

## Решение варианта №10

Задание 1. Нули функции  $f(x) = \cos\left(\frac{7x}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$  – это такие значения аргумента  $x$ , при которых функция  $f(x)$  принимает нулевое значение. Поэтому для нахождения таких значений аргумента  $x$  составляем уравнение:

$$\cos\left(\frac{7x}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \cos\left(\frac{7x}{13}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее делаем замену переменной  $x$  на переменную  $t$  следующим образом:

$$\frac{7x}{13} = t.$$

Уравнение для нахождения нулей функции для новой переменной  $t$  записывается так:

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из данного уравнения находим значение переменной  $t$ :

$$t = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учтём, что  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Значение  $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  является табличным:

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом для переменной  $t$  имеем:

$$t = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , имеем:

$$\frac{7x}{13} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{39\pi}{28} + \frac{26\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для нахождения области значений функции  $f(x) = \cos\left(\frac{7x}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$  указываем на то, что функция  $\cos(t)$  является ограниченной, её область значений – это числовой промежуток  $[-1, 1]$ . Для нахождения области значений функции  $f(x)$  необходимо сдвинуть указанный числовой промежуток на  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , таким образом, имеем числовой промежуток:

$$\left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad \left[\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: Нули функции  $x = \pm \frac{39\pi}{28} + \frac{26\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$ , область значений функции –  $\left[\frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right]$ .

Задание 2. Найдём область допустимых значений переменной  $x$ , входящей в исходное уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 40}(\sin(9x)\cos(8x) - \cos(9x)\sin(8x)) = 0.$$

Подкоренной выражение  $-x^2 + 6x + 40$  должно быть не меньше нуля:

$$-x^2 + 6x + 40 \geq 0.$$

Для решения указанного неравенства находим корни уравнения:

$$-x^2 + 6x + 40 = 0, \quad x^2 - 6x - 40 = 0.$$

По теореме Виета подбираем корни:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 10.$$

Учитывая найденные корни, рассматриваемое неравенство запишем следующим образом:

$$-(x-10)(x+4) \geq 0, \quad (x-10)(x+4) \leq 0.$$

Выражение  $(x-10)(x+4)$  имеет значение меньше или равно нулю на числовом промежутке  $[-4, 10]$ .

Поэтому областью допустимых значений переменной  $x$  является числовой промежуток  $[-4, 10]$ .

Исходное уравнение преобразуем с помощью формулы для синуса разности:

$$(\sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)) = \sin(x-y).$$

После преобразования имеем уравнение:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 40} \sin(9x - 8x) = 0, \quad \sqrt{-x^2 + 6x + 40} \sin(x) = 0.$$

Произведение множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому решение данного уравнения разбивается на 2 случая:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 40} = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0.$$

Решение первого уравнения было найдено:  $x_1 = -4, \quad x_2 = 10$ .

Решением второго уравнения является серия корней:  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Первые 2 корня входят в область допустимых значений переменной, при этом в неё входят не все корни из указанной серии. Запишем указанную серию корней в явном виде:

$$x = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$$

В область допустимых значений переменной из указанной серии входят только следующие корни:

$$x_3 = -\pi, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \pi, \quad x_6 = 2\pi, \quad x_7 = 3\pi.$$

Ответ:  $x_1 = -4, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = -\pi, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \pi, \quad x_6 = 2\pi, \quad x_7 = 3\pi$ .

Задание 3а. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4 \cos x}{8 - 15 \sin x}, \quad y' = 4 \frac{(\cos x)'(8 - 15 \sin x) - (\cos x)(8 - 15 \sin x)'}{(8 - 15 \sin x)^2}, \\ y' &= 4 \frac{-\sin x(8 - 15 \sin x) - (\cos x)(-15 \cos x)}{(8 - 15 \sin x)^2}, \quad y' = 4 \frac{-8 \sin x + 15 \sin^2 x + 15 \cos^2 x}{(8 - 15 \sin x)^2}, \\ y' &= 4 \frac{-8 \sin x + 15}{(8 - 15 \sin x)^2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $y' = 4 \frac{-8 \sin x + 15}{(8 - 15 \sin x)^2}$ .

Задание 3б. Производную функции находим следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{7x + \cos 3x} + x^2 \operatorname{tg}(3x), \quad y' = (\sqrt{7x + \cos 3x})' + (x^2 \operatorname{tg}(3x))', \\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{7x + \cos 3x}} (7x + \cos 3x)' + (x^2)' \operatorname{tg}(3x) + x^2 (\operatorname{tg}(3x))', \\ y' &= \frac{(7 - 3 \sin 3x)}{2\sqrt{7x + \cos 3x}} + 2x \operatorname{tg}(3x) + x^2 \frac{3}{\cos^2(3x)}, \\ y' &= \frac{7 - 3 \sin 3x}{2\sqrt{7x + \cos 3x}} + 2x \operatorname{tg}(3x) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $y' = \frac{7 - 3 \sin 3x}{2\sqrt{7x + \cos 3x}} + 2x \operatorname{tg}(3x) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x)}$ .

Задание 4. Для исследования функции  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 11$  на монотонность и экстремумы найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2.$$

Производная функции существует при всех значениях переменной  $x$ , поэтому критических точек нет. Найдём стационарные точки:

$$4x^3 - 6x = 0, \quad x(4x^2 - 6) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{1,5}, \quad x_3 = \sqrt{1,5}.$$

На промежутке  $(-\infty, -\sqrt{1,5})$  производная функции принимает отрицательные значения, на промежутке  $(-\sqrt{1,5}, 0)$  – положительные значения, на промежутке  $(0, \sqrt{1,5})$  – отрицательные значения, на промежутке  $(\sqrt{1,5}, \infty)$  – положительные значения.

Поэтому экстремумами функции являются:  $x_1 = 0$  (точка максимума),  $x_2 = -\sqrt{1,5}$  (точка минимума),  $x_3 = \sqrt{1,5}$  (точка минимума). Функция возрастает на промежутке  $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$ , убывает на промежутке  $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$ .

Функция  $f(x)$  принимает наибольшие или наименьшие значения на промежутке  $[-3, 0]$  либо в граничных точках промежутка, либо в стационарные точках, попадающих в промежуток. Найдём значение функции в этих точках:

$$f(0) = 0 - 0 - 11 = -11, \quad f(-3) = 81 - 27 - 11 = 43, \\ f(-\sqrt{1,5}) = 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 - 11 = 2,25 - 4,5 - 11 = -13,25.$$

Итак, наибольшее значение функции на промежутке  $[-3, 0]$  равно 43, наименьшее равно  $(-13,25)$ .

Ответ: Экстремумами функции являются:  $x_1 = 0$  (точка максимума),  $x_2 = -\sqrt{1,5}$  (точка минимума),  $x_3 = \sqrt{1,5}$  (точка минимума), функция возрастает на промежутке  $(-\sqrt{1,5}, 0) \cup (\sqrt{1,5}, \infty)$ , убывает на промежутке  $(-\infty, -\sqrt{1,5}) \cup (0, \sqrt{1,5})$ , наибольшее значение функции на промежутке  $[-3, 0]$  равно 43, наименьшее равно  $(-13,25)$ .