**Задания для организации исследовательской деятельности**

**учащихся 7 – 8 классов при изучении уравнений с параметром**

В предлагаемом наборе заданий выделены пять блоков; четыре из них содержат задания, которые используются с целью организации исследовательской деятельности учащихся при изучении способов решения линейных (блоки 2 и 3), квадратных (блок 4) и дробно-рациональных (блок 5) уравнений с параметром.

Задания первого блока выполняют функцию «введения» в тему «Уравнения с параметром». Основная их цель – подготовка учащихся к введению понятия «уравнение с параметром».

Приведу описание каждого блока, предварив серии входящих в блок заданий указанием базовых (для основной части заданий блока) значит, а завершу – комментариями к отдельным заданиям и группам заданий, входящих в блок.

**Блок 1 «Вводящий»**

Этот блок содержит задания, которые предлагаются до введения понятия «уравнение с параметром».

*Базовые знания:*

- понятие натурального (целого, рационального) числа;

- понятие уравнения с одним неизвестным и решения (корня) уравнения с одним неизвестным;

- способ решения линейного уравнения с одним неизвестным и свойства уравнений, лежащие в основе этого способа.

*Задания*

**1.** Даны две группы уравнений:

1) , 2) ,

, ,

, ,

 и т.д.  и т.д.

а) Что общего между уравнениями каждой группы? Чем отличаются все уравнения первой (второй) группы?

б) Запишите ещё по два уравнения, относящихся к каждой группе.

в) Сколько таких уравнений можно составить?

г) Укажите общий вид уравнений каждой группы.

д) Верно ли, что уравнения первой группы можно представить в общем виде так: , где - произвольное число, а уравнения второй группы – в виде , где - произвольное число?

е) Верно ли, что уравнения обеих групп имеют вид , где , - произвольные числа?

**2.** При каких значениях  следующие уравнения имеют нулевое решение:

1) ,

2) .

Найдите решения уравнений при , .

**3.** Сколько решений имеет уравнение при ? ? ?

1) ,

2) .

После того, как будут выполнены эти задания, вводим понятие «уравнение с параметром». При этом, во-первых, обращаем внимание, что в (1) задании уравнения первой группы можно записать следующим образом: , а уравнения второй группы: , где , могут принимать любые значения.

Такие уравнения называются уравнениями с параметром.

В приведённых уравнениях - неизвестное, а  и - параметры.

Во-вторых, подчёркиваем, что в заданиях (2), (3) рассматривались уравнения с параметром . Мы убедились, что эти уравнения могут иметь решения, а могут и не иметь решений при некоторых значениях параметра. Далее предлагаем учащимся привести примеры уравнений и конкретных значений , соответствующих выделенным ситуациям. При этом уравнения при определённых значениях параметра могут иметь как одно решение, так и бесконечно много решений.

Если нас просят для каждого значения параметра найти соответствующее ему значение неизвестного, то в этом случае говорят о том, что нужно решить уравнение с параметром.

В-третьих, особый акцент делаем на том, что, задавая уравнение с параметром, мы должны обязательно указать, какие буквы в записи уравнения обозначают параметры, а какие – неизвестные, относительно которых и требуется решать данное уравнение.

**Блок 2 «Линейные уравнения с параметром»**

*Базовые знания:*

- базовые знания, перечисленные в блоке 1;

- формулы сокращённого умножения;

- понятие уравнения с параметром и решения уравнения с параметром.

*Задания*

**1.** Верно ли, что 2 – решение уравнения (- неизвестное,  и - параметры):

1) ,

2) ,

3) .

а) Что требуется установить, чтобы ответить на поставленный вопрос?

б) Задать такие значения  () так, чтобы число 2 было решением уравнения (не являлось решением уравнения).

в) Задать такие значения , , чтобы уравнение (3) имело бесконечно много решений. Верно ли, что при указанных Вами значениях  и решением уравнения (3) является любое рациональное число?

г) Можно ли задать такие значения ( ), чтобы уравнения (1), (2) не имели решений? Имели бесконечно много решений? Почему?

**2.** Даны уравнения:

1) ,

2) ,

3) .

Указать такие значения параметров , , чтобы уравнение:

а) не имело решений;

б) имело ровно одно решение;

в) имело бесконечно много решений;

г) имело ровно два решения.

**3.** Дано уравнение  (- неизвестное, - параметр).

а) Найти все натуральные значения параметра такие, что решение уравнения – натуральное число.

б) Верно ли утверждение: если - целое число, то данное уравнение с параметром  всегда имеет решение?

**4.** Даны уравнения:

1) ,

2) ,

3) .

а) Есть ли отличия в рассуждениях, которые мы проводим при решении этих уравнений? Если есть, то в чём они состоят?

б) Каким должен быть коэффициент при неизвестном в уравнении  (, - параметры), чтобы уравнение всегда имело ровно одно решение?

в) Охарактеризовать все значения параметров  и , при которых:

1) уравнение  не имеет решений,

2) решением уравнения  является любое рациональное число.

**5.** Заполнить таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| , где ,  - любые рациональные числа | | |
| нет решений,  если …  … | одно решение,  если …  … | решением является любое число,  если …  … |
| Пример: | Пример: | Пример: |

Верно ли, что данные этой таблицы отражают особенности работы с любым линейным уравнением с одним неизвестным?

**6.** Решить уравнение:

1)  относительно ,

2)  относительно .

**7.** 1) Решить уравнения:

а)  относительно ,

б)  относительно .

2) Зафиксируйте схему, которая отражает процесс решения уравнений  (, - параметры).

**8.** Составьте линейное уравнение с параметром:

1)  такое, чтобы каждому значению параметра соответствовало единственное значение неизвестного ;

2)  и неизвестным , которое при любом значении параметра не имеет решений;

3)  и неизвестным , которое не имеет решений при всех отрицательных ;

4) и неизвестным  такое, чтобы при каком-то одном значении параметра решением уравнения было любое число, а при всех остальных значениях параметра уравнение не имело бы решений.

*Комментарии*

**1.** Если в задании специально нет оговорок о том, какими числами (натуральными, целыми или рациональными) являются неизвестное и параметр, то подразумевается, что речь идёт о рациональных числах.

**2.** Задания (1) – (3) готовят учащихся к выполнению заданий (4) – (5).

**3.** Задания (4) и (6) направлены на закрепление материала по теме: «Линейные уравнения с одним неизвестным»; помимо этого цель задания (6) – усвоение символики.

**4.** Цель задания (7) – познакомить учащихся со способом решения уравнений с небольшим числом легко угадываемых ветвлений.

Предполагается, что способ решения таких уравнений учащимся неизвестен. Им предлагается самостоятельно решить эти уравнения, а затем сравнить полученные результаты с ответами, записанными, например, на доске.

I. Если ответ учащегося отличается от ответа, записанного на доске, то в этом случае ученику предлагается сравнить своё решение с решением учителя.



1) *a* ≠ ±2

;

;

2) *а* = 2

;

нет решений;

3) *а* = -2

;

- любое число.

Ответ: 1) , если *a* ≠ ±2;

2) нет решений, если *а* = 2;

3) - любое число, если *а* = -2.

II. Можно обратить внимание учащихся на то, что при решении этих уравнений удобно воспользоваться таблицей, составленной в задании (5). Для этого учащимся предлагается рассмотреть три случая:

1) уравнение не имеет решений;

2) уравнение имеет единственное решение;

3) решением уравнения является любое число.

Целесообразно подчеркнуть, что, рассматривая, например, первый случай, следует ответить на ряд вопросов: какие ограничения накладываются на коэффициент при неизвестном и свободный член уравнения? При каких значениях параметров оба условия – ограничения выполняются одновременно?

**5.** Предполагается, что все задания блока учащиеся выполняют самостоятельно. Работа с большей частью заданий ( (1) – (5), (8) ) связана с выполнением анализа и (или) обобщения, а значит, эти задания служат средством формирования у учащихся соответствующих умений.

**Блок 3 «Графический способ решения линейных уравнений с параметром»**

*Базовые знания:*

- вышеперечисленные знания;

- понятие координатной плоскости;

- понятия линейной функции и графика линейной функции;

- понятие системы двух уравнений с двумя неизвестными; способы нахождения решений систем уравнений с двумя неизвестными.

*Задания*

**1.** Даны две группы линейных функций:

1) ; 2) ;

; ;

; ;

 и т.д.  и т.д.

а) Что общего между графиками функций каждой группы? Чем отличаются все графики линейных функций первой (второй) группы?

б) Запишите ещё по две функции, относящихся к каждой группе.

в) Сколько таких функций можно записать?

г) Укажите общий вид функций каждой группы.

д) Верно ли, что функции первой группы можно представить в общем виде так: , где - произвольное число, а линейные функции второй группы – в виде , где - произвольное число?

е) Каков геометрический смысл параметров  и ?

ж) При каких *а* (*b*) линейная функция  имеет корень, равный 0? положительный (отрицательный) корень? Как изменится ответ, если функции первой группы записать в общем виде так: , где - произвольное число (функции второй группы – в виде , где - произвольное число)?

**2.** 1) Как меняется наклон графика линейной функции  к положительному направлению оси *ох* при изменении коэффициента ?

2) Верно ли, что при любом значении *k* функция  имеет корни? Сколько?

**3.** Дана функция .

1) Каково положение графика этой функции относительно координатных осей, если:

а) , ;

б) *а=0, b* – любое рациональное число.

2) Какой геометрический смысл имеют параметры  и ?

3) Укажите все значения параметров  и , при которых данная функция имеет корни. Есть ли такие  и , что функция не имеет корней?

**4.** 1) Функция задана формулой . При каком значении *k* график этой функции параллелен графику функции:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

2) а) Каково взаимное расположение графиков функций каждой из групп задания 1.1? Как использовать полученный опыт при построении графиков функций каждой группы?

б) Каково условие параллельности графиков функций  и ?

в) Могут ли графики функций  и  совпадать? Если да, то при каком условии?

**5.** При каких значениях *а* и *b* прямые  и :

1) пересекаются в точке с координатами (2;1);

2) параллельны;

3) совпадают?

4) Как вы решали каждую из этих задач? В чём состоят способы ответов на поставленные вопросы?

**6.** Дано уравнение: . Проиллюстрировать способ нахождения его корня, используя график(и) соответствующей(их) функции(ий):

1) прямой ;

2) прямой  и прямой .

Охарактеризовать особенности каждого способа.

**7.** Предложить схему решения уравнения , где  и - любые числа.

**8.** Используя график функции ответьте на следующие вопросы:

а) Сколько корней имеет функция ?

б) Каковы решения уравнения ?

в) При каких значениях параметра *а* график функции  пересекается с графиком функции  хотя бы один раз?

г) Проиллюстрируйте на графике функции  возможные случаи его пересечения с графиком функции , где - любое число.

*Комментарии*

**1.** Задания этого блока целесообразно предложить учащимся на завершающих уроках по изучению темы «Системы двух уравнений с двумя неизвестными» (7 класс или начало 8 класса). Это объясняется, во-первых, тем, что в процессе работы с темой школьники знакомятся с графическим способом решения систем уравнений (в соответствии с материалом учебника [3]), а значит, вероятность того, что они сумеют реализовать основную идею указанного способа при выполнении заданий блока, достаточно высока.

Во-вторых, в теме продолжается работа, направленная на расширение знаний учащихся о взаимном расположении графиков линейных функций на координатной плоскости, о приёмах использования графика линейной функции при решении задач. Выполнение заданий блока может способствовать закреплению и обобщению этих знаний.

**2.** Предполагается, что все задания блока учащиеся выполняют самостоятельно. Работа с большей частью заданий ( (1), (2), (4), (5), (7), (8) ) связана с выполнением анализа и (или) обобщения, а значит, эти задания служат средством формирования у учащихся соответствующих умений.

**3.** Основными заданиями набора являются (6) и (8). Остальные (кроме (7)) в той или иной мере готовят выполнение перечисленных. Задание (6) учащиеся должны попытаться выполнить самостоятельно; затем проводится обсуждение хода решения задачи, учащиеся под руководством учителя формулируют особенности реализованных способов и делают выводы о том, какому из способов и почему следует отдать предпочтение.

**4.** Задание (7) учащиеся могут выполнить, и не обращаясь к графической иллюстрации. Предполагается, что каждый ученик выберет тот способ решения задачи, который кажется ему более удобным.

**5.** Задание (8) специально обращает внимание учащихся на то, что иногда графические иллюстрации являются средством решения задач. Кроме того, это задание – одно из первых в курсе алгебры, в процессе работы с которым готовится введение способа решения задач о числе корней уравнения с параметром в зависимости от значений параметра.

Предполагается, что приёмы работы с заданием (8) учащиеся будут искать самостоятельно.

**6.** Задания (2), (3), (5) и (7), на мой взгляд, целесообразнее предложить учащимся выполнить дома, а на следующем уроке обязательно обсудить полученные результаты. С остальными заданиями учащиеся работают в классе.

**Блок 4 «Квадратные уравнения с параметром»**

*Базовые знания:*

- базовые знания, указанные в блоках (1) – (3);

- понятие действительного числа;

- понятие квадратного уравнения, условия наличия у квадратного уравнения действительных корней, способ нахождения корней квадратного уравнения;

- теорема Виета и ей обратная; способы применения теорем при решении задач;

- понятие квадратичной функции; особенности расположения графика квадратичной функции на координатной плоскости в зависимости от , , .

*Серия заданий* *блока* разбита на две группы.

**I.** *Цель первой группы заданий* – актуализация знаний по теме «Квадратные уравнения»:

- формула для нахождения корней квадратного уравнения;

- зависимость количества корней квадратного уравнения от дискриминанта;

- способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью теоремы Виета;

- составление приведённых квадратных уравнений с помощью теоремы, обратной теореме Виета.

**1.** Определить, при каких значениях  один из корней следующих уравнений равен нулю:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

**2.** 1) Один из корней уравнения  равен 2. Найти второй корень и свободный член этого уравнения.

2) Один из корней уравнения  равен 5. Определить второй корень и коэффициент .

**3.** Определить, при каких значениях параметра  следующие уравнения имеют два корня, равных нулю:

1) ;

2) .

**4.** Определить, при каких значениях параметра  корнями уравнений являются противоположные числа

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

**5.** При каких значениях параметра  один из корней уравнения  равен квадрату другого корня?

**6.** В уравнении  определить то значение *q*, при котором его корни  и  удовлетворяют условию .

**7.** Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

1)  и -;

2)  и -.

**8.** Дано квадратное уравнение .

1) Один из корней исходного уравнения равен –*р.* Определить *q*.

2) Какова связь, зависимость между коэффициентами исходного уравнения, если известно, что один из его корней равен -1?

3) Известно, что  и  - корни этого уравнения. Найти сумму и произведение корней нового квадратного уравнения, если известно, что его корни равны корням данного уравнения,

а) умноженным на ;

б) сложенным с числом .

4) Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа, противоположные корням исходного уравнения. Изменились ли второй член и свободный член уравнения? Ответ обоснуйте.

**II.** *Цели второй группы заданий*:

**-** установить особенности реализации известного способа решения квадратных уравнений при решении квадратных уравнений с параметром;

**-** ввести приёмы использования теоремы Виета, анализа особенностей графика квадратичной функции при решении задач по теме «Квадратные уравнения с параметром с дополнительными условиями».

**1.** Дано квадратное уравнение .

1) Не решая исходного уравнения, найти его корни, зная, что дискриминант этого уравнения . Верно ли, что при любых , ,  () корни этого уравнения различны? Верно ли, что данное уравнение является неполным квадратным уравнением? Если да, то уравнением какого вида?

2) В каком отношении находятся коэффициенты исходного уравнения, если известно, что корни его – взаимно обратные числа?

3) Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратны корням исходного уравнения при условии, что . Чем отличается полученное уравнение от исходного?

4) а) Доказать, что корни уравнения  равны корням данного уравнения, умноженным на .

б) Используя это свойство, устно решить следующие неприведённые квадратные уравнения:

* ;
* ;
* ;
* ;
* .

**2.** 1) Решить уравнения относительно *х*:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

ж) ;

з) ;

и) .

2) Предложите схему решения квадратных уравнений с параметром (выделите случаи: когда коэффициент при  не зависит от параметра, когда коэффициент при  содержит параметр, но не обращается в нуль и когда коэффициент при  обращается в нуль при некоторых значениях параметра).

**3.** Найти все такие значения  так, чтобы каждое из следующих квадратных уравнений имело два равных:

а) положительных корня;

б) отрицательных корня:

1) ;

2) .

Выполнив анализ текстов заданий (4)-(7), предложите геометрическую иллюстрацию, соответствующую условию, которому должно удовлетворять каждое уравнение.

**4.** При каких значениях  уравнение  имеет два действительных корня:

1) положительных;

2) отрицательных;

3) разных знаков, причём отрицательный корень имеет меньший модуль;

4) разных знаков, причём положительный корень имеет меньший модуль?

**5.** Найти все те значения параметра , при которых оба корня квадратного уравнения  больше, чем 3.

**6.** При каких значениях  уравнение  имеет два различных корня, заключённых в интервале (1;5)?

**7.** Заполнить таблицу, если **** и ** -** корни трехчлена , , , а *p, q* – некоторые действительные числа.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Условия на корни** | **a > 0** | **a < 0** |
| и | и |  |
|  |  | f(p) > 0 |
| и |  |  |
| и |  | и  и |
| и | и |  |
| и |  |  |
| и |  |  |

**8.** Дано уравнение 

1) Решить это уравнение относительно *х* (без использования теоремы Виета).

2) Используя графическую иллюстрацию, показать, что уравнение :

а) при  имеет два действительных корня разных знаков, причём модуль положительного корня больше модуля отрицательного корня;

б) при  имеет два различных положительных корня;

в) при  не имеет действительных корней.

Исследовать каждый случай путём построения:

а) параболы (для этого выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена );

б) параболы  и прямой .

Охарактеризуйте каждый способ. Какой из них, по вашему мнению, является наиболее рациональным? Почему?

*Комментарии*

**I.** **1.** Предполагается, что при выполнении заданий (2), (4), (5), (6), (8) предполагается, что учащиеся воспользуются теоремой Виета.

**2.** Целесообразно обратить внимание учеников на два возможных способа выполнения задания (3):

а) с помощью теоремы Виета,

б) с учётом условия текста задания получаем: во-первых, квадратное уравнение имеет два одинаковых корня, если дискриминант равен нулю, во-вторых, подстановка 0 в исходное уравнение вместо  обращает уравнение в верное равенство. Таким образом, получаем систему двух уравнений относительно .

**3.** При выполнении задания (7) что учащиеся могут воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, а могут обратиться к понятию корня уравнения и теореме о разложении квадратного трехчлена на множители.

**4.** Задания 1.1, 1.4, 2.1, 3.1, 4.1 целесообразно выполнить с учащимися на уроке, остальные задания – предложить им выполнить дома, причём эти задания могут частями задаваться на дом, например по 3-4 задания, а могут быть предложены в качестве недельного домашнего задания.

Все задания первой группы учащиеся могут выполнить на завершающем этапе изучения темы «Квадратные уравнения», а также на начальном этапе работы с темой «Квадратичная функция».

**II. 1.** При выполнении задания 1.1 необходимо обратить внимание учащихся на то, что коэффициент *а* не может быть равен нулю, иначе бы мы получили линейное уравнение, а в условии речь идёт о квадратном уравнении. Это условие мы используем, делая вывод о том, что .

**2.** При выполнении заданий 1.2 – 1.4 предполагается использование теоремы Виета, но особое внимание надо обратить на задание 1.2, так как помимо обращения к теореме Виета необходимо учесть, что дискриминант больше или равен нулю, поскольку в условии говорится, что уравнение имеет корни.

**3.** В связи с заданиями (2) замечу следующее:

**-** первые два уравнения, сводятся к уравнениям вида ;

**-** уравнение (в) сводится к квадратному уравнению вида  при некоторых значениях параметра, а при некоторых приводится к виду ;

**-** уравнения (г) – (е) являются квадратными уравнениями, в которых коэффициент при  не зависит от параметра;

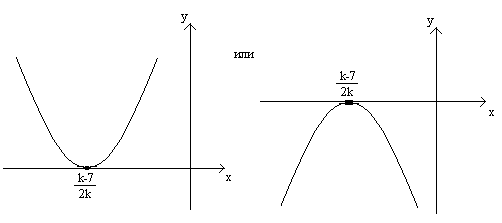
**-** уравнения (ж) – (и) являются квадратными не при всех значениях параметра: существуют такие значения параметра, при которых коэффициент при  обращается в нуль.

Поэтому учителю необходимо обратить внимание учащихся, используя примеры уравнений (а), (в), (г), (ж), (з), на способ решения квадратных уравнений с параметром. Сделать это целесообразно в процессе обсуждения самостоятельных попыток решения указанных уравнений учащимися. Работа с остальными уравнениями предлагается учащимся в качестве домашнего задания.

**4.** Предполагается, что при выполнении заданий (3) – (4) учащиеся воспользуются теоремой Виета, но нужно обратить внимание учеников на то, что теорема справедлива лишь для квадратных уравнений, причём, не для всех, а поэтому следует учесть, что коэффициент при  не может быть равен нулю, иначе мы получим линейное уравнение (которое либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет бесконечно много решений, но никогда не может иметь ровно два решения), и дискриминант данного уравнения неотрицателен.

Также следует предложить учащимся геометрическую иллюстрацию условия, которому должно удовлетворять данное уравнение, и показать, как записываются аналитически выводы, полученные при её анализе. Учитель может сделать это после обсуждения результатов выполнения учащимися задания (3).

Так, к заданию 3(б) для второго уравнения приводится следующая иллюстрация (предварительно выясняется, что эта иллюстрация соответствует значениям ):



Совместно с учащимися каждый из рисунков «описывается» аналитически. Для этого следует вспомнить, что уравнение имеет два равных корня, а значит, его дискриминант равен 0, корни отрицательны, то есть абсцисса вершины параболы – отрицательна, коэффициент при  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому аналитическое описание предложенной иллюстрации есть совокупность двух систем условий:

 или 

 .

*Замечание:* Если в тексте задачи не подчёркивается, что речь идёт о квадратном уравнении, то следует специально рассмотреть случай, который был исключён (), и выяснить, удовлетворяет ли соответствующее значение параметра условию задачи. Оказывается, удовлетворяет: при  уравнение приводится к виду  и имеет один (два равных) отрицательный корень.

С заданием (3) учащиеся работают в классе, а задание (4) можно задать на дом.

Основным средством решения задачи (5) служит геометрическая иллюстрация условия, которому удовлетворяет уравнение. Учитель должен обратить внимание учащихся на то, что, во-первых, принципиальных отличий в использовании иллюстраций в данном случае и, например, в случае (3б) нет. Во-вторых, особенности иллюстраций (они проявляются и в аналитическом представлении иллюстраций) зависят от конкретных условий задачи. Так, в рассматриваемом случае «главная» особенность в том, что в задаче (5) каждый из корней уравнения больше 3 (а это значит: ), а в задаче (3б) корни уравнения положительны (т.е. ) или отрицательны. Особенности выполнения задания (5) обсуждаются в процессе фронтальной работы с классом, после этого задание (6) предлагается ученикам выполнить самостоятельно.

Замечу, что задания (5) – (6) подготавливают учащихся к выполнению задания (7).

**5.** Задание (7) является обобщающим по теме «Квадратные уравнения с параметром с дополнительными условиями» (под дополнительными условиями я понимаю условия, которые накладываются на корни квадратного уравнения, например, при каких значениях параметра квадратное уравнение имеет два корня, заключённые в данном интервале). Это задание – домашнее; результаты его выполнения следует детально обсудить на уроке.

**6.** Задание (8): предполагается, что в теме «Квадратичная функция» с учащимися рассматривался способ построения параболы путём выделения из квадратного трёхчлена полного квадрата.

В данном задании:  или .

То есть парабола  получена из параболы  смещением на единицу вправо вдоль оси абсцисс и вдоль оси ординат на .

В ходе обсуждения результатов выполнения задания (8) следует ещё раз обратить внимание учащихся на то, что графические иллюстрации, как правило, не дают возможности получить формулы для корней уравнений с параметром. Но они являются полезным наглядным средством, используя которое мы решаем задачи о числе корней уравнения при определённых значениях параметра, при которых корни уравнения удовлетворяют данному условию.

**7.** Часть заданий второй группы рассматриваемого блока целесообразно предлагать учащимся на завершающем этапе изучения темы «Квадратные уравнения» и в процессе работы над темой «Квадратичная функция» (задания (1) – (2)).

Задания (3) – (8) предполагают использование соответствующих графических иллюстраций. Поэтому работу с этими заданиями возможно проводить после того, как учащиеся познакомились со способами построения графика квадратичной функции и некоторыми особенностями его расположения на координатной плоскости в зависимости от значений ,  и . В этом отношении наиболее приемлемая тема – «Квадратные неравенства».

Выполнение заданий (3) – (8) и им подобных можно отнести и на начало 9 класса.

**Блок 5 «Дробно-рациональные уравнения с параметром»**

Помимо общей цели заданий набора (служить средством организации исследовательской деятельности учащихся при изучении определённого вида уравнений с параметром), *цель заданий этого блока* - закрепление знаний по темам: «Линейные уравнения с параметром» и «Квадратные уравнения с параметром».

*Базовые знания* включают те знания, которые являются базовыми для каждой из выделенных выше тем, а также знание особенностей дробно-рациональных уравнений и способа их решения.

*Задания*

**1**. Решить уравнения относительно :

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) .

**2**. Решить уравнения относительно :

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) .

**3.** Предложите схему решения дробно-рациональных уравнений с параметром.

**4.** Найти положительные решения следующих уравнений:

1)  (- неизвестное, - параметр);

2)  (- неизвестное, - параметр).

**5.** Найти отрицательные решения следующих уравнений:

1)  (- неизвестное, - параметр);

2)  (- неизвестное, - параметр).

**6**. 1) При каких целых значениях параметра  уравнение  имеет положительное решение? Найти это положительное решение уравнения.

2)При каких целых значениях параметра  уравнение  имеет отрицательное решение? Найти это отрицательное решение уравнения.

**7**. При каких значениях  уравнение  имеет решение, большее, чем 2?

*Комментарии*

Часть заданий (связанных с решением дробно-рациональных уравнений, сводящихся к линейным) можно было бы предложить учащимся в конце 7 класса (либо в начале 8 класса). В этом случае после изучения темы «Квадратные уравнения с параметром» (конец 8 класса – начало 9 класса), необходимо было бы выделить ещё один блок заданий, посвящённый дробно-рациональным уравнениям с параметром, сводящимся к квадратным. Я решила объединить все эти задания в один блок и предложить его учащимся после изучения темы «Квадратные уравнения с параметром». Ход и результаты выполнения этих заданий помогут установить, овладели ли учащиеся способами решения линейных и квадратных уравнений с одним неизвестным с параметром.

**1**. В задании (1) предлагаются дробно-рациональные уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям с параметром, причём, расположены они в таком порядке:

- уравнения (1) – (3) не содержат параметра в знаменателях входящих в запись выражений левой и правой частей алгебраических дробей и сводятся к линейным уравнениям, но с той лишь разницей, что коэффициент при  в полученном после преобразований уравнении (1) не зависит от параметра, а в уравнениях (2) и (3) зависит;

- уравнения (4) – (6) содержат параметры в знаменателях представленных в обеих частях уравнения алгебраических дробей и сводятся к линейным уравнениям с коэффициентом перед , зависящем от параметра. В этих уравнениях он может быть равным нулю при допустимых значениях параметра.

Учитель, используя конкретные уравнения, например, (1) и (4) должен показать способ решения дробно-рациональных уравнений с параметром, обратив внимание учащихся на то, что решение сводится к реализации уже известных способов решения линейных (или квадратных) уравнений с параметром. Но при этом следует иметь в виду ряд особенностей:

- решение дробно-рационального уравнения должно начинаться с установления областей определения уравнения и допустимых значений параметра;

- нельзя умножать обе части уравнения на выражения, содержащие неизвестное, не будучи уверенным, что это выражение не обращается в нуль на области определения уравнения;

- получив выражение для неизвестного через параметр, необходимо установить, при каких допустимых значениях параметра это выражение действительно задаёт число из области определения уравнения, а при каких числовое значение выражения не принадлежит области определения уравнения. Например, при решении уравнения (1) получаем: , а область определения уравнения задаётся условием: . Поэтому мы должны найти значения  (), при которых это условие выполняется, то есть рассмотреть предложение .

Перечисленные особенности необходимо учитывать и при выполнении других заданий этого блока.

Уравнения (1), (2), (4) предлагаются учащимся в классе, а оставшиеся уравнения задаются в качестве домашнего задания.

**2.** Уравнение (1) задания (2) с помощью преобразований сводится к уравнению вида .

Есть вероятность того, что некоторые учащиеся будут работать с полученным уравнением так, как до сих пор работали с уравнениями, определёнными на R. Поэтому в процессе обсуждения особенностей решения этого уравнения внимание учащихся следует специально привлечь к необходимости учёта условий:  и .

Остальные уравнения задания (2) являются дробно-рациональными уравнениями с параметром, сводящимися к квадратным уравнениям с параметром (которые рассматриваются при определённых условиях).

Уравнение (2) сводится к квадратному уравнению, в котором коэффициент при  не зависит от параметра.

Уравнения (3), (4), (5) сводятся к уравнениям, в которых коэффициент при  не обращается в нуль при всех допустимых значениях параметра.

Предполагается, что уравнения (2) и (3) решаются в классе, остальные уравнения задаются ученикам в качестве домашнего задания.

**3.** Задания (4), (7), (8) выполняются в классе, а задания (3), (5), (6) – дома.

**4.** Большая часть заданий этого блока выполняется учащимися самостоятельно. Очевидно, что без анализа и в последующем – выполнение заданий будет практически невозможно. Значит, эти задания могут служить средством формирования у учащихся соответствующих умений.

**Список литературы**

1. Алгебра – 7. Редактор: С. А. Теляковский.- М.: Просвещение, 1993.

2. Алгебра – 8. Редактор: С. А. Теляковский.- М.: Просвещение, 1989.

3. Алгебра – 7. Автор: Ш. А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 1991.

4. Алгебра – 8. Автор: Ш. А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 1991.

5. Башмаков М. И. Математика: Экспериментальное учебное пособие для СПТУ – М.: Высшая школа, 1987.

6. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – СПб.: Союз, 1997.

7. Данилов М. А., Есипов Б. П. Дидактика. – М., 1957.

8. Максимова В. Н. Проблемный подход к обучению в школе: Методическое пособие по спецкурсу. – Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1973.

9. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М.: Педагогика, 1972.

10. Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в школе. Книга для учителей. – М.: Просвещение, 1971.

11. Махмутов М. И. Теория и практика проблемного обучения. – Казань: Татарское книжное издательство, 1972.

12. Немов Р. С. Психология: Учебник для студентов высших педагогических учебных заведений: В 3 книгах. Книга 1. Общие основы психологии. – М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 1997.

13. Немов Р. С. Психология: Учебник для студентов высших педагогических учебных заведений: В 3 книгах. Книга 2. Общие основы психологии. – М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 1997.

14. Никольская И. Л., Семёнов Е. Е. Учимся рассуждать и доказывать: Книга для учащихся 6-10 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1989.

15. Пидкасистый П. И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. – М.: Педагогика, 1980.

16. Письменный Д. Т. Готовимся к экзамену по математике. – М.: Рольф, 1997.

17. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. – М., 1946.

18. Фрадков И. С. Учимся решать задачи: Учебное пособие по математике для старшеклассников и абитуриентов. – Петрозаводск: АО «КАРЭКО», 1995.

19. Худобин А. И. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. – М.: Просвещение, 1970.

20. Ястребицкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1972.

21. Дегтяренко В. А. Три решения одной задачи с параметром.// Математика в школе, 2001, №5.

22. Карелина Т. М. Методы проблемного обучения.// Математика в школе, 2000, №5.

23. Кормихин А. А. Об уравнениях с параметрами.// Математика в школе, 1994, №1.

24. Матюшкин А. М. Психологические закономерности мышления в проблемном обучении.// Советская педагогика, 1969, №9.

25. Мещерякова Г. Н. Задачи с параметром, сводящиеся к квадратным уравнениям.// Математика в школе, 2001, №5.

26. Ратников Н. П. От уравнения с параметром – к графику, задающему параметр.// Математика в школе, 1990, №3.

**Заключение**