Содержание

1.Введение

2.Экстремальные задачи в курсе математики 5 – 6 классов и методы их решения

а) метод оценки,

б) метод перебора.

3. Экстремальные задачи по курсу алгебры 7 – 9 классов и методы их решения

а) экстремальные задачи на составление уравнений с двумя переменными,

 б) задачи, решаемые при помощи неравенства *ах* $\leq $ *в,*

в) метод опорной функции,

г) метод преобразования плоскости.

4. О решении задач на экстремум при изучении производной в 10 – 11 классах. Различные способы решений.

5. Заключение

6.Используемая литература

 В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития разных направлений математики. К таким направлениям, например, относятся теория вероятностей, линейное и динамическое программирование, теория оптимального управления, математическая экономика и др. Математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений и, в конечном счете, содействует повышению производительности труда и устойчивому поступательному развитию народного хозяйства. Важным условием повышения эффективности производства и улучшения качества продукции является широкое внедрение математических методов в технику и народное хозяйство, что предполагает создание новых, эффективных методов качественного и количественного исследования, которые позволяют решать разнообразные задачи, выдвигаемые практикой.

Современные учащиеся могут уже в средней школе получать представления о таких важных понятиях, относящихся к развитию промышленности, науки, как «эффективность», «оптимальность», «экстремум», «наибольшее», «наименьшее», «наилучшее», «наиболее выгодное», «наиболее экономичное» и т. д. Это связано в первую очередь с тем, что в процессе трудовой деятельности люди стремятся наилучшим образом использовать материальные и трудовые ресурсы и при заданном объёме производства свести к минимуму (минимизировать) затраты или при заданных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции. Наряду с этим современный подход к образованию заставляет уделять особое место прикладным аспектам обучения математике. Среди задач математики, которые решают проблемы оптимизации, следует выделить задачи на экстремумы и оптимумы, с которыми в курсе математики школы приходится встречаться чаще всего и которые в свою очередь являются фундаментом рассмотрения оптимизационных задач вообще.

Из математического анализа известно, что если числовая функция *F(u)* непрерывна, то экстремум *F(u)* на *U* может достигаться, лишь в тех точках *u*$ \in $ *U*, в которых *F'(u) = 0* или *F'(u)* не существует или является граничной и для множества *U.* Описанным способом поиска экстремума можно пользоваться, начиная с Х класса во всех тех случаях, когда решение задач сводится к исследованию функции, которая вместе с её производной имеет достаточно простой вид. В большинстве практических задач зачастую вычисление производной представляет большие трудности и нередко даже неизвестно, существует ли производная в интересующих нас точках. Бывает так, что функция *F(u)* задана лишь таблично или вообще трудно представить задачу в аналитическом виде. В тех случаях, когда производная всё же вычислена, решение уравнения  *F'(u) = 0* может также привести к серьёзным трудностям.

Важно иметь методические приёмы, способы решения экстремальных задач, не требующих вычисления производной. Это происходит, например, при решении задач на дискретную оптимизацию. Особым типом экстремальных задач являются задачи линейного программирования, которые решаются без помощи производной. Неприменима производная и при решении многих геометрических задач.

Введение экстремальных задач в обучение педагогически оправдано, так как они с достаточной полнотой закладывают в сознание учащихся понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучшими. Решая задачи указанного типа, учащиеся видят, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, с другой – большую и эффективную их применимость к решению практических, жизненных задач. Такая постановка экстремальных задач способствует расширению сферы приложений учебного материала, повышает роль этих задач в осуществлении глубокой цели математического образования школьников – обучать приложению математики в различных областях человеческой деятельности.

Экстремальные задачи могут помочь школьнику ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами школьного курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Такие задачи могут серьёзно повлиять на содержание учебного материала, на аспекты применения приложений изучаемой теории на практике. В школе на уроках математики я ставлю более скромную цель: воспитывать учащихся на примерах содержательных экстремальных задач, формировать у них научное мировоззрение, глубокие взгляды на процессы, происходящие как в природе, так и в общественной жизни, показывать важность математических знаний и умений решать задачи.

Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся. Через задачи они знакомятся с экстремальными свойствами изучаемых функций, рассматриваемых на непрерывном дискретном множествах, с некоторыми свойствами неравенств. Изучая свойства той или иной геометрической фигуры, учащиеся с помощью задач приобретают знания об экстремальных свойствах этой фигуры, а также учатся применять их к решению прикладных задач. Неоценимую важность постановки экстремальных задач в школьном курсе математики я вижу также в воспитании исследовательской культуры учащихся. Ведь все решения таких задач предлагаются на уровне исследования математической модели и на уровне исследования реальной ситуации с использованием оптимизационных средств. Кроме того, в процессе решения большей части экстремальных задач широко и удачно используются эвристические приёмы, которые в отличие от алгоритмических могут подсказать путь решения предлагаемых задач.

Для решения экстремальных задач существуют следующие методы:

 1. Метод опорной функции;

2. Метод оценки;

3. Метод перебора;

4. Метод преобразования плоскости.

Рассмотрим некоторые из перечисленных методов на конкретных примерах. В курсе математики 5 – 6 классах учащимся нередко приходится решать задачи в которых допускается несколько или даже много решений, причём далеко не всегда равнозначных. В таких случаях можно ставить дополнительный вопрос: найти наиболее выгодное (или достаточно выгодное по тем или иным причинам) решение, т. е. решать экстремальные задачи. С такими задачами приходится сталкиваться при изучении следующих разделов: «Неравенства», «Площадь и периметр прямоугольника», «Натуральные числа», «Делимость натуральных чисел»,

В некоторых задачах ученикам трудно сразу понять требование задачи о нахождении наименьшего или наибольшего значения величины, если оно подразумевается в задаче.

*Пример 1*. Масса чугунной болванки 16кг. Сколько болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

Решение. *Первый способ*. Поскольку масса одной детали 12 кг, то 41 деталь будет весить: 12 $×$ 41 = 492 кг. Далее рассуждаем так: одна болванка весит 16 кг, поэтому потребуется 31 болванка (492 : 16 = 30 (12 – остаток)). Не обращая на остаток ученики, ученики делают ошибочный вывод. Вместо того чтобы написать «31 болванка», пишут «30 болванок».

*Второй способ.* Пусть *п* - количество болванок, тогда *16п* – масса болванок, *12*$ ×$ *41* – масса деталей. Далее ученикам предстоит сравнить и оценить значение выражений, чтобы поставить соответствующий знак между ними:

*16п*$ \geq $ *12* $×$ *41, 16п* $\geq $ *492, п* $\geq $ *492 : 16, п* $>$ *30*. **N** = *{31, 32, 33, …}.* Наименьшее число болванок равняется 31.

Если ознакомить учеников с условием задачи и при этом не задавать наводящих вопросов, то на поставленный в задаче вопрос некоторые ученики дают такой ответ: на 41 деталь нужно использовать 41 болванку, т. е. из каждой болванки изготавливают одну деталь. Чтобы исправить ошибку ученика, нужно заставить его тщательно прочитать задачу, обратить внимание на слова «отлить 41 деталь». Подобные ситуации, в которые попадают ученики при решении задач, дают учителю возможности для воспитательной работы. Он формирует у учащихся сознательное отношение к профессии, показывает, что высокий математический уровень знаний становится нужным и полезным в трудовой деятельности.

Поскольку ученики 5 -8 классов встречаются с двойным неравенством, то в этих классах методом оценки можно решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения линейного выражения *ах + в,* где m $\leq $x $\leq $ n (m, n – целые неотрицательные числа, m$ <$ n). При нахождении наименьшего и наибольшего значения выражения *ах + в,* где m $\leq $x $\leq $ n, ученики должны уметь: 1) решать двойное неравенство; 2) находить то значение переменной, которое удовлетворяет требованию задачи; 3) оценивать значение выражения. При решении приходится обращаться к таким вопросам: а) Как изменяется сумма при изменении слагаемого? б) Как изменяется разность при изменении вычитаемого и уменьшаемого? в) Как изменяется произведение при изменении сомножителей?

*Пример 2*. Стоимость телеграммы вычисляется почтовыми работниками по следующему правилу: по 5 рублей за каждое слово и ещё 20 рублей за отправку телеграммы. Какая может быть наибольшая и наименьшая цена телеграммы, если количество слов в телеграмме определяется решением неравенства *17* $\leq $ *х* $\leq $ *40?*

Решение задачи сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения выражения *5х + 20,* если *17* $\leq $ *х* $\leq $ *40* и х $\in $**N**. Сначала можно предложить вычислить значение выражения при нескольких значениях переменной, взятых из промежутка *17* $\leq $ *х* $\leq $ *40*. Заметим, что сумма будет наибольшая, если слагаемое *5х* будет наибольшим, т. е. будет равно *5* $×$ *40*, и наименьшая, если слагаемое *5х* будет наименьшим, т. е. будет равно *5* $×$ *17.* Заметим, что второе слагаемое постоянно.

Распространёнными задачами, в которых используются элементарные свойства неравенств, являются задачи с экономическим содержанием.

*Пример 3.* Для обеспечения населения города нужно закупить 3000т картофеля в 4 совхозах. Количество картофеля, которое может продать каждый совхоз, и цена перевозки показаны в таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество тонн картофеля | 1100 | 900 | 800 | 700 |
| Цена перевозки 1т в рублях | 3 | 2,5 | 2 | 2,7 |

Нужно разработать план закупки картофеля так, чтобы стоимость была наименьшей, и найти эту стоимость. Из таблицы видно, что закупку картофеля нужно определить ценой перевозки 1т (2; 2,5; 2,7; 3), которой соответствует такая последовательность: 800, 900, 700, 1100. Решение задачи сводится к оценке сумм:

1) 800 $<$ 3000;

2) 800 + 900 = 1700 $<$ 3000;

3) 1700 + 700 = 2400 $<$ 3000;

4) 2400 + 1100 $>$ 3000;

5) 3000 – 2400 = 600;

6) 800 $×$ 2 + 900 $×$ 2,5 + 700 $×$ 2,7 + 600 $×$ 3 = 7540 (руб.)

Среди экстремальных задач геометрические задачи на вычисление площадей и периметров представляют большой интерес. Решение этих задач методом оценки формирует первое представление о максимальном произведении при постоянной сумме двух переменных и о минимальной сумме при постоянном произведении. Рассмотрим примеры таких задач.

*Пример 4.* Начертите прямоугольник, площадь которого равна 36 $см^{2}$, и вычислите его периметр.

Чтобы после решения этой задачи оставить место для творческой работы учеников, я не ставлю вопроса о наименьшем периметре прямоугольника, площадь которого 36 $см^{2}$. Такие задачи направлены на выяснение, нет ли у самого ученика потребности не удовлетворятся тем или иным решением, искать другое. Если ученик не сумел найти несколько решений, то можно продемонстрировать ему эти решения. Дальше ученикам даётся задание сравнить полученные решения, оценить их и указать, в каком случае получается наименьший периметр. Ученик должен проявить сообразительность и сделать вывод, что из всех прямоугольников с постоянной площадью минимальный периметр имеет квадрат. При этом формируется понятие о квадрате как прямоугольнике с равными сторонами. У отдельных учеников возникает вопрос относительно размеров прямоугольника. Учитель объясняет, что размеры могут быть произвольными. Вычерчивая прямоугольник площадью 36 $см^{2}$, ученики получают прямоугольники разных размеров. Размеры прямоугольников, их периметры и площади целесообразно записать в виде такой таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПЛОЩАДЬ ($см^{2}$) | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| ДЛИНА ($см$) | 72 | 36 | 18 | 12 | 9 | 8 | 6 |
| ШИРИНА ($см$) | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4,5 | 6 |
| ПЕРИМЕТР ($см$) | 145 | 74 | 40 | 30 | 26 | 25 | 24 |

Оценивая периметры прямоугольников, имеющих постоянную площадь, ученики приходят к выводу, что наименьший периметр будет иметь квадрат, т. е. Р = 24 см при а = в = 6см.

Пример 5. Начертите прямоугольник, периметр которого 36 см, вычислите его площадь.

Решение этой задачи можно оформить в виде такой таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Периметр (см) | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| Длина (см) | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |
| Ширина (см) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Площадь ($см^{2})$ | 17 | 32 | 45 | 56 | 65 | 72 | 77 | 80 | 81 |

Отсюда вывод: наибольшая площадь *S = 81* $см^{2}$ *при а = в = 9 см*. Построение прямоугольников и запись решения в виде таблицы помогает лучше видеть, как изменяется площадь прямоугольника с постоянным периметром и как изменяется периметр прямоугольника с постоянной площадью.

Остановимся на решении экстремальных задач в разделе «Натуральные числа». Здесь на первом этапе решаются самые простые задачи, где число рассматриваемых элементов невелико. Это во многом упрощает организацию работы, требует меньше времени и создаёт хорошую возможность детям увидеть особенности применения метода перебора к решению задач.

*Пример 6*. С помощью цифр 5, 2 и 7 напишите все трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Среди найденных чисел найдите наибольшее и наименьшее число.

Очень часто мы встречаемся с такими фактами. Ученики решили задачу, т. е. нашли числа 527, 572, 275, 257, 752, 725 и указали наибольшее и наименьшее число. Но мала эффективность таких методических приёмов, если ученики не проявили творческого мышления, не увидели никакой новизны, не нашли самостоятельно приёмов составления перестановок, т. е. не нашли алгоритма построения перестановок, не подметили упорядочения чисел, не сделали вывод о том, в каком порядке расположены цифры в наибольшем и наименьшем числе. На первый взгляд, кажется, что это очень простая задача, но она несёт большую теоретическую нагрузку. Ученик знакомится с упорядоченными множествами, с методом перебора, перестановками, с методическими приёмами поиска экстремальной перестановки.

*Пример 7.* В кабинет математики к началу консультации пришли 3 ученика (А, В, С). Предварительный разговор позволил учителю выяснить, что для рассмотрения вопроса ученика А требуется 5 мин, ученика В – 2 мин, ученика С – 7 мин. после получения ответа на свой вопрос ученик уходит. Как организовать консультацию, чтобы каждый из учеников находился в кабинете как можно меньше времени? Иными словами, учитель хочет как можно меньше задержать каждого из них, т. е. минимизировать общее время, проведённое учениками в кабинете.

Для лучшего понимания задачи можно предложить ученикам записать условие задачи в виде таблицы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ученик | А | В | С |
| время | 5 | 3 | 7 |

Это даст возможность не только облегчить решение задачи, но и будет содействовать формированию понятия о матрице ( хотя о таком понятии ничего не говорим). Решение этой задачи можно проиллюстрировать такой таблицей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Очерёдность получения консультации | Время на выяснения вопроса (мин) | Время, затраченное каждым учеником (мин) | Суммарное время (мин ) |
| А, В, СА, С, ВВ, С, А | 5, 3, 75, 7,33, 7, 5 | 5; 5+3; 5+3+75; 5+7; 5+7+33; 3+7; 3+7+5 | 5+8+15=285+12+15=323+10+15=28 |
| В, А, С | 3, 5, 7 | 3; 3+5; 3+5+7 | 3+8+15=26 |
| С, А, ВС, В, А | 7, 5, 37, 3, 5 | 7; 7+5; 7+5+37; 7+3; 7+3+5 | 7+12+15=347+10+15=32 |

Оптимальный вариант:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ученик | В | А | С |
| Время, нужное для выяснения вопроса (мин) | 3 | 5 | 7 |
| Время, затраченное учеником (мин) | 3 | 8 | 15 |

Суммарное время: 3 + 8 + 15 = 26 мин.

Итак, этот приём решения имеет много общего с решением предыдущей задачи, которая была как бы подготовительной, с её помощью ученикам легче было найти приём решения данной задачи. Последняя дала много интересного и полезного. Здесь была возможность подвести учащихся к пониманию способов построения искомых последовательностей (3, 5, 7) и (3, 8, 5). Ученикам не даются указания, как записывать рекуррентные формулы для нахождения экстремальных перестановок, последовательностей. С этим понятием знакомят учеников в 9 классе. Решение задач на экстремальные перестановки способствует приобретению учениками определённых комбинаторных навыков и знаний, более глубокому пониманию изучаемого материала.

Нахождение наибольших и наименьших значений величин методом перебора рассматривается частично при изучении тем: «Наибольший общий делитель» и «Наименьшее общее кратное». Понятие экстремума в этих темах связывается с понятием наивыгоднейших значений величин.

Решение экстремальных задач в курсе алгебры проходит в два этапа. На первом этапе рассматривается неопределенная задача, текст которой переводится на математический язык в виде неопределённого уравнения (функции), которое допускает много или бесконечно много решений.

На втором этапе по тем или иным признакам, которые заданы в явном или неявном виде, определяется, какое из решений задачи наиболее выгодно. Темы курса алгебры, в которых приходится решать экстремальные задачи и формировать методы их решения, рассматриваем следующим образом:

1) Линейная функция.

2) Системы линейных уравнений.

3) Рациональные дроби.

4) Неравенства.

5) Квадратичная функция.

6) Последовательности. Арифметическая прогрессия.

7) Преобразование выражений, содержащих квадратные корни.

Ознакомимся с решением экстремальных задач по теме «Линейная функция». Решение этих задач сводится к нахождению экстремума линейной функции *у = кх + в*, где *к* и *в* – постоянные. Если эту функцию рассматривать на отрезке [$α$; $β$], то она будет иметь на нём наибольшее и наименьшее значение. При *к*$>$*0* наименьшее значение у принимает в точке *х =* $α$, а наибольшее – в точке *х =* $β$, при *к*$<$*0* функция у в точке х = $α$ принимает наибольшее значение, а в точке *х =* $β$ - наименьшее.

Рассмотрим одну из задач, решение которой сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения линейной функции одной переменной на некотором отрезке и показывает применение линейной функции в практике.

*Задача 1.* Расстояние между двумя шахтами А и В по шоссейной дороге 60 км. На шахте А добывается 200 т руды в сутки, на шахте В – 100 т руды в сутки. Где нужно построить завод по переработке руды, чтобы для её перевозки количество тонн-километров было наименьшим.

Не понимая требования задачи, некоторые ученики предлагают построить завод на одинаковом расстоянии от шахт А и В, другие – на расстоянии 20 км от шахты А (ошибка заключается в том, что расстояние 60 км делят на части, обратно пропорциональные числам 200 и 100, т. е. принимая за х расстояние от шахты А до завода, составляют уравнение $\frac{х}{60-х}$ =$ \frac{100}{200}$ ).

Выясняем, что суммарное количество тонн-километров изменяется в зависимости от места нахождения завода, вычислив его, например, для случаев, когда завод находится от пункта А на расстоянии 30 км, 20 км, 10 км. Далее приступаем к решению задачи, обозначив расстояние от завода С до шахты А через х:

А х С 60 $-$ х В АС = х; ВС = 60 – х;

Количество тонн-километров, пройденных транспортом от А до С за каждый день, составляет 200х ткм, а от В до С – 100(60 – х) ткм. Суммарное количество тонн-километров выразится функцией у = 200х + 100 (60 – х), которая определена на отрезке [0; 60 ]. Ясно, что это уравнение может иметь бесконечно много решений. Естественно здесь поставить вопрос – найти наиболее дешевый вариант перевозок. Исследуя функцию у = 100х + 6000 на отрезке [0; 60 ], получим, что данная линейная функция будет иметь минимальное значение при х = 0, у = 6000 ткм. Завод надо строить возле шахты А. для лучшего понимания этой задачи целесообразно дополнительно выяснить вопрос, где нужно было построить завод, если бы:

а) в шахте А добывалось 100 т , а в шахте В – 200 т руды;

 б) в шахте А – 200 т, а в шахте В – 190 т;

 в) в шахте А и шахте В – по 200 т руды.

 Чтобы решить этот вопрос, нужно найти на отрезке [0; 60 ] минимум функции: а) у = 100х + 200 (60 – х) = - 100х + 12000;

б) у = 200х + 190 (60 – х) = 10х + 11400;

в) у = 200х + 200 (60 – х) = 12000.

Из всего этого можно сделать такой вывод: если в шахте А добывается руды больше, чем в шахте В, то завод надо строить возле шахты А; если же количество руды в этих шахтах одинаковое, то завод можно строить в любом месте вблизи шоссейной дороги между шахтами А и В.

Решение задач такого рода позволяет на доступном учащимся уровне формировать некоторые элементы методов решения задач линейного программирования, не расширяя при этом объёма школьного курса.

Задачи на нахождение экстремумов могут иметь место и при изучении темы «Системы линейных уравнений». Очень часто на практике встречаются такие задачи, при решении которых получаем одно уравнение с двумя переменными, и при его решении необходимо найти те значения переменных, которые дают оптимальное решение.

*Задача 2*. На совхозной ферме нужно провести водопровод длиной 167 м. Имеются трубы длиной 5 м и 7 м. Сколько нужно использовать тех и других труб, чтобы сделать наименьшее количество соединений (трубы не разрезать)?

Учитывая, что количество как одних, так и других труб может изменяться, ученики предлагают количество 7-метровых труб обозначить за *х*, а 5-метровых – через у. тогда *7х* – длина 7-метровых труб, *5у* – длина 5-метровых труб. Отсюда получаем неопределённое уравнение *7х + 5у = 167*. Выразив, например, переменную у через переменную х, получим:

*У =* $\frac{167-7х}{5}$ *= 33 – х –* $\frac{2х-2}{5}$ . Так как *х, у* $\in $ **Z,** то методом перебора легко найти соответствующие пары значений х и у, которые удовлетворяют уравнению *7х + 5у = 167. ( 1; 32), (6; 25), (11; 18), (16; 11), (21; 4).* Из этих решений наиболее выгодное последнее, т. е. *х = 21, у = 4.*

Рассмотрим более сложные экстремальные задачи, в которых нахождение наибольшего или наименьшего значения сводится к решению неравенства вида *ах* $\leq $ *в*, где *а, в* – заданные числа и *х* $\in $ **N.** Понятия «наибольшее», «наименьшее» значение в этих задачах больше всего связаны с понятием наивыгоднейших значений величин.

*Задача 3*. Предположим , что населенные пункты С расположенные на отрезке АВ, снабжаются некоторыми потребительским товаром как из пункта А, так и из пункта В. Одна тонна этого товара в А обходится в 5 тыс. руб., а в В – в 7 тыс. руб. Транспортировка 1 т груза на расстояние 1 км стоит 200 руб. расстояние между пунктами А и В равно 100км. Нужно составить план снабжения товарами пунктов С при котором будет допускаться минимальный расход денег.

Попробуем представить эту жизненную ситуацию в математическом описании. Пусть расстояние АС = х, тогда ВС = 100 – х . Стоимость транспортировки 1т груза из пункта А в пункт С равна (5 + 0,2х)тыс. руб. Стоимость транспортировки 1 т груза из пункта В в пункт С равна: 7 + (100 – х) 0,2 тыс. руб, или (27 – 0,2х) тыс. руб. Узнаем, на каком расстоянии стоимость транспортировки груза от пункта А будет не больше, чем от пункта В, т. е.

5 + 0,2х $\leq $ 27 – 0,2х; 0,4х $\leq $ 22; х $\leq $ 55.

Итак, из пункта А нужно транспортировать товар на расстояние не больше, чем на 55 км, а из В – не больше, чем на 45 км.

Целесообразно предложить ученикам подсчитать, сколько будет стоить транспортировка 1 т груза в пункт С, который находится от А на расстоянии 20 км, 55 км, 70 км, а потом от В – на расстоянии 80 км, 45 км, 30 км. Наконец, необходимо сделать вывод и оценить важность применяемых математических методов. При решении таких задач есть возможность сделать так, чтобы каждый из учеников почувствовал себя в роли экономиста, в роли директора, бригадира, заместителя, рабочего.

Достаточно много экстремальных задач можно решать при изучении темы «Квадратный трехчлен». К исследованию квадратичной функции на экстремум сводятся многие прикладные задачи не только алгебры, но и экономики, геометрии, физики, техники. Простейшим и в то же время универсальным способом для решения экстремальных задач, связанных с квадратичной функцией, является способ выделения квадрата двучлена.

Примером могут быть следующие задачи.

*Задача 1*. Для строительства склада заготовлен материал на наружные стены длиной 32 м и высотой 4 м. Какими должны быть размеры (в виде прямоугольного параллелепипеда), чтобы имел наибольший объём?

Решение задачи сводится к исследованию функции:

*V = х (16 – х)4 = - (2х – 16)² + 256* $\leq $ *256, где х – длина.*

*Задача 2*. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости v выражается следующими формулами:

 а) на хорошем шоссе: *f = 24* $-$$\frac{2}{3}$ *v +* $\frac{1}{30} $*v²;*

б) на плохом шоссе: *f = 28* $-$$\frac{1}{4}$ *v* $-\frac{1}{50} $*v²;*

в) на булыжной мостовой: *f = 29* $-$$\frac{2}{3}$ *v +* $\frac{1}{15}$ *v²;*

г) на мягкой грунтовой дороге: *f = 36,5* $-$$\frac{3}{4}$ *v +* $\frac{1}{30}$ *v².*

При какой скорости сопротивление должно быть наименьшим?

*Задача 3*. Тело брошено вертикально вверх с высоты 25 м с начальной скоростью 4 ${м}/{с}$. Считая ускорение земного притяжения равным 10 ${м}/{с}$² и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, на какую максимальную высоту взлетит тело? ( см. решение в приложении).

Как видно из примеров, решение экстремальных задач даёт возможность установить более тесную межпредметную связь алгебры, геометрии и физики. При их решении ученики приобретают не только математическую информацию, но и знания из курса физики. Решение физических задач поучительно с точки зрения математики, так как можно показать тонкости тех или иных математических приемов в действии, в их практическом приложении. В частности эти задачи помогают осознать, что функция, заданная аналитической формулой, может выражать зависимость между реальными величинами в самых различных явлениях и процессах.

Метод опорных функций часто используется и при решении задач на геометрические экстремумы, если условие задачи удается формализовать, т. е. свести её к исследованию формулы. Характерной особенностью геометрических задач на нахождение экстремумов, решаемых методом опорных функций, является составление геометрических формул, непосредственно подсказанных соответствующими теоремами. Речь идет о таких теоремах и формулах, как теоремы косинусов, синусов; формулы для вычисления площадей; формулы метрических соотношений в прямоугольном треугольнике и др. решение геометрических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения геометрической величины чаще всего сводится к исследованию опорных функций вида *f(х) = ах² + вх = с.* Но иногда решение таких задач с помощью опорной функции сводится непосредственно к использованию не одной известной геометрической формулы, а нескольких вспомогательных теорем (формул), которые в свою очередь могут потребовать новых теорем. Такое использование системы теорем (формул) требует и соответствующих логических рассуждений. *Примером может быть следующая задача.*

На земельном участке, имеющем форму остроугольного треугольника АВС, надо построить дом прямоугольной формы так, чтобы он прилегал к сторонам участка. Известно, что АС = 40 м, h = ВД = 20 м. Какую наибольшую площадь участка может занять проектируемое здание?

 Пусть MN = х, МК = у. Так как $∆$ АВС $\~$ $∆$ NBP то $\frac{АС}{ВД}$ = $\frac{NP}{BL}$; $ \frac{40}{20}$ = $\frac{у}{20-х}$; у = 40 – 2х.

 S = ху = х (40 – 2х) = $-$ 2х² + 40х = $-$ 2(х – 10)² + 200.

$S\_{мах}$ = 200 при х = 10, у = 20.

 В

 N P

L

 L

 A М К C

Д

 Итак, решение задачи сводится к исследованию опорной функции вида *f(х) = ах² + вх = с.*

Метод преобразования плоскости. Некоторое количество экстремальных геометрических задач в школьном курсе решается с применением этого метода. Рассмотрим одну из них.

*Задача1*. Среди всех возможных треугольников с данным основанием *а* и противолежащим углом $α $найдите треугольник, имеющий медиану максимальной (минимальной) длины.

Обозначим через х длину медианы АК, максимум и минимум которой нас интересуют. Дадим элементу х определенное значение, например х = m, и решим следующую задачу: построить треугольник АВС по данному углу $α$, равного углу А, противолежащей стороне *а* и медиане = = m,. Решив эту задачу (используя методы построения), считая длину медианы m переменной и замечаем те особенности, которые возникают при достижении медианой х максимального и минимального значения. Из чертежа легко заметить, что если точка А перемещается по окружности, тои угол ВАС остаётся постоянным, а длина медианы изменяется в таких пределах: $А\_{2}$К $\leq $m $\leq $ $А\_{1}$К.

 А

$$А\_{1}$$

$$α$$

О

К

 С В

$$А\_{2}$$

С использованием замеченных особенностей легко доказать, что требуемые условия удовлетворительны. Это дает возможность сделать следующее заключение: *из всех треугольников с данным основанием и данным острым углом при вершине равнобедренный треугольник имеет наибольшую медиану, а с тупым углом при вершине равнобедренный треугольник имеет наименьшую медиану*.

Геометрические задачи в силу своих особенностей и возможностей допускают различные методы решения. Так, в частности, одна и та же задача может быть решена как методом преобразования плоскости, так и алгебраическими методами. Во многих геометрических экстремальных задачах решение алгебраическими средствами становится очень сложным, а методом преобразования плоскости они решаются проще.

*Задача 2.* Отрезок данной длины перемещается так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. При каком положении этого отрезка площадь отсекаемого треугольника будет наибольшей?

Решим задачу с применением *метода опорной функции*.

Пусть АВ = с, угол АСВ = 90°. Обозначим длины катетов треугольника АВС через x и y, сводим задачу к нахождению максимума функции

f(x,y) = 0,5xy = 0,5х$ \sqrt{с^{2}-х^{2}}$ = 0,5 $\sqrt{ х²(с^{2}-х^{2}})$ =

= 0, 5 $\sqrt{–\left(х^{2}- 0,5с^{2}\right)²+ 0,25с^{4}}$. Отсюда ясно, что $S\_{мах}$ = 0,25 с² при х =$ \frac{с}{ \sqrt{2}}$.

Решая систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}S=0,25с^{2},\\S=0,5ху, \\х= \frac{с}{ \sqrt{2}}.\end{array}\right.$

Находим: х = у = $\frac{с}{ \sqrt{2}}$. Поскольку х = у = $\frac{с}{ \sqrt{2}}$, то прямоугольный треугольник равнобедренный и имеет максимальную площадь S = $\frac{с²}{4}$.

Любопытно, что если за основание принять гипотенузу *с,* то задача *методом оценки* решается в одну строку: ($S\_{∆}$ = 0,5с$h\_{c}$ $\leq $ с$m\_{c}$) $\rightarrow $ ($S\_{мах}$ = 0,25 с², если$ m\_{c}$=$ h\_{c}$).

Решим эту задачу *методом геометрических преобразований*. Рассуждаем так: поскольку длина отрезка постоянна, а угол, лежащий против него, прямой, то будем перемещать не отрезок АВ, а угол АВС так, чтобы вершина С скользила по окружности. Отсюда ясно, что площадь треугольника будет наибольшей тогда, когда радиус ОС станет высотой.

 B

 C A

Опираясь на решение этой задачи, легко решается *задача о нахождении прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг.* Действительно, диагональ разбивает прямоугольник на два прямоугольных треугольника, гипотенузой которых служит диаметр круга. Высота этих треугольников максимальна в случае, когда она совпадает с радиусом, перпендикулярным диаметру соответствующего полукруга, и в этом случае оба треугольника будут равнобедренными прямоугольными, т. е. прямоугольник будет квадратом.

Формирование умения решать задачи на экстремумы с помощью производной – одна из важных целей изучения начал математического анализа в средней школе. Задачи этого типа имеют чёткую прикладную направленность. Действительно, в них представлены все фазы построения и использования математической модели: формализация – составление функции, описывающей условия задачи; решение формализованной задачи – поиск значений аргумента, в которых значение производной функции равно нулю или в которых она не существует (критических точек); интерпретация – анализ критических точек с учётом особенностей задачи.

Вместе с тем следует учитывать, что задачи, которые решаются с использованием производной, во многих случаях оказывается возможным решить и другими, элементарными методами. Сопоставление различных способов решения экстремальных задач, проведенное на нескольких примерах, может оказаться полезным в нескольких отношениях:

- можно сравнить единообразный характер решения задач с помощью производной с приемами, которые приходится выискивать, если производной не пользоваться;

- решение экстремальных задач элементарными методами обычно находится с большим трудом; оно включает элемент догадки и творчества. В то же время использование производной может оказаться принципиально не сложным, но связанным с достаточно большими вычислениями.

*Пример 1.* Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади.

*Элементарное решение*. Пусть АВСД – прямоугольник, вписанный в полуокружность, КР – её диаметр. Объединение данной полуокружности и её образа при осевой симметрии относительно (КР) – окружность. В эту окружность вписан прямоугольник АА'В'В; А'В'= $Z\_{КР}$(АВ). (рис. 1).Площадь прямоугольника АВСД – половина площади прямоугольника АА'В'В. Отсюда следует, что (площадь АВСД максимальна)⇔ (площадь АА'В'В максимальна). Но из всех прямоугольников, наибольшую площадь имеет квадрат, отсюда получаем ответ: искомый прямоугольник имеет отношение сторон 2 : 1, а его площадь равна R², где R – радиус данной полуокружности. (смотри *задачу о нахождении прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг*).

*Решение с помощью производной*. Будем считать, что данный полукруг расположен на координатной плоскости (рис. 2). Тогда площадь АВСД выражается функцией f(х), где х = ОС. f(х) = 2х$ \sqrt{R²-х²;}$ D(f) = (0; R). Производная данной функции имеет вид: f'(х) = 2 $\frac{R²-2х²}{\sqrt{R²-х²}}$, откуда значение аргумента для экстремума f(х) (проверяется, что оно будет точкой максимума) находится из уравнения R² $-$2х² = 0, т. е. х = $\frac{\sqrt{2R}}{2}$ и f(х) = R². Заметим, что в данном случае выяснение характера критической точки проще всего произвести с привлечением геометрических соображений: функция f(х) при значениях *х,* близких к концам интервала (0; R), принимает значения, близкие к нулю; если же *х* удаляется от концов (0; R), то f(х) возрастает. Но критическая точка у функции только одна; следовательно, это точка максимума.

 y

В

А

А

R

В

В

х

Р

К

R

Д

С

О

Д

*х*

Д

Д

К

С

х

Р

С

$$В^{'}$$

$$А^{'}$$

Рис.1. Рис.2.

*Пример 2.* Вписать в данный шар радиуса R цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

Решение. Пусть цилиндр, осевое сечение которого изображено на рисунке 3, есть искомый, т. е. вписанный в данный шар и имеющий наибольшую боковую поверхность. Обозначим через r радиус основания этого цилиндра, а через *l* – его образующую. Тогда $S\_{бок}$ *= 2*$πRl. (1)$Выразим r через R и l, для того чтобы сделать $S\_{бок}$ функцией от одной переменной. Имеем: *r =* $\sqrt{R²- \frac{l²}{4}}$*.* Подставляя это выражение r в формулу (1), получим: $S\_{бок}$ *= 2*$π \sqrt{R²l²- \frac{l^{4}}{4}}$*.* Для простоты обозначим *l²* через х, ибо *l²* можно рассматривать как переменную (различным значениям *l²* соответствуют различные вписанные цилиндры). Тогда $S\_{бок}$ *= 2*$π \sqrt{R²х- \frac{х^{2}}{4}}$*.* (2)*.* Отсюда видно, что максимальное значение $S\_{бок}$ соответствует такому значению х, которое обращает в максимум подкоренное выражение в формуле (2), т. е. *у =* $R²х- \frac{х^{2}}{4}$*.* (3) Следовательно, нам нужно найти наибольшее значение функции (3) на промежутке изменения переменной *х* от *0* до *4R²* (так как образующая вписанного цилиндра может меняться от *0* до *2R*). Это можно сделать, используя понятие производной, но можно обойтись и без неё. Покажем оба способа решения.

*1-й способ (с помощью производной)*.

Найдём производную функции *у' = R²* $-$$\frac{х}{2}$*.* Эта производная обращается в нуль в единственной точке *х =2R².* Так как функция (3) дифференцируема во всем промежутке изменения *х*  от *0* до *4R²*, то для нахождения наибольшего значения этой функции достаточно вычислить её значение на концах этого промежутка и в критической точке *х = 2R².* Находим, что при *х = 0* и при *х = 4R²; у = 0,* а при *х = 2R² ; у =* $R^{4}$*.* Следовательно, наибольшее значение у принимает при *х = 2R².*

*2-й способ*. Преобразуем формулу (3) следующим образом: *у =* $R²х- \frac{х^{2}}{4}$ *=*

 *=* $R²х- \frac{х^{2}}{4}$$-$$R^{4}$ *+* $R^{4}$ *=* $R^{4}$$- $*(*$\frac{х}{2}$$-$ *R²)².* Так как *(*$\frac{х}{2}$$-$ *R²)²* $\geq $*0, то у* $\leq $$R^{4}$ и наибольшее значение $R^{4}$ принимает при таком значении х, при котором

$\frac{х}{2}$$-$ *R² = 0*, т. е. при *х = 2R².* При найденном значении *х = 2R², l² = 2R², l = R*$\sqrt{2}$*,*

*r =*$ \frac{R}{ \sqrt{2}}$. Тогда *l = 2r*. Это значит, что цилиндр с наибольшей боковой поверхностью, вписанный в данный шар, в осевом сечении представляет собой квадрат, вписанный в окружность большего круга*. Ответ: наибольшее значение* $S\_{бок}$ *= 2*$πR²$ *при r =*$ \frac{R}{\sqrt{2}}$*., l = R*$\sqrt{2}$*.*

О

l

R

r

*Пример 3*. Определить *а* так, чтобы сумма квадратов корней уравнения

*х² + (2 – а ) х – а – 3 = 0* была наименьшей.

Решение. Выразим сумму квадратов $х\_{1}^{2}$ *+* $х\_{2}^{2}$ корней $х\_{1}$и$х\_{2}$ данного уравнения через коэффициенты уравнения. Для этого вспомним теорему Виета: $х\_{1}$ *+* $х\_{2}$ *=* $-$ *(2 – а ) = а – 2 ,* $х\_{1}×х\_{2}$ *=* $-$*( а + 3 ).* Отсюда

$х\_{1}^{2}$ *+* $х\_{2}^{2}$ *= (*$х\_{1}$ *+* $х\_{2}$*)²* $-$*2* $х\_{1}×х\_{2}$ *=(а* $-$*2)² + 2 (а + 3) = (а – 1)² + 9.* Из этого выражения видно, что всегда $х\_{1}^{2}$ *+* $х\_{2}^{2}$$\geq 9$*,* при этом наименьшее значение она принимает при *а = 1*, и это наименьшее значение равно 9. *Ответ: а = 1.*

 В заключение хочется отметить, что очень важно и необходимо на самых ранних этапах изучения математики рассматривать решение прикладных задач на экстремумы, применяя различные способы и методы решения. Такая целенаправленная работа с учащимися в этой области, создает благотворную почву для самоподготовки и к сдаче ЕГЭ. Решая экстремальные задачи, ученики учатся мыслить и понимать основы математики, овладевать простейшими применениями математики на практике, учатся думать, изобретать новые решения, овладевать умением работать творчески.

Приложение.

*Задача 3*. Тело брошено вертикально вверх с высоты 25 м с начальной скоростью 4 ${м}/{с}$. Считая ускорение земного притяжения равным 10 ${м}/{с}$² и пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, на какую максимальную высоту взлетит тело?

Решение. Из курса физики известно, что путь S, пройденный телом при равномерном движении, измеряется в зависимости от времени по закону

*S =* $S\_{0}$ *+* $v\_{0}$*t +* $\frac{at²}{2}$, где $S\_{0}$ - начальный путь, $v\_{0}$ - начальная скорость, *а* – ускорение, t – время. В рассматриваемом случае $S\_{0}$ = 25, $v\_{0}$ = 4${ м}/{с}$, а = $-$10 ${м}/{с²}$, т. е. S = 25 + 4t – 5 t² = $-$5 ( t² $-\frac{4}{5}$ t ) + 25 = $-$ 5 ( t $-$ $\frac{2}{5}$ )² + 25$ \frac{4}{5}$;

*maх S = 25, 8* при *t = 0,4 с*. Тело, брошенное вертикально вверх, через *0,4 с* достигает своего максимального значения в *25, 8 м.*

*Задача 2*. Решение. Преобразуем квадратные трехчлены следующим образом:

*а) f = 24 -* $\frac{2}{3}$ *v +* $\frac{1}{30}$*v² = 24 -* $\frac{20}{30}$*v -* $\frac{1}{30}$*v² =* $\frac{1}{30 }$ *(v – 10)² + 24 -* $\frac{100}{30}$ *=* $\frac{1}{30 }$ *(v – 10)² + +20*$\frac{2}{3}\geq $*20*$\frac{2}{3}$*;*

*б) f = 28 -* $\frac{1}{4}$*v +* $\frac{1}{50}$*v² = 28 -* $\frac{25}{100}$*v +* $\frac{2}{100}$*v² =* $\frac{2}{100}$ *(v -* $\frac{25}{4}$*)² + 28 -* $\frac{25^{2}}{16}×\frac{2}{100}$ *= 0,02*$×$

$×$*(v – 6,25)² + 27*$\frac{7}{32 }$$\geq $ *27*$\frac{7}{32 }$*;*

*в) f = 29 -* $\frac{2}{3}$ *v +* $\frac{1}{15}$*v² =* $\frac{2}{30}$*v² -* $\frac{20}{30}$*v + 29 = =* $\frac{2}{30}$ *(v – 5)² + 27*$\frac{1}{3}$$\geq $ *27*$\frac{1}{3}$*;*

Сопротивление будет наименьшим:

на хорошем шоссе при *v = 10*${ км}/{ч}$*;*

на плохом шоссе при *v = 6,25 км /ч;*

на булыжной мостовой при *v = 5*${ км}/{ч}$*;*

на мягкой грунтовой дороге при *v = 5*${ км}/{ч}$

Литература:

1. «Прикладные задачи на экстремумы». Авторы: Г. М. Возняк, В. А. Гусев. Москва «Просвещение» 1985г.

2. «Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе». Сост. Е. Г. Глаголева и О.С. Ивашев - Мусатов. Москва «Просвещение», 1981г.

2. «Как научиться решать задачи». Авторы: Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий, Москва «Просвещение» 1989г.