8 = (2-х)³, равносильное данному уравнение имеет три корня: х=-8, х=0, х=2.

Следовательно, исходное уравнение имеет те же корни.

***К теме 3***

*Метод мажорант* – метод нахождения ограниченности функции. *Мажорирование* – нахождение точек ограничения функции, М-мажоранта.

Если имеем f(x)=g(x) и известно ОДЗ, и если f(x)≤ M, g(x)≥ M, то

1. Cos ²(xSin x) = 1+││

Левая часть уравнения принимает значения меньшие или равные 1, а правая часть принимает значения большие или равные 1, значит исходное уравнение равносильно системе уравнений

Все решения второго уравнения системы есть х=0 и х=1. Из этих чисел только х=0 удовлетворяет первому уравнению системы. Значит, система и равносильное ей исходное уравнение имеют единственное решение х=0.

2. x + Sin5х = 1

Т.к. Cos²x+Sin²x =1, то уравнение можно переписать в виде Cos7 x + Sin5 x = Cos²x+Sin²x или Cos²x(Cos5 x+1) = Sin²x(1-Sin³x) (\*)

Поскольку для любого действительного х имеем Cos5x-1≤ 0, Cos²x ≥ 0, Sin²x ≥ 0, 1-Sin³x≥0, то уравнение (\*) равносильно системе уравнений

Решение первой системы х = + 2πк, к-целое число, решение второй системы х = 2πn, n-целое число.

Все эти решения и будут решениями данного уравнения.

***К теме 4***

Не всякое уравение f(x)=g(x) в результате преобразований или с помощью удачной замены переменной может быть сведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого существует определенный алгоритм решения. В таких случаях иногда оказывается полезным использовать некоторые свойства функций.

Так, если одна из функций убывает, а другая возрастает на промежутке Х, то уравнение f(x)=g(x) либо имеет один корень и тогда его можно найти хотя бы подбором, либо не имеет корней (показать на чертежах).

Например, для решения уравнения = х-1 нет надобности возводить обе части уравнения в квадрат. Достаточно заметить, что х=3 – корень уравнения и других корней нет, поскольку левая часть уравнения – убывающая, а правая – возрастающая функция.

1. х =64

Очевидно, что х≤0 не может являться решением уравнения, так как тогда х ≤0. Для х>0 функция y = х непрерывна и строго возрастает, как произведение двух непрерывных положительных строго возрастающих для этих х функций f = x и g = x

Значит, в области х>0 функция у = х принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Легко видеть, что х=1 является решением уравнения, следовательно, его единственное решение.

2. – = 2

Область допустимых значений уравнения 2≤х≤18. На ОДЗ функции f(x) = - и g(x) = непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция h(x) = – . Поэтому каждое свое значение функция h(x) принимает только в одной точке. Так как h(2)=2, то х=2 является единственным корнем исходного уравнения.



Область определения данного уравнения – луч [1;∞), и функция f(x) = – возрастающая (как сумма возрастающих функций), так что данное уравнение не может иметь более одного корня. Заметив, что f(-1)-6<0, а f(1)-6>0, делаем вывод, что данное уравнение имеет единственный корень, принадлежащий промежутку [-1;1]. Легко видеть, что х=0.

4. Cos =

Пусть у = . Ясно, что 0≤у≤, а при этих значениях у функция Cos y убывает, и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Итак, имеем систему , откуда у = , и остается решить уравнение .

***К теме 5***

Разумеется, не всякое уравнение с двумя переменными можно отнести к нестандартным. Например, уравнение х+у=5 имеет своими решениями любые пары чисел, которые в сумме дают 5. Это уравнение настолько же просто, насколько неопределенно (бесконечное множество решений). Мы будем нестандартным считать такое уравнение, которое после более или менее оригинальных рассуждений приводит к вполне определенным решениям.

1. х²- 6х + у - 4+13 = 0

Имеем х²- 6х + у - 4+ 13 = (х²- 6х + 9) + (у - 4 + 4) = (х-3)² + (- 2)².

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде (х-3)² + (-2)² = 0. Но сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Значит, х=3, а =2, т.е. у=4.

Ответ: (3;4)

1. Sin4 x + Cos4 y + 2=4Sin x Cos y

Последовательно имеем: (Sin4 x - 2Sin2 x Cos2 y + Cos4 y) +2Sin2 x Cos2 y + 2 - 4Sin x Cos y = 0, (Sin2 x-Cos2 y)² + 2(Sin x Cos y-1)² = 0

Рассуждая, как в предыдущем примере, приходим к системе тригонометрических уравнений

Положив Sin x = a, Cos y = b, получим систему

Отсюда находим или

или

Из первой системы получим х =+ 2πк, к-целое число

y = 2πn, n-целое число

Из второй системы получим х = + 2πк, к-целое число

y = π + 2πn, n-целое число

Это решения заданного уравнения.

***К теме 6***

Рассмотрим на примерах уравнения смешанного типа.

1. Найти сумму корней уравнения ∙ ( + 27∙ - 12) = 0.

***Решение***. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из этих множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Решая первое уравнение, получим, что х1 = 1,5.

Решая второе уравнение, получим, что х2 = 2, а х3 =1, но х3 не удовлетворяет второму условию системы, поэтому не является корнем исходного уравнения.

Таким образом, корни уравнения равны 1,5 и 2, а их сумма соответственно равна 3,5.

Ответ: 3,5

2. Найти сумму корней уравнения (х2 – 8х – 20)( + ) = 0.

***Решение***. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из этих множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

или + = 0.

Решая первое уравнение, получим, что х1 = - 2, х2 = 10. Но х2 не удовлетворяет условию , значит не является корнем исходного уравнения.

Решая второе уравнение, получим, что х3,4 = - 3. Оба числа являются корнями.

Таким образом, сумма корней равна х1 + х3 + х4 = - 8.

Ответ: - 8.

3.Найти число корней уравнения ( - 1) ∙ ) = 0.

***Решение.***  Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из этих множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

или ) = 0.

Решая первое уравнение, получим х = + 2к, к. Теперь, учитывая второе условие и подбирая к, получим: к = 0, х1 = (- ; )

к = 1, х2  = 2,5 (- ; )

к = - 1, х3 = - 1,5 не (- ; )

Решая второе уравнение, получим, что х4,5 = . Оба числа являются корнями.

Таким образом, уравнение имеет три корня: ½, 1, -1.

Ответ: 3 корня.

***К теме 7.***

Пусть левая часть уравнения F(х) = 0 есть сумма нескольких функций.

F(х) = f1(x) + f2(x) + … + fn(x), каждая из которых неотрицательна для любого х из области ее существования. Тогда уравнение равносильно системе уравнений .

1. + = 0

***Решение.*** Каждая из функций f1(x) = и f2(x) = неотрицательна для любого х из области ее существования. Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений

Первое уравнение имеет единственное решение х = 3, которое является так же решением второго уравнения системы.

Следовательно, система, а значит и равносильное ей исходное уравнение, имеют единственное решение.

Ответ: 3.

1. 1 – + = 0.

***Решение.*** Каждая из функций f1(x) =1 – и f2(x) = неотрицательна для любого х из области ее существования. Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений

Система имеет единственное решение х = 0. Значит и исходное уравнение имеет единственное решение х = 0.

Ответ: 0.

***Упражнения для самостоятельной работы.***

**К теме 1**.

1. - 6∙ + х2 + + = - - х + 6
2. =
3. =
4. + =
5. = 3х – 1
6. =
7. ∙ + + = + х2 + 4
8. х2 + 2х) = 3
9. х2 + 3х +2) ∙ = 0
10. - х = 3х2 – 3х + 6 - 18
11. + = х2 + 2х – 3
12. + (х + )) ∙ (х2 – 9х+ +7+ ) = 0
13. + 6 ∙ = 5 ∙
14. - = +1
15. - = -
16. = 0
17. = (х+1)(8х – 23)
18. + 4х – 4х2 = 33
19. =
20. - 14 ∙ = + 3

**К теме 2**.

1. (х+1) + (х+5) + (х+9) + …+ (х+157) = 3200
2. (х+248) + (х+243) + (х+238) + … + (х+3) = 6225
3. + + + … + =
4. + + + … + =
5. = 8+4+2+…
6. ∙ = 12+8++…
7. =
8. tg x + tg2x + tg3x + … + tg20x = 0
9. + + + … + = 3
10. 1 +

**К теме 3**.

1. 3 -
2. Cos7x + Sin9x = 1
3. Cos3x + Sin5x = 1
4. (4х – х2 – 3)
5. ∙
6. Sin13x + Cos8x=1
7. 4х3+3х2=6х - + Найти все решения на [- ]
8. = х2 – 2х + 2
9. =
10. 2 = - х2+12х-37
11. 2Cos2 = +
12. tg =
13. + 2 = 4+

**К теме 4**.

1. = 3 -
2. + =
3. ln x = 1 – x4
4. 2
5. + х + = 0
6. e½-cosx = 2, х(0;)
7. ln(Sin x) =
8. x ∙ ln x = e2-x/e
9. +
10. ctg x = ectg 2x на (0;)

**К теме 5**.

2. = )
3. = Cos2x + +
4. (Sin2x + )2 + ( Cos2x + )2 = 12 +
5. 5х2 + 5у2 +8ху + 2х – 2у + 2 = 0
6. 2(х4 – 2х2 + 3)(у4 – 3у2 + 4) = 7
7. 22x + 2tg2x + 3 = - ctg2(4y - )
8. 2 + 2=0
9. 2 + 4x+ 4 = 0
10. 2x + + Cos2y = 0
11. -
12. 1 – 2x – x2 = tg2(x+y) + ctg2(x+y)
13. tg4x + tg4y + 2ctg2xctg2y = 3+Sin2(x+y)

**К теме 6**.

1. Найдите сумму корней уравнения
2. Найдите сумму корней уравнения (
3. Сколько корней имеет уравнение ( Sin2x – 1)
4. Сколько корней имеет уравнение (
5. Сколько корней имеет уравнение arccos(0,2x) ∙ (Sin5x – Cos5x) = 0
6. Сколько корней имеет уравнение (Cos3x Sin x + Sin3x Cos x) ∙ = 0
7. Сколько корней имеет уравнение ((Cos x + Sin x)2 – 1)
8. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

(

1. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения
2. Найдите произведение всех действительных корней уравнения

(х2 + х – 12) ∙ ln(0,5x + 1,5) = 0

1. Найдите сумму всех действительных корней уравнения

(tg x + 1)

1. Сколько нецелых корней имеет уравнение

Sin8x – Cos8x) = 0

1. Найдите произведение наибольшего и наименьшего корней уравнения

arcsin(0,25x) ∙ lg(9 – x2) = 0

1. Найдите значение выражения 6S, где S – сумма всех корней уравнения

(3tg2x – 1) ∙ ln(3x-2x2) = 0

**К теме 7**.

1. (eSinπx – Cosπx)2 + (x – 4)2 = 0
2. (πlg(x-2) + Cosπx)2 + (x-3)2 = 0
3. + log27(