

Решение варианта №4

Задание 1. Нули функции $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{9}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\sin\left(\frac{2x}{9}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{2x}{9}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{2x}{9} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учтём, что $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. В итоге имеем:

$$t = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Значение $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ является табличным:

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{2x}{9} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{9\pi}{8} + \frac{9\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{9}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ указываем на то, что функция $\sin(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = (-1)^{n+1} \frac{9\pi}{8} + \frac{9\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 9x + 10} (\cos(3x) \cos(2x) + \sin(3x) \sin(2x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 9x + 10$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 9x + 10 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2+9x+10=0 \quad , \quad x^2-9x-10=0 \quad .$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1=-1 \quad , \quad x_2=10 \quad .$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x+1)(x-10) \geq 0 \quad , \quad (x+1)(x-10) \leq 0 \quad .$$

Выражение $(x+1)(x-10)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-1, 10]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-1, 10]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для косинуса разности:

$$(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y))=\cos(x-y) \quad .$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+9x+10}\cos(3x-2x)=0 \quad , \quad \sqrt{-x^2+9x+10}\cos(x)=0 \quad .$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+9x+10}=0 \quad \text{и} \quad \cos(x)=0 \quad .$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1=-1 \quad , \quad x_2=10$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x=\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x_4=\frac{3\pi}{2} \quad , \quad x_5=\frac{5\pi}{2} \quad .$$

Ответ: $x_1=-1 \quad , \quad x_2=10 \quad , \quad x_3=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x_4=\frac{3\pi}{2} \quad , \quad x_5=\frac{5\pi}{2}$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\sqrt{x}\cos^2 2x \quad , \quad y'=(\sqrt{x})'\cos^2 2x+\sqrt{x}(\cos^2 2x)' \quad ,$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2 2x+\sqrt{x}2\cos(2x)(-\sin(2x))2 \quad .$$

Учитывая, что $2\cos(2x)\sin(2x)=\sin(4x)$, имеем: $y'=\frac{\cos^2 2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(4x)$.

Ответ: $y'=\frac{\cos^2 2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(4x)$.

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\sqrt[3]{1+\sin^2 6x} \quad , \quad y'=(\sqrt[3]{1+\sin^2 6x})' \quad ,$$

$$y'=\frac{1}{3}(1+\sin^2 6x)^{-\frac{2}{3}}(1+\sin^2 6x)' \quad , \quad y'=\frac{1}{3(1+\sin^2 6x)^{\frac{2}{3}}}2\sin(6x)\cos(6x)6 \quad .$$

Учитывая, что $2\sin(6x)\cos(6x)=\sin(12x)$, имеем: $y'=\frac{2\sin(12x)}{(1+\sin^2 6x)^{\frac{2}{3}}}$.

Ответ: $y'=\frac{2\sin(12x)}{(1+\sin^2 6x)^{\frac{2}{3}}}$.

Задание 4. Для исследования функции $f(x)=x^4-2x^2-3$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x)=4x^3-4x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3-4x=0, \quad x(x^2-1)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=1.$$

На промежутке $(-\infty, -1)$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-1, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, 1)$ – отрицательные значения, на промежутке $(1, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-1$ (точка минимума), $x_3=1$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-3, 0]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(-3)=81-18-3=60, \quad f(0)=0-0-3=-3, \quad f(-1)=1-2-3=-4.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[-3, 0]$ равно 60, наименьшее равно (-4) .

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-1$ (точка минимума), $x_3=1$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, наибольшее значение функции на промежутке $[-3, 0]$ равно 60, наименьшее равно (-4) .