

Решение варианта №8

Задание 1. Нули функции $f(x) = \sin\left(\frac{7x}{11}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\sin\left(\frac{7x}{11}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{7x}{11}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{7x}{11} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учтём, что $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В итоге имеем:

$$t = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Значение $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ является табличным:

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{7x}{11} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{11\pi}{21} + \frac{11\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{7x}{11}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ указываем на то, что функция $\sin(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $\frac{\sqrt{3}}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = (-1)^{n+1} \frac{11\pi}{21} + \frac{11\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 7} (\cos(15x) \cos(14x) + \sin(15x) \sin(14x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 6x + 7$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 6x + 7 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2+6x+7=0 \quad , \quad x^2-6x-7=0 \quad .$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1=-1 \quad , \quad x_2=7 \quad .$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x+1)(x-7) \geq 0 \quad , \quad (x+1)(x-7) \leq 0 \quad .$$

Выражение $(x+1)(x-7)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-1, 7]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-1, 7]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для косинуса разности:

$$(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y))=\cos(x-y) \quad .$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+6x+7}\cos(15x-14x)=0 \quad , \quad \sqrt{-x^2+6x+7}\cos(x)=0 \quad .$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+6x+7}=0 \quad \text{и} \quad \cos(x)=0 \quad .$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1=-1 \quad , \quad x_2=7 \quad .$

Решением второго уравнения является серия корней: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad .$

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x=\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x_4=\frac{3\pi}{2} \quad .$$

Ответ: $x_1=-1 \quad , \quad x_2=7 \quad , \quad x_3=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x_4=\frac{3\pi}{2} \quad .$

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\sqrt{x}\cos^2 2x+tg^3(5x) \quad , \quad y'=(\sqrt{x}\cos^2 2x)'+(tg^3(5x))' \quad ,$$

$$y'=(\sqrt{x})'\cos^2 2x+\sqrt{x}(\cos^2 2x)'+3tg^2(5x)(tg(5x))' \quad ,$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2 2x+\sqrt{x}2\cos(2x)(-\sin(2x))2+3tg^2(5x)\frac{1}{\cos^2(5x)}5 \quad ,$$

$$y'=\frac{\cos^2 2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(4x)+\frac{15tg^2(5x)}{\cos^2(5x)} \quad , \quad y'=\frac{\cos^2 2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(4x)+\frac{15\sin^2(5x)}{\cos^4(5x)} \quad .$$

Ответ: $y'=\frac{\cos^2 2x}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\sin(4x)+\frac{15\sin^2(5x)}{\cos^4(5x)} \quad .$

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y=\sqrt[4]{1+\sin^2 11x} \quad , \quad y'=(\sqrt[4]{1+\sin^2 11x})' \quad ,$$

$$y'=\frac{1}{4}(1+\sin^2 11x)^{-\frac{3}{4}}(1+\sin^2 11x)' \quad , \quad y'=\frac{1}{4(1+\sin^2 6x)^{\frac{3}{4}}}2\sin(11x)\cos(11x)11 \quad .$$

Учитывая, что $2\sin(11x)\cos(11x)=\sin(22x)$, имеем: $y'=\frac{11\sin(22x)}{4(1+\sin^2 6x)^{\frac{3}{4}}} \quad .$

Ответ: $y'=\frac{11\sin(22x)}{4(1+\sin^2 6x)^{\frac{3}{4}}} \quad .$

Задание 4. Для исследования функции $f(x)=x^4-2x^2-8$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x)=4x^3-4x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3-4x=0, \quad x(x^2-1)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=1.$$

На промежутке $(-\infty, -1)$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $(-1, 0)$ – положительные значения, на промежутке $(0, 1)$ – отрицательные значения, на промежутке $(1, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-1$ (точка минимума), $x_3=1$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[-1, 2]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точки, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(-1)=1-2-8=-11, \quad f(2)=16-8-8=0, \quad f(0)=0-0-8=-8, \quad f(1)=1-2-8=-11.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[-1, 2]$ равно 0, наименьшее равно (-11) .

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=-1$ (точка минимума), $x_3=1$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, убывает на промежутке $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$., наибольшее значение функции на промежутке $[-1, 2]$ равно 0, наименьшее равно (-11) .