

Решение варианта №9

Задание 1. Нули функции $f(x) = \sin\left(\frac{11x}{15}\right) - \frac{1}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\sin\left(\frac{11x}{15}\right) - \frac{1}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{11x}{15}\right) = \frac{1}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{11x}{15} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\sin(t) = \frac{1}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ является табличным:

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{11x}{15} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^n \frac{15\pi}{66} + \frac{15\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{11x}{15}\right) - \frac{1}{2}$ указываем на то, что функция $\sin(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $-\frac{1}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = (-1)^n \frac{15\pi}{66} + \frac{15\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 15}(\cos(17x)\cos(16x) + \sin(17x)\sin(16x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 2x + 15$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 2x + 15 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 2x + 15 = 0, \quad x^2 - 2x - 15 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-5)(x+3) \geq 0, \quad (x-5)(x+3) \leq 0.$$

Выражение $(x-5)(x+3)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-3, 5]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-3, 5]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для косинуса разности:

$$(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) = \cos(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+2x+15}\cos(17x-16x)=0, \quad \sqrt{-x^2+2x+15}\cos(x)=0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+4x+5}=0 \quad \text{и} \quad \cos(x)=0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1=-3$, $x_2=5$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{3\pi}{2}.$$

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3 \cos x}{7+15 \sin x}, \quad y' = 3 \frac{(\cos x)'(7+15 \sin x) - (\cos x)(7+15 \sin x)'}{(7+15 \sin x)^2}, \\ y' &= 3 \frac{-\sin x(7+15 \sin x) - (\cos x)(15 \cos x)}{(7+15 \sin x)^2}, \quad y' = 3 \frac{-7 \sin x - 15 \sin^2 x - 15 \cos^2 x}{(7+15 \sin x)^2}, \\ y' &= 3 \frac{-7 \sin x - 15}{(7+15 \sin x)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = 3 \frac{-7 \sin x - 15}{(7+15 \sin x)^2}.$$

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{5x - \sin 6x} + x^2 \sin x, \quad y' = (\sqrt{5x - \sin 6x})' + (x^2 \sin x)', \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{5x - \sin 6x}} (5x - \sin 6x)' + (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)', \\ y' &= \frac{5 - 6 \cos 6x}{2\sqrt{5x - \sin 6x}} + 2x \sin x + x^2 \cos x. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{5 - 6 \cos 6x}{2\sqrt{5x - \sin 6x}} + 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = 5x^4 - 15x^2 - 16$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 20x^3 - 30x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$20x^3 - 30x = 0, \quad x(4x^2 - 6) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{1,5}, \quad x_3 = \sqrt{1,5}.$$

На промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5})$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, \sqrt{1,5})$ – отрицательные значения, на промежутке $(\sqrt{1,5}, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{1,5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{1,5}$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[0, 3]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(0)=0-0-16=-16, \quad f(3)=5 \cdot 81-15 \cdot 9-16=405-135-16=254,$$

$$f(\sqrt{1,5})=5 \cdot 1,5^2-15 \cdot 1,5-16=11,25-22,5-16=-27,25.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно 254, наименьшее равно $(-27,25)$.

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{1,5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{1,5}$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$, наибольшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно 254, наименьшее равно $(-27,25)$.