**Задачи, приводящие к понятию производной.**

**1) Задача о касательной к данной кривой.**

Пусть на плоскости xOy задана кривая уравнением ***y = f(x)***. Требуется провести касательную к данной кривой в точке **М0(x0; f(x0)).** Так как точка касания **М0**данa, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, то есть ***tg φ*** - тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ох (обозначается ***k***).

Через точки **М0(x0; f(x0))** и **М1(x0 + ∆x; f(x0 +∆x))** проведём секущую **М0М1**. Из рисунка видно, что угловой коэффициент ***tg α*** секущей **М0М1** равен отношению  (обозначим ***k1)***, где ***∆y = f(x0 + ∆x) – f(x0).***

х0 х0 + ∆х

∆х

М0

М1

Т

f(x0)

f(x0+∆x)

Угловой коэффициент касательной **М0Т** к данной кривой в точке **М0** может быть найден так: ***tg α → tg φ (k1 → k)*** то есть  → k при ***∆x → 0*** (при ***∆x → 0*** секущая будет поворачиваться и стремиться к касательной, а затем и «сольётся» с касательной).

**2) Задача о скорости движущейся точки.**

Пусть ***S = S(t)*** представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Обозначим через ***∆S*** путь, пройденный точкой за промежуток времени ***∆t*** от момента ***t***  до ***t + ∆t***, то есть ***∆S = S(t + ∆t) – S(t)***

Отношение  называется средней скоростью точки за время от ***t*** до ***t + ∆t*** (обозначается ***vср.*** ).

Чем меньше ***∆t***, то есть чем короче промежуток времени от ***t*** до ***t + ∆t***, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени ***t***. Такая скорость в данный момент ***t*** называется мгновенной скоростью точки и обозначается ***vмгн***

Итак ***vср → vмгн*** при ***∆t*** → 0 то есть

→ ***vмгн*** при***∆t*** → 0.

**3) Задача о скорости химической реакции.**

Пусть дана функция ***m = m(t)***, где ***m*** - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени ***t.*** Отношение  - средняя скорость химической реакции за промежуток времени ***∆t***. Нам интересна скорость химической реакции в данный момент времени ***t***.

 → ***vмгн***  при ***∆t*** → 0.

**4) Задача о скорости роста популяции.**

Пусть ***p = p(t)*** - размер популяции бактерий в момент ***t***. Тогда  → ***vмгн***  при ***∆t*** → 0,

где ***vмгн*** - скорость роста популяции в данный момент ***t***.

**5) Задача о производительности труда.**

Пусть к моменту времени ***t*** часов рабочий произвёл ***F = F(t)*** единиц продукции (выработка составил ***F(t)*** единиц). Приращение выпуска продукции ***∆F*** за время ***∆t*** равно числу единиц продукции, выпущенной за время ***∆t***, то есть

***∆F = F(t + ∆t) – F(t)***. Отношение  называется средней производительностью труда рабочего за время от ***t*** до ***t + ∆t***. Число, к которому стремится отношение  при ***∆t → 0*** называется производительностью труда рабочего в момент времени ***t***.

***Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше задач одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших её конкретных вопросов.***

Пусть функция ***y = f(x)*** определена на промежутке ***(a;b)***. Возьмём какое – нибудь значение ***x0*** из ***(a;b)***. Затем возьмём новое значение аргумента ***x0 + ∆x*** из этого промежутка, придав первоначальному значению ***x0*** приращение ***∆x*** (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции ***f(x0 + ∆x)***, где ***∆f = f(x0 + ∆x) – f(x)***. Теперь составим отношение . Оно является функцией от***∆x***.

Число, к которому стремится отношение  при ***∆x*** стремящемся к нулю, называется ***скоростью изменения функции*** в точке ***х0***  или производной функции в точке ***х0***.

**Определение**: **Производной функции *f* в точке х0, называется число, к которому стремится разностное отношение**  **при *∆x*, стремящемся к нулю.**

Производная функции ***f*** в точке ***х0*** обозначается ***f (x0).***

Действие нахождения производной функции называется ***дифференцированием***, а функция, имеющая производную в точке ***х0***, дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала, называется дифференцируемой на этом интервале.

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует несколько выводов.

***Скорость прямолинейного движения есть производная пути S = S(t) по времени t, то есть v = S. В этом состоит механический смысл производной.***

Понятие производной позволяет определить не только мгновенную скорость прямолинейного движения, но и мгновенную скорость протекания других физических процессов.

***Скорость химической реакции есть производная количества вещества m = m(t) по времени t, то есть v = m.***

***Скорость роста популяции есть производная размера популяции p = p(t) по времени t, то есть v = p.***

***Скорость роста численности населения есть производная от количества населения A = A(t) по времени t, т. е . v = A(t).***

***Сила переменного тока есть производная количества электричества q = q(t) по времени t, то есть I = q.***

***Угловой коэффициент касательной к кривой y = f(x) в точке с абсциссой х0 есть производная f (x0). В этом состоит геометрический смысл производной.***

***Производительность труда f(t) есть производная от выработки продукции F(t) по времени t, то есть f(t) = F (t).***

***Производная – скорость изменения функции.***