

Решение варианта №3

Задание 1. Нули функции $f(x) = \cos\left(\frac{9x}{11}\right) - \frac{1}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\cos\left(\frac{9x}{11}\right) - \frac{1}{2} = 0, \quad \cos\left(\frac{9x}{11}\right) = \frac{1}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{9x}{11} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ является табличным:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{9x}{11} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{11\pi}{27} + \frac{22\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \cos\left(\frac{9x}{11}\right) - \frac{1}{2}$ указываем на то, что функция $\cos(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $-\frac{1}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right], \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = \pm \frac{11\pi}{27} + \frac{22\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 11x + 12}(\sin(7x)\cos(6x) - \cos(7x)\sin(6x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 11x + 12$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 11x + 12 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 11x + 12 = 0, \quad x^2 - 11x - 12 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 12.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x+1)(x-12) \geq 0, \quad (x+1)(x-12) \leq 0.$$

Выражение $(x+1)(x-12)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-1, 12]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-1, 12]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для синуса разности:

$$(\sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)) = \sin(x - y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 11x + 12} \sin(7x - 6x) = 0, \quad \sqrt{-x^2 + 11x + 12} \sin x = 0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2 + 11x + 12} = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1 = -1$, $x_2 = 12$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = 0, \quad x_4 = \pi, \quad x_5 = 2\pi, \quad x_6 = 3\pi.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 12$, $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$, $x_6 = 3\pi$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt{x} \operatorname{tg} 2x, \quad y' = (\sqrt{x})' \operatorname{tg} 2x + \sqrt{x} (\operatorname{tg} 2x)',$$
$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{tg} 2x + \sqrt{x} \frac{1}{\cos^2 2x} 2, \quad y' = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Ответ: $y' = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{2}{\cos^2(2x)}.$

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 2x}, \quad y' = (\sqrt[4]{1 + \cos^2 2x})' = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 2x)^{-\frac{3}{4}} (1 + \cos^2 2x)',$$

$$y' = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 2x)^{-\frac{3}{4}} 4 \cos 2x, \quad y' = \frac{\cos 2x}{(1 + \cos^2 2x)^{\frac{3}{4}}}.$$

Ответ: $y' = \frac{\cos 2x}{(1 + \cos^2 2x)^{\frac{3}{4}}}.$

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = x - x^3$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$1 - 3x^2 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

На промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ – положительные значения, на промежутке $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$ – отрицательные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ (точка минимума), $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (точка максимума). Функция возрастает на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, убывает на промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[0, 3]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(0) = 0, \quad f(3) = 3 - 3^3 = -24, \\ f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Итак, наименьшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно (-24) , наибольшее равно $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ (точка минимума), $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (точка максимума), функция возрастает на промежутке $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, убывает на промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$, наибольшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, наименьшее равно (-24) .