

Решение варианта №7

Задание 1. Нули функции $f(x) = \cos\left(\frac{8x}{13}\right) + \frac{1}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\cos\left(\frac{8x}{13}\right) + \frac{1}{2} = 0, \quad \cos\left(\frac{8x}{13}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{8x}{13} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\cos(t) = -\frac{1}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учтём, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.

Значение $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ является табличным:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{8x}{13} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{26\pi}{24} + \frac{26\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \cos\left(\frac{8x}{13}\right) + \frac{1}{2}$ указываем на то, что функция $\cos(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $\frac{1}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = \pm \frac{26\pi}{24} + \frac{26\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + x + 30}(\sin(13x)\cos(12x) - \cos(13x)\sin(12x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + x + 30$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + x + 30 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + x + 30 = 0, \quad x^2 - x - 30 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 6.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-6)(x+5) \geq 0, \quad (x-6)(x+5) \leq 0.$$

Выражение $(x-6)(x+5)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-5, 6]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-5, 6]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для синуса разности:

$$(\sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)) = \sin(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+x+30} \sin(13x-12x) = 0, \quad \sqrt{-x^2+x+30} \sin(x) = 0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+x+30} = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1 = -5$, $x_2 = 6$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = -\pi, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \pi, \quad x_6 = \pi.$$

Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = 6$, $x_3 = -\pi$, $x_4 = 0$, $x_5 = \pi$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt{x} \operatorname{tg} 6x + \cos^2(3x), \quad y' = (\sqrt{x} \operatorname{tg} 6x)' + (\cos^2(3x))',$$

$$y' = (\sqrt{x})' \operatorname{tg} 6x + \sqrt{x} (\operatorname{tg} 6x)' + 2 \cos(3x) (-\sin(3x)) 3,$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} 6x + \sqrt{x} \frac{6}{\cos^2(6x)} - 2 \cdot 3 \cos(3x) \sin(3x),$$

$$y' = \frac{\operatorname{tg} 6x}{2\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt{x}}{\cos^2(6x)} - 3 \sin(6x).$$

Ответ: $y' = \frac{\operatorname{tg} 6x}{2\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt{x}}{\cos^2(6x)} - 3 \sin(6x).$

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt[3]{1 - \cos^2(5x)}, \quad y' = (\sqrt[3]{1 - \cos^2(5x)})', \quad y' = \frac{1}{3} (1 - \cos^2(5x))^{-\frac{2}{3}} (1 - \cos^2(5x))',$$

$$y' = \frac{1}{3} (1 - \cos^2(5x))^{-\frac{2}{3}} (-2 \cos(5x) (-\sin(5x)) 5), \quad y' = \frac{5}{3} (1 - \cos^2(5x))^{-\frac{2}{3}} \sin(10x),$$

$$y' = \frac{5}{3} \frac{\sin(10x)}{(1 - \cos^2(5x))^{\frac{2}{3}}}.$$

Ответ: $y' = \frac{5}{3} \frac{\sin(10x)}{(1 - \cos^2(5x))^{\frac{2}{3}}}.$

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = x^3 - 2x$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$3x^2 - 2 = 0, \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

На промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ производная функции принимает положительные значения, на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ – отрицательные значения, на промежутке $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ (точка максимума), $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$, убывает на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-1, 4]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 = 1, & f(4) &= 64 - 8 = 56, \\ f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, & f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Итак, наименьшее значение функции на промежутке $[-1, 4]$ равно $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, наибольшее равно 56.

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ (точка максимума), $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$, убывает на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, наибольшее значение функции на промежутке $[-1, 4]$ равно 56, наименьшее равно $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.