**Метод интервалов**

*Методом интервалов* (иногда его называют также *методом промежутков*), называется метод решения неравенств, основанный на исследовании смены знаков функции. Данный метод находит применение в широком круге задач, в частности, при решении линейных неравенств, квадратных неравенств, дробно-линейных неравенств.

В основе *метода интервалов* лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.
4. Если строго возрастающая (убывающая) функция имеет корень, то справа от корня она положительна (отрицательна) и при переходе через корень меняет знак.

Рассмотрим основную схему решения неравенства вида  (, , ) методом интервалов.

1. Найти область определения функции .
2. Найти нули функции .
3. На числовую прямую нанести область определения и нули функции. Нули функции разбивают ее область определения на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак.
4. Найти знаки функции в полученных промежутках, вычислив значение функции в какой-либо одной точке из каждого промежутка.
5. Записать ответ.

Метод интервалов можно использовать для решения ***любых*** неравенств, начиная с линейных и заканчивая сложными дробно-рациональными, логарифмическими, иррациональными неравенствами. Рассмотрим применение этого метода на следующих примерах. Обратите внимание на оформление решений.

**Примеры.**

1. Решить неравенство



**Решение:**

Решим неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию



и найдем множество значений х, при которых 

1) Найдем

2) Найдем нули функции:




3)



Если x > 1, например x = 2, то



Если  например ,то



Если, например, то



Если x < 0, например x = -1, то



Итак,  при .

**Ответ:**  

2. Решить неравенство .

**Решение**:

Воспользуемся методом интервалов. Рассмотрим функцию f(x)=x2(2x+1)(x-3) и найдем множество значений х , при которых 

1)D(f)=R

2) Найдем нули функции:x2(2x+1)(x-3)=0



3)



Пусть требуется решить неравенство (*x - a*1)*k*1(*x - a*2)*k*2...(*x - an*- 1)*kn*- 1(*x - a*n)*kn* > 0,  где *k*1, *k*2, ...,  *kn*- 1,  *kn*  – целые положительные числа; *a*1, *a*2, ...*,an -*1*, a*n   – действительные числа, среди которых нет равных, причем такие, что *a*1 <  *a*2 <  ..< *an*- 1*<  a*n .

 Рассмотрим свойство двучлена (*x*- *a*)*n* . Точка  *a*  делит числовую ось на две части, причем:

* если *n*  четное, то выражение (*x*- *a*)*n*  справа и слева от точки *a* сохраняет положительный знак;
* если *n*  нечетное, то выражение (*x*- *a*)*n*  справа от точки *a*  положительно, а слева от точки *a*отрицательно.

Рассмотрим функцию *f*(*x*) = (*x - a*1)*k*1(*x - a*2)*k*2...(*x - an*- 1)*kn*- 1(*x - a*n)*kn*,  где *a*1 <  *a*2 <  ..< *an*- 1*<  a*n.

Для любого числа *x0* такого, что *x0* > *a*n, соответствующее числовое значение любого сомножителя в произведении положительно, а значит, *f*(*x0*) > 0 . Для любого числа  *x*1, взятого из интервала  (*an*- 1; *an*), соответствующее числовое значение любого из множителей, кроме множителя  (*x - a*n)*kn*, положительно, если*kn*  – четное число, и отрицательно, если *kn*   – нечетное число. Поэтому число *f*(*x*1) < 0 ,  если  *kn*   – нечетное число и   *f*(*x*1) > 0 , если  *kn* – четное число. Аналогично определяется  знак функции *f*(*x*)  на любом интервале.

Таким образом, на числовую ось наносят числа  *a*1, *a*2, ...*,an -*1*, a*n . В промежутке справа от наибольшего из них, т. е. числа  *a*n , ставят знак плюс, а затем, двигаясь, справа налево, при переходе через очередное число   меняют знак, если   *kn*   – нечетное число и  сохраняет знак, если  *kn*   – четное число.

**Пример** Решить неравенство (*x* + 7)(2*x* - 5)3(6 - *x*)5(3*x* + 10)4 < 0 .

**Решение.** Перепишем неравенство в равносильном виде (*x* - ( -7))(*x* - ( -310))4(*x*-2,5)3(*x* - 6) > 0. На числовой оси отметим числа -7, -10/3, 2,5 и 6. Справа от наибольшего числа 6 ставим знак плюс.

|  |  |
| --- | --- |
| image130 | При переходе через точку *x* = 6  функцияf(x) = (x - ( -7))(x - ( -310))4(x -2,5)3(x - 6)меняет знак, так как двучлен (x - 6)  содержится в нечетной степени, поэтому в промежутке (2,5; 6) ставим знак минус. При переходе через точку x= 2,5  функция f(x)  меняет знак, так как двучлен (x - 2,5)   содержится в произведении в нечетной степени, поэтому в промежутке (-10/3; 2,5) ставим знак плюс.  |

При переходе через точку *x* = -10/3 функция*f*(*x*)  не меняет знака, так как двучлен (*x* -( -10/3))   содержится в произведении в четной степени, поэтому в промежутке(-7;-10/3) ставим знак плюс. Наконец, при переходе через точку  *x* = 7   функция *f*(*x*)  меняет знак, так как двучлен (*x* - ( -7))  содержится в произведении в первой степени, поэтому в промежутке  (−;7) ставим знак минус. Решением неравенства (*x* + 7)(2*x* - 5)3(6 - *x*)5(3*x*+ 10)4 < 0, а значит, и равносильного ему неравенства  (*x* - ( -7))(*x* - ( -310))4(*x*-2,5)3(*x* - 6) > 0  будет совокупность промежутков, где стоит знак плюс.

**Ответ:***x*(−7;−310)(−310;25)(6;+).