

Решение варианта №2

Задание 1. Нули функции $f(x) = \sin\left(\frac{5x}{7}\right) - \frac{1}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\sin\left(\frac{5x}{7}\right) - \frac{1}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{5x}{7}\right) = \frac{1}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{5x}{7} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\sin(t) = \frac{1}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ является табличным:

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{5x}{7} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^n \frac{7\pi}{30} + \frac{7\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{5x}{7}\right) - \frac{1}{2}$ указываем на то, что функция $\sin(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $-\frac{1}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = (-1)^n \frac{7\pi}{30} + \frac{7\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 5}(\sin(5x)\cos(4x) - \cos(5x)\sin(4x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 4x + 5$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 4x + 5 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0, \quad x^2 - 4x - 5 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-5)(x+1) \geq 0, \quad (x-5)(x+1) \leq 0.$$

Выражение $(x-5)(x+1)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-1, 5]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-1, 5]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для синуса разности:

$$(\sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)) = \sin(x - y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 5} \sin(5x - 4x) = 0, \quad \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \sin(x) = 0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = 0 \quad \text{и} \quad \sin(x) = 0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = 0, \quad x_4 = \pi.$$

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt{3x} - \cos \frac{x}{2} + x^2 \sin 2x, \quad y' = (\sqrt{3x})' - \left(\cos \frac{x}{2} \right)' + (x^2 \sin 2x)',$$

$$y' = \frac{1}{2} (3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + (x^2 \sin 2x)', \quad y' = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + (x^2)' \sin 2x + x^2 (\sin 2x)',$$

$$y' = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + 2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x.$$

Ответ: $y' = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + 2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x$.

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}, \quad y' = \frac{(1 + \sin x)'(1 - \cos x) - (1 + \sin x)(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2},$$

$$y' = \frac{\cos x (1 - \cos x) - \sin x (1 + \sin x)}{(1 - \cos x)^2}, \quad y' = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}, \quad y' = \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1 - \cos x)^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1 - \cos x)^2}$.

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3 - 6x = 0, \quad x(4x^2 - 6) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{1,5}, \quad x_3 = \sqrt{1,5}.$$

На промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5})$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, \sqrt{1,5})$ – отрицательные значения, на промежутке $(\sqrt{1,5}, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{1,5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{1,5}$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-2, 1]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точки, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(-2)=16-12+2=6, \quad f(0)=0-0+2=2, \\ f(-\sqrt{1,5})=1,5^2-3\cdot 1,5+2=2,25-4,5+2=-0,25, \quad f(\sqrt{1,5})=1-3+2=0.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[-2, 1]$ равно 6, наименьшее равно $(-0,25)$.

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{1,5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{1,5}$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$, наибольшее значение функции на промежутке $[-2, 1]$ равно 6, наименьшее равно $(-0,25)$.