**Урок**

**Определение числовой последовательности и способы её задания.**

**Цель урока:** учащиеся должны знать, что такое числовая последовательность; способы задания числовой последовательности; уметь различать различные способы задания числовых последовательностей.

**Дидактические материалы:** иллюстрационные таблицы, опорные конспекты.

**Технические средства обучения:** презентация по теме «Числовые последовательности».

**Ход урока.**

**1.Организационный момент.**

**2.Постановка целей урока.**

Что такое последовательность?

Какие виды последовательностей вы знаете?

Как задаётся числовая последовательность?

**3.Работа над изучаемым материалом.**

**3.1. Объяснение нового материала.**

Анализируя ответы учащихся, дать определение числовой последовательности и показать способы задания числовых последовательностей.

***Определение 1.***Функцию y = f(x), xN называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: y = f(n) или y1, y2, y3, ..., yn, ... или (yn).

В данном случае независимая переменная – натуральное число.

***Способы задания числовой последовательности.***

*Словесный способ.*

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

*Пример 1.* Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, .... .

*Пример 2.* Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ... .

*Пример 3.* Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... .

*Аналитический способ.*

Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

*Пример 1.* Последовательность чётных чисел: y = 2n.

*Пример 2.* Последовательность квадрата натуральных чисел: y = n2;

1, 4, 9, 16, 25, ..., n2, ... .

*Пример 3.* Стационарная последовательность: y = C;

C, C, C, ..., C, ... .

Частный случай: y = 5; 5, 5, 5, ..., 5, ... .

*Пример 4*. Последовательность y = 2n;

2, 22, 23, 24, ..., 2n, ... .

*Рекуррентный способ.*

Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.

*Пример 1****.*** Арифметическая прогрессия: a1=a, an+1=an+d, где a и d – заданные числа, d - разность арифметической прогрессии. Пусть a1=5, d=0,7, тогда арифметическая прогрессия будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .

*Пример 2.* Геометрическая прогрессия: b1= b, bn+1= bn q, где b и q – заданные числа, b 0, q0; q – знаменатель геометрической прогрессии. Пусть b1=23, q=½, тогда геометрическая прогрессия будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .

*Пример 3.* Последовательность Фибоначчи. Эта последовательность легко задаётся рекуррентно: y1=1, y2=1, yn-2+yn-1, если n=3, 4, 5, 6, ... . Она будет иметь вид:

1, 1,2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... .

Аналитически последовательность Фибоначчи задать трудно, но возможно. Формула, по которой определяется любой элемент этой последовательности, выглядит так:

**3.2. Закрепление нового материала. Решение задач.**

Для закрепления знаний выбираются примеры в зависимости от уровня подготовки учащихся.

*Пример 1.* Составить возможную формулу n-го элемента последовательности (yn):

а) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...;

б) 4, 8, 12, 16, 20, ...;

*Решение.*

а) Это последовательность нечётных чисел. Аналитически эту последовательность можно задать формулой y = 2n+1.

б) Это числовая последовательность, у которой последующий элемент больше предыдущего на 4. Аналитически эту последовательность можно задать формулой y = 4n.

*Пример 2*. Выписать первые десять элементов последовательности, заданной рекуррентно: y1=1, y2=2, yn = yn-2+yn-1, если n = 3, 4, 5, 6, ... .

*Решение.*

Каждый последующий элемент этой последовательности равен сумме двух предыдущих элементов.

y1=1;

y2=2;

y3=1+2=3;

y4=2+3=5;

y5=3+5=8;

y6=5+8=13;

y7=8+13=21;

y8=13+21=34;

y9=21+34=55;

y10=34+55=89.

*Пример 3.* Последовательность (yn) задана рекуррентно: y1=1, y2=2, yn= 5 yn-1- 6yn-2. Задать эту последовательность аналитически.

*Решение.*

Найдём несколько первых элементов последовательности.

y1=1;

y2=2;

y3=5y2-6y1=10-6=4;

y4=5y3-6y2=20-12=8;

y5=5y4-6y3=40-24=16;

y6=5y5-6y4=80-48=32;

y7=5y6-6y5=160-96=64.

Получаем последовательность: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; ..., которую можно представить в виде

20; 21; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26 ... .

n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7... .

Анализируя последовательность, получаем следующую закономерность: y = 2n-1.

*Пример 4.* Дана последовательность yn=24n+36-5n2.

а) Сколько в ней положительных членов?

б) Найти наибольший элемент последовательности.

в) Есть в данной последовательности наименьший элемент?

Решение.

Данная числовая последовательность – это функция вида y = -5x2 +24x+36, где x

а) Найдём значения функции, при которых -5x2 +24x+36>0. Решим уравнение -5x2 +24x+36=0.

D = b2-4ac=1296, X1=6, X2=-1,2.

Уравнение оси симметрии параболы y = -5x2 +24x+36 можно найти по формуле x=, получим: x=2,4.

- + -

-1,2 6

Неравенство -5x2 +24x+36>0 выполняется при -1,2 В этом интервале находится пять натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5). Значит в заданной последовательности пять положительных элементов последовательности.

б) Наибольший элемент последовательности определяется методом подбора и он равен y2=64.

в) Наименьшего элемента нет.

**Задания для самостоятельной работы по теме:**

**Вариант 1.**

**1.** Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (yn), если последовательность имеет вид: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... .

**2.** Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: y1=1, y2=3, yn=yn-2+yn-1.

**3.** Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,4 и разностью 0,9.

**4.** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 3,5 и знаменателем -

**5**. В арифметической прогрессии a5= -150, a6= -147. Найдите номер первого положительного элемента этой последовательности.

**6**. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ... .

**7.** Дана последовательность yn=12n + 8 - 2,5n2.

а) Сколько в ней положительных элементов?

б) Найти наибольший элемент последовательности.

в) Есть в данной последовательности наименьший элемент?

**Вариант 2.**

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (yn), если последовательность имеет вид: 7, 11, 15, 19, 23, ... .
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: y1=0, y2=1, yn=2yn-2+yn-1.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,5 и разностью 0,8.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 4,5 и знаменателем -
5. В арифметической прогрессии a6= 160, a6= 156. Найдите номер первого отрицательного элемента этой последовательности.

6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии

-15,1; -14,4; ... .

7. Дана последовательность yn=12n + 8 - 2,5n2.

а) Сколько в ней положительных элементов?

б) Найти наибольший элемент последовательности.

в) Есть в данной последовательности наименьший элемент?

**Вариант 3.**

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (yn), если последовательность имеет вид: , , ... .
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: y1=1, y2=1, yn=2yn-2+yn-1.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 2,5 и разностью 0,7.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 7,5 и знаменателем -
5. В арифметической прогрессии a6= 150, a6= 141. Найдите номер первого отрицательного элемента этой последовательности.

6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии

-14,1; -13,4; ... .

7. Дана последовательность yn=12n + 8 - 2,5n2.

а) Сколько в ней положительных элементов?

б) Найти наибольший элемент последовательности.

В) Есть в данной последовательности наименьший элемент?

**Вариант 4.**

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (yn), если последовательность имеет вид: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... .
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: y1=2, y2=1, yn=yn-2+yn-1.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 2,5 и разностью 0,7.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 2,5 и знаменателем -
5. В арифметической прогрессии a5= -145, a6= -130. Найдите номер первого положительного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии 17,3; 15,4... .

7. Дана последовательность yn=-2n -3 - n2.

а) Сколько в ней положительных элементов?

б) Найти наибольший элемент последовательности.

в) Есть в данной последовательности наименьший элемент?

***Домашнее задание:***

**Урок**

**Свойства числовых последовательностей.**

**Цель урока:** учащиеся должны знать основные свойства числовых последовательностей; уметь определять некоторые из них.

**Дидактический материал:** карточки с заданиями для индивидуальной работы учащихся.

**Технические средства обучения:** презентация «Числовая последовательность»

**Ход урока.**

**1.Организационный момент.**

**2.Проверка домашнего задания и постановка целей урока.**

**2.1.Устный, фронтальный опрос.**

1. Что такое числовая последовательность? (Вывод: это частный случай числовой функции).

2. Какие способы задания числовой последовательности существуют?

3. Что собой представляет словесный способ задания числовой последовательности? Приведите примеры.

4.Что собой представляет аналитический способ задания числовой последовательности? Приведите примеры.

5. Что собой представляет рекуррентный способ задания числовой последовательности? Приведите примеры.

*Вывод:* числовая функция обладает всеми свойствами функции.

**3. Работа над изучаемым материалом.**

**3.1. Объяснение нового материала.**

*Определение 1. Последовательностей (yn) называют ограниченной сверху, если существует такое число М, что для любого n N выполняется неравенство М*.

*Определение 2*. *Последовательность (уn)называют ограниченной снизу, если существует такое число m, что для любого n .*

*Если последовательность ограничена cверху и снизу, то ее называют* ***ограниченной последовательностью.***

*Пример 1.*

Дана числовая последовательность: 1, Определите, является ли она ограниченной?

*Решение.* Максимальное значение, которое может принимать эта числовая последовательность это 1; а минимальное – 0. Значит эта числовая последовательность ограниченная.

*Определение 3.Последовательность (yn) называют возрастающей, если каждый её элемент (кроме первого) больше предыдущего:*

*Пример 2.* Возрастающая последовательность 2, 4, 6, 8, 10, ... .

. *.*Последовательность (yn) называют убывающей, если каждый её элемент (кроме первого) меньше предыдущего:

*Пример 3.*

Исследовать на ограниченность последовательность

yn=+

*Решение.*

y1=, y2= y3= и т.д. Эта последовательность ограничена снизу. Наименьший элемент - этой последовательности y1=.

*Ответ: последовательность ограничена снизу.*

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином –монотонные последовательности. Например, 1, 4, 9, 16, 25, ...,n2 , ... и 1, ...-многоточие последовательности, а последовательность 1,-, -, ...,(-1)n-1

Если функция y = f(x) возрастает (убывает) на луче , то последовательность yn = f(n) – возрастающая (убывающая).

*Пример 4.* Исследовать на монотонность последовательность yn=.

*Решение.*

Выпишем n-й и (n+1)-й члены последовательности: yn= , yn+1= . Найдём их разность

yn+1 - yn = - = Для любых значений n yn+1 – yn , значит последовательность убывает.

**3.2. Закрепление нового материала. Решение задач по данной теме по индивидуальным карточкам.**

**4. Обсуждение домашнего задания.**

**Урок**

**Сходящиеся последовательности. Предел последовательности.**

**Цель урока:** учащиеся должны знать, что собой представляет сходящаяся последовательность, какими свойствами она обладает, что такое предел последовательности.

**Дидактический материал:** карточки с индивидуальными заданиями для самостоятельной работы.

**Технические средства обучения**: презентация «Числовые последовательности.

**Ход урока.**

1. **Организационный момент.**
2. **Проверка домашнего задания и постановка целей урока.**
   1. **Устный опрос.**
3. Что такое числовая последовательность?
4. Какими свойствами обладает числовая последовательность?
5. Когда последовательность бывает ограниченна сверху? когда снизу?
6. Что такое монотонная последовательность?
7. **Работа над изучаемым материалом.**
   1. **Объяснение нового материала.**

Рассмотрим две числовые последовательности - (yn), (xn).

(xn): 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...;

(yn): 1, ... , ... .

xn

0 1 3 5 7 9 11

yn

0

Члены последовательности(yn) сгущаются около точки 0 - говорят, что эта последовательность *сходится* к точке 0. У последовательности (xn) такой точки сгущения нет – эта последовательность *расходится*.

Сходящаяся последовательность имеет предел.

*Определение*. *Число b называют пределом последовательности (yn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

В математике это обозначается так: yn b или так: .

*Пример 1.* Найти предел последовательности ,

*Решение.* Последовательность сходится к 0.

или = 0.

*,*

***Свойства сходящихся последовательностей.***

*Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

*Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.*

*Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейештрасса).*

* 1. **Закрепление нового материала. Решение задач по индивидуальным заданиям. Карточки с заданиями прилагаются.**

1. **Обсуждение домашнего задания.**

**Урок**

**Вычисление пределов последовательности.**

**Цель урока**: учащиеся должны знать способы вычисления пределов и уметь вычислять пределы простейших числовых последовательностей.

**Дидактический материал:** карточки с индивидуальными заданиями.

**Технические средства обучения:** презентация по теме: «Числовая последовательность»

**Ход урока.**

1. **Организационный момент.**
2. **Проверка домашнего задания и постановка целей урока.**

**2.1. Устный опрос.**

1) Что такое числовая последовательность?

2) Какими свойствами обладает числовая последовательность?

3) Что собой представляют сходящаяся и расходящаяся последовательности?

4) Какая числовая последовательность имеет предел?

5) Какими свойствами обладает сходящаяся последовательность?

6) Пределы каких простейших последовательностей вы знаете?

**3. Работа над изучаемым материалом.**

**3.1. Объяснение нового материала.**

Вычисление пределов последовательности.

***Теорема*.** *Если то*

*предел суммы равен сумме пределов:*

*предел произведения равен произведению пределов:*

*предел частного равен частному пределов:*

*постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

Рассматриваются примеры в которых необходимо вычислить пределы некоторых числовых функций. Решаются примеры с помощью учеников.

*Пример 1.*

Найти предел последовательности:

а) ; б) ;

в)

*Решение.*

а) Представим: = \* . =

б)

в)

г) =3.

*Пример 2.*

Найти предел последовательности

*Решение.*

Выполним преобразования данного выражения:

*Пример 3.*

Вычислить .

*Решение.*

Разделим почленно - и числитель, и знаменатель на наивысшую из имеющихся степень переменной n.

=

**3.2. Решение задач.**

В зависимости от уровня подготовки учащимся предлагается выполнить задания. Карточки с заданиями прилагаются.

**Вариант 1.**

1. Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**Вариант 2.**

Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**Вариант 3.**

1.Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**Вариант 4.**

1.Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**Вариант 5.**

1Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**Вариант 6.**

1.Найдите предел последовательности:

а) б)

в) ; г)

2. Вычислите пределы последовательностей:

а) б)

в) г)

**4.Обсуждение домашнего задания.**

**Урок**

**Предел функции.**

**Цель урока:** учащиеся должны знать, что такое предел функции и уметь вычислять пределы некоторых простейших функций.

**Дидактический материал:** карточки с индивидуальными заданиями.

**Технические средства обучения:** презентация по теме: «Числовая последовательность»

**Ход урока.**

1. **Организационный момент.**
2. **Проверка домашнего задания и постановка целей урока.**

**2.1. Устный опрос**.

1) Какими свойствами обладает числовая последовательность?

2) Что собой представляют сходящаяся и расходящаяся последовательности?

3) Какая числовая последовательность имеет предел?

4) Какими свойствами обладает сходящаяся последовательность?

5) Что такое числовая функция?

*Числовая последовательность* – это функция от натурального аргумента. Если сходящаяся числовая последовательность имеет предел, то имеет ли предел функция? Какие условия при этом должны соблюдаться?

**3. Работа над изучаемым материалом.**

**3.1. Объяснение нового материала.**

*Предел функции на бесконечности.*

Пусть существует функция y=f(x) и пусть она определена на луче , и пусть она сходится к точке b .

Если же эта функция определена и на луче , т.е. , то говорят, что она имеет предел на бесконечности и выражения (1) и (2) можно объединить в одно: .

Вычисление предела функции на бесконечности выполняется по тем же правилам, что и вычисление предела числовой последовательности. Вот эти правила:

Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

*Если ,, то:*

*а) предел суммы равен сумме пределов:*

*б) предел произведения равен произведению пределов:*

*в) предел частного равен частному предела (при условии c):*

*г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

**3.2. Закрепление нового материала. Решение задач на вычисление пределов.**

*Пример 1.*

Вычислить предел функции:

а) б)

в) г)

д)

*Решение.*

а) =5

б) =0+0=0

в) = =0-0=0

г) = + =0+0=0

д) =

**ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕМЕ:**

**«ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И СПОСОБЫ ЕЁ ЗАДАНИЯ».**

***Определение 1.*** *Функцию y = f(x), xN называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: y = f(n) или y1, y2, y3, ..., yn, ... или (yn).*

*В данном случае независимая переменная – натуральное число.*

***Способы задания числовой последовательности:***

1. ***Словесный способ.***

***Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами******последовательности нет.***

*Пример 1.* Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, .... .

*Пример 2.* Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ... .

*Пример 3.* Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... .

1. ***Аналитический способ.***

***Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы*.**

*Пример 1.* Последовательность чётных чисел: y = 2n.

*Пример 2.* Последовательность квадрата натуральных чисел: y = n2;

1, 4, 9, 16, 25, ..., n2, ... .

*Пример 3.* Стационарная последовательность: y = C;

C, C, C, ..., C, ... .

Частный случай: y = 5; 5, 5, 5, ..., 5, ... .

*Пример 4*. Последовательность y = 2n;

2, 22, 23, 24, ..., 2n, ... .

1. ***Рекуррентный способ.***

***Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.***

*Пример 1.* Арифметическая прогрессия: a1=a, an+1=an+d, где a и d – заданные числа, d - разность арифметической прогрессии. Пусть a1=5, d=0,7, тогда арифметическая прогрессия будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .

*Пример 2.* Геометрическая прогрессия: b1= b, bn+1= bn q, где b и q – заданные числа, b 0, q0; q – знаменатель геометрической прогрессии. Пусть b1=23, q=½, тогда геометрическая прогрессия будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .

**ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕМЕ: «СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».**

***Определение 1.*** *Последовательностей (yn) называют ограниченной сверху, если существует такое число М, что для любого n N выполняется неравенство М*.

***Определение 2*.** *Последовательность (уn)называют ограниченной снизу, если существует такое число m, что для любого n .*

*Если последовательность ограничена cверху и снизу, то ее называют* ***ограниченной последовательностью.***

***Определение 3****.Последовательность (yn) называют возрастающей, если каждый её элемент (кроме первого) больше предыдущего:*

**ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕМЕ: «СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»**

***Определение*.** *Число b называют пределом последовательности (yn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

В математике это обозначается так: yn b или так: .

***Свойства сходящихся последовательностей:***

*Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

*Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.*

*Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейештрасса).*

**ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕМЕ: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».**

***Теорема***

*Если то*

***предел суммы*** *равен сумме пределов:*

***предел произведения*** *равен произведению пределов:*

***предел частного*** *равен частному пределов:*

***постоянный множитель*** *можно вынести за знак предела:*