

Решение варианта №1

Задание 1. Нули функции $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{3x}{2} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ является табличным:

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{3x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ указываем на то, что функция $\cos(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \left[-\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[\frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 11x - 10}(\cos(6x)\cos(5x) + \sin(6x)\sin(5x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 11x - 10$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 11x - 10 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 11x - 10 = 0, \quad x^2 - 11x + 10 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 10.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-1)(x-10) \geq 0, \quad (x-1)(x-10) \leq 0.$$

Выражение $(x-1)(x-10)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[1, 10]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[1, 10]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для косинуса разности:

$$(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) = \cos(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+11x-10}\cos(6x-5x)=0, \quad \sqrt{-x^2+11x-10}\cos(x)=0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+11x-10}=0 \quad \text{и} \quad \cos(x)=0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1=1$, $x_2=10$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x=\pi/2+\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x=\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3=\frac{\pi}{2}, \quad x_4=\frac{3\pi}{2}, \quad x_5=\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=\frac{\pi}{2}$, $x_4=\frac{3\pi}{2}$, $x_5=\frac{5\pi}{2}$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\sqrt{x}+\sin\frac{x}{2}+x^2\cos 2x, \quad y'=(\sqrt{x})'+\left(\sin\frac{x}{2}\right)'+(x^2\cos 2x)',$$

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+(x^2)'\cos 2x+x^2(\cos 2x)', \quad y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$$

Ответ: $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$.

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\frac{1-\cos x}{1+\sin x}, \quad y'=\frac{(1-\cos x)'(1+\sin x)-(1-\cos x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2},$$

$$y'=\frac{\sin x(1+\sin x)-(1-\cos x)\cos x}{(1+\sin x)^2}, \quad y'=\frac{\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2},$$

$$y'=\frac{\sin x-\cos x+1}{(1+\sin x)^2}.$$

Ответ: $y'=\frac{\sin x-\cos x+1}{(1+\sin x)^2}$.

Задание 4. Для исследования функции $f(x)=x^4-10x^2+9$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x)=4x^3-20x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3-20x=0, \quad x(4x^2-20)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=-\sqrt{5}, \quad x_3=\sqrt{5}.$$

На промежутке $(-\infty, -\sqrt{5})$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-\sqrt{5}, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, \sqrt{5})$ – отрицательные значения, на промежутке $(\sqrt{5}, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{5}$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{5}, 0) \cup (\sqrt{5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (0, \sqrt{5})$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-3, -1]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(-3)=81-90+9=0, \quad f(-\sqrt{5})=25-50+9=-16, \quad f(-1)=1-10+9=0.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[-3, -1]$ равно 0, наименьшее равно (-16) .

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-\sqrt{5}$ (точка минимума), $x_3=\sqrt{5}$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-\sqrt{5}, 0) \cup (\sqrt{5}, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (0, \sqrt{5})$, наибольшее значение функции на промежутке $[-3, -1]$ равно 0, наименьшее равно (-16) .