

Решение варианта №6

Задание 1. Нули функции $f(x) = \cos\left(\frac{7x}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\cos\left(\frac{7x}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \cos\left(\frac{7x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{7x}{4} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учтём, что $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Значение $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ является табличным:

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{7x}{4} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{10\pi}{21} + \frac{8\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \cos\left(\frac{7x}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ указываем на то, что функция $\cos(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $\frac{\sqrt{3}}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = \pm \frac{10\pi}{21} + \frac{8\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 - 3x + 10}(\sin(4x)\cos(3x) - \cos(4x)\sin(3x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 - 3x + 10$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 - 3x + 10 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 - 3x + 10 = 0, \quad x^2 + 3x - 10 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 2.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-2)(x+5) \geq 0, \quad (x-2)(x+5) \leq 0.$$

Выражение $(x-2)(x+5)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-5, 2]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-5, 2]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для синуса разности:

$$(\sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)) = \sin(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2 - 3x + 10} \sin(4x - 3x) = 0, \quad \sqrt{-x^2 - 3x + 10} \sin(x) = 0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2 - 3x + 10} = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1 = -5, \quad x_2 = 2$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = -\pi, \quad x_4 = 0.$$

Ответ: $x_1 = -5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -\pi, \quad x_4 = 0$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos x}{1-3\sin x}, \quad y' = \frac{(\cos x)'(1-3\sin x) - (\cos x)(1-3\sin x)'}{(1-3\sin x)^2}, \\ y' &= \frac{-\sin x(1-3\sin x) - (\cos x)(-3\cos x)}{(1-3\sin x)^2}, \quad y' = \frac{-\sin x + 3\sin^2 x + 3\cos^2 x}{(1-3\sin x)^2}, \\ y' &= \frac{-\sin x + 3}{(1-3\sin x)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{-\sin x + 3}{(1-3\sin x)^2}$.

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2x - \cos 2x} + x^2 \operatorname{tg} x, \quad y' = (\sqrt{2x - \cos 2x})' + (x^2 \operatorname{tg} x)', \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{2x - \cos 2x}} (2x - \cos 2x)' + (x^2)' \operatorname{tg} x + x^2 (\operatorname{tg} x)', \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{2x - \cos 2x}} (2 + 2\sin 2x) + 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}, \\ y' &= \frac{1 + \sin 2x}{\sqrt{2x - \cos 2x}} + 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{1 + \sin 2x}{\sqrt{2x - \cos 2x}} + 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$.

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3 - 12x = 0, \quad x(x^2 - 3) = 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

На промежутке $(-\infty, -\sqrt{3})$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-\sqrt{3}, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, \sqrt{3})$ – отрицательные значения, $(\sqrt{3}, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1 = 0$ (точка максимума), $x_2 = -\sqrt{3}$ (точка минимума), $x_3 = \sqrt{3}$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-3, 0]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(-3) = 81 - 54 + 5 = 32, \quad f(0) = 5, \quad f(-\sqrt{3}) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

Итак, наименьшее значение функции на промежутке $[-3, 0]$ равно (-4) , наибольшее равно 32.

Ответ: Экстремумами функции являются: экстремумами функции являются: $x_1 = 0$ (точка максимума), $x_2 = -\sqrt{3}$ (точка минимума), $x_3 = \sqrt{3}$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, наибольшее значение функции на промежутке $[-3, 0]$ равно 32, наименьшее равно (-4) .