

Решение варианта №5

Задание 1. Нули функции $f(x) = \sin\left(\frac{11x}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ – это такие значения аргумента x , при которых функция $f(x)$ принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента x составляем уравнение:

$$\sin\left(\frac{11x}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{11x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной x на переменную t следующим образом:

$$\frac{11x}{3} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной t записывается так:

$$\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной t :

$$t = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ является табличным:

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом для переменной t имеем:

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной x , имеем:

$$\frac{11x}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{11} + \frac{3\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции $f(x) = \sin\left(\frac{11x}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ указываем на то, что функция $\sin(t)$ является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток $[-1, 1]$. Для нахождения области значений функции $f(x)$ необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции $x = (-1)^n \frac{\pi}{11} + \frac{3\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$, область значений функции – $\left[\frac{-2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right]$.

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной x , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 8}(\cos(11x)\cos(10x) + \sin(11x)\sin(10x)) = 0.$$

Подкоренной выражение $-x^2 + 2x + 8$ должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 2x + 8 = 0, \quad x^2 - 2x - 8 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 4.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x+2)(x-4) \geq 0, \quad (x+2)(x-4) \leq 0.$$

Выражение $(x+2)(x-4)$ имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке $[-2, 4]$.

Поэтому областью допустимых значений переменной x является числовой промежуток $[-2, 4]$.

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для косинуса разности:

$$(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) = \cos(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}\cos(11x-10x)=0, \quad \sqrt{-x^2+2x+8}\cos(x)=0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}=0 \quad \text{и} \quad \cos(x)=0.$$

Решение первого уравнения было найдено: $x_1=-2$, $x_2=4$.

Решением второго уравнения является серия корней: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-\frac{\pi}{2}$, $x_4=\frac{\pi}{2}$.

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}, \quad y' = \frac{(\cos x)'(1+2\sin x) - \cos x(1+2\sin x)'}{(1+2\sin x)^2},$$

$$y' = \frac{-\sin x(1+2\sin x) - 2\cos x \cos x}{(1+2\sin x)^2}, \quad y' = \frac{-\sin x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(1+2\sin x)^2}, \quad y' = \frac{-\sin x - 2}{(1+2\sin x)^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{-\sin x - 2}{(1+2\sin x)^2}$.

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$y = \sqrt{4x + \sin 4x} + x^2 \cos x, \quad y' = (\sqrt{4x + \sin 4x})' + (x^2 \cos x)',$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4x + \sin 4x}}(4x + \sin 4x)' + (x^2)' \cos x + x^2(\cos x)',$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4x + \sin 4x}}(4 + 4\cos 4x) + 2x \cos x - x^2 \sin x,$$

$$y' = \frac{2 + 2\cos 4x}{\sqrt{4x + \sin 4x}} + 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Ответ: $y' = \frac{2 + 2\cos 4x}{\sqrt{4x + \sin 4x}} + 2x \cos x - x^2 \sin x$.

Задание 4. Для исследования функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной x , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$3x^2 - 6x = 0, \quad x(x-2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

На промежутке $(-\infty, 0)$ производная функции принимает положительные значения, на промежутке $(0, 2)$ – отрицательные значения, на промежутке $(2, \infty)$ – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=2$ (точка минимума). Функция возрастает на промежутке $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, убывает на промежутке $(0, 2)$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке $[0, 3]$ либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точки, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(3)=27-27+5=5, \quad f(0)=0-0+5=5, \quad f(2)=8-12+5=1.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно 5, наименьшее равно 1.

Ответ: Экстремумами функции являются: $x_1=0$ (точка максимума), $x_2=2$ (точка минимума), функция возрастает на промежутке $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, убывает на промежутке $(0, 2)$, наибольшее значение функции на промежутке $[0, 3]$ равно 5, наименьшее равно 1.