ГБОУ средней общеобразовательной школы №618 г. Москвы

Конспект урока
по теме
«Системы линейных уравнений. Метод Гаусса»

Предмет: алгебра

Контингент: 9 – 11 класс

Тип урока: урок - лекция

Автор:
Макарова Татьяна Павловна,
учитель математики
ГБОУ средней общеобразовательной школы №618
г. Москвы

Конспект урока по теме «Системы линейных уравнений. Метод Гаусса»

Автор:
Макарова Татьяна Павловна,
учитель математики
ГБОУ средней общеобразовательной школы №618 г. Москвы

Цели урока:

1. Формирование и закрепление у учащихся навыков решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Задачи урока:

1. Сформировать навыки и умения решения систем линейных уравнений, используя метод Гаусса.
2. Прививать интерес к предмету через привлечение различных источников информации; расширять кругозор учащихся; способствовать формированию исследовательских и коммуникативных компетенций, навыков само- и взаимопроверки.
3. Развивать логическое мышление, способность к абстрагированию, анализу.
4. Воспитывать самостоятельность и активность учащихся.

Тип урока: урок – лекция

Методы и педагогические приёмы:
• словесный метод;
• наглядный метод;
• методы самостоятельной учебной работы и работы под руководством учителя;
• методы контроля (устный, письменный);
• методы самоконтроля и взаимоконтроля;
• дифференцированная работа.

Формы организации совзаимодействия на уроке: учебная, групповая работа, индивидуальная работа

Оборудование: раздаточный материал

Контингент: 9-11 классы

Ход урока

I. Организационный момент (приветствие учащихся).

II. Актуализация.

Продолжаем рассматривать системы линейных уравнений.

Сначала немного систематизируем знания о системах линейных уравнений.

Фронтальный опрос:

1. ***Сколько решений может иметь система линейных уравнений?***

   Предполагаемый ответ учащихся:

Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.
2) Иметь бесконечно много решений.
3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

2. ***Какие методы решения систем линейных уравнений вы знаете?***

   Предполагаемый ответ учащихся:

   Метод подстановки, сложения, графический метод.

III. Основная часть.

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений.

Известный немецкий математик Иоганн Карл Фридрих Гаусс еще при жизни получил признание величайшего математика всех времен, гения и даже прозвище «короля математики». **А всё гениальное, как известно – просто!**

Метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему, состоящую из n уравнений первой степени с n неизвестными, или систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Первый индекс коэффициентов при неизвестных обозначает номер уравнения, а второй - номер переменной. Такая система может быть **несовместной,** если она не имеет решения, и **совместной,** если имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется **определенной,** а более одного - **неопределенной.**

При помощи элементарных преобразований сначала исключаем из всех уравнений, кроме первого, переменное x_1. Далее исключаем из всех уравнений, кроме первого и второго, переменную x_2 и так далее. В конечном итоге мы приходим к системе следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n-1}x_{n-1} + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{n-1n-1}x_{n-1} + a'_{n-1n}x_n = b'_{n-1} \\ a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \qquad (2)$$

Если в полученной системе (2) в последнем уравнении свободный член b'_n не равен нулю, а коэффициент a'_{nn} в левой части равен нулю, то исходная система (1) **несовместна,** т.е. не имеет решений. Если в системе (2) все коэффициенты в левой и правой части последнего уравнения равны нулю, тогда система (1) будет совместной неопределенной. В остальных случаях система будет обладать единственным решением.

Напомним, что к **элементарным преобразованиям системы** относятся следующие:

1). Перемена местами двух уравнений в системе;

2). Умножение какого - либо уравнения системы на действительное число, не равное нулю.

3). Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число, не равное нулю.

Системы линейных уравнений (1) и (2) являются **эквивалентными,** т.к. множество их решений совпадают.

На практике более удобным оказывается применение метода Гаусса не, собственно, к самой системе линейных уравнений, а к ее расширенной матрице. Когда расширенная матрица будет приведена к треугольному виду, на этом цепь элементарных преобразований над матрицей завершается.

Пример 1. Найти решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы. Первый столбец будет стоять из коэффициентов, находящихся при переменной x_1, второй столбец - соответственно из коэффициентов при x_2, третий столбец - из коэффициентов при x_3, четвертый столбец расширенной матрицы - из свободных членов.

$$(A/b) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 17 & -23 & 23 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 17 & -23 & 23 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} = (A'/b')$$

Расширенная матрица коэффициентов исходной системы *(A/b)* сводится к треугольной матрице *(A'/b')* последовательными элементарными преобразованиями:

1). Первая строка матрицы (A/b) умножается на (-2) и на (-5) и прибавляется соответственно ко второй и третьей строке.

2). Вторая строка умножается на 1/7.

3). К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на (-17).

Треугольная система, соответствующая матрице *(A'/b')* имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 1, \\ \qquad\qquad\ -x_3 = 1 \end{cases}$$

Откуда единственное решение системы находится следующим образом: $x_3 = -1;$ из второго уравнения $x_2 = 1 + x_3 = 0;$ из первого уравнения $x_1 = -3 + 3x_2 - 4x_3 = 1.$

Таким образом, тройка чисел (1;0;-1) является решением исходной системы линейных уравнений, что можно легко проверить подстановкой.

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 3, \\ 3x - 2y + z = -1, \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

Решение.

$$(A/b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A'/b')$$

Последней строке матрицы (*A'/b'*) соответствует уравнение эквивалентной системы $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$, которое не имеет решений.

Ответ: решений нет.

III. Закрепление пройденного материала. Работа в группах.

Задание. Решить систему уравнений методом Гаусса.

Номер группы	Задание. Решить систему уравнений методом Гаусса.	Ответ
1	1. $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 7x - y + 2z = 21 \\ 3x + 2y - 11z = 2 \end{cases}$	1.(3,2,1) 2. решений нет

	2. $\begin{cases} v-5x-8y+z=3 \\ 3v+x-3y-5z=1 \\ v-7y+2z=-5 \\ 11x+20y-9z=2 \end{cases}$	
2	1. $\begin{cases} 11x-y+2z=-8 \\ -x+4y-5z=23 \\ 6x-2y-z=-1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2v+3x+11y+5z=2 \\ v+x+5y+2z=1 \\ 2v+x+3y+2z=-3 \\ v+x+3y+4z=-3 \end{cases}$	1. (0;2;-3) 2. (-2;0;1;-1)
3	1. $\begin{cases} 2x-4y+10z=0 \\ x+3y+2z=-1 \\ -3x+2y-9z=-10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2v-x+y-2z=0 \\ 3v+x+y-4z=1 \\ -v+x+y+z=2 \\ 5v+2x-4y-z=2 \end{cases}$	1.(11;-2;-3) 2.(1;1;1;1)
4	1. $\begin{cases} 2x_1+2x_3=8 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=-5 \\ 2x_2-3x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1-x_2+x_5=3 \\ x_1+x_3-x_4=2 \\ x_2-2x_3+3x_5=14 \\ -x_1+x_3-6x_5=-10 \\ 3x_2+2x_4=29 \end{cases}$	1.(2;-2;2;-1) 2. (11;7;-5;4;-1)

Закрепление пройденного материала. Самостоятельная работа.

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Решить систему уравнений методом Гаусса.	
а) $\begin{cases} \boldsymbol{x+2y+3z=5} \\ \boldsymbol{2x-y-z=1} \\ \boldsymbol{x+3y+4z=6} \end{cases}$ Ответ: (1 ; -1; 2)	***а***) $\begin{cases} \boldsymbol{-4x+2y-3z=-3} \\ \boldsymbol{x-y+2z=4} \\ \boldsymbol{5x-3y+5z=6} \end{cases}$ Ответ: нет решений

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$ Ответ: $(0; 0; -1; 1)$	*б)* $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1} \\ \boldsymbol{3x_1 - 4x_4 = 1} \\ \boldsymbol{2x_2 + x_3 - 7x_5 = 4} \\ \boldsymbol{-x_1 + x_3 - x_5 = 1} \\ \boldsymbol{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1} \end{cases}$ Ответ: (-1; -1; -1; -1; -1)

IV. Подведение итогов урока. Рефлексия.

Выбери вариант соответствующий твоим ощущениям после сегодняшнего занятия.

1. Я все знаю, понял и могу объяснить другим!
2. Я все знаю, понял, но не уверен, что смогу объяснить другому.
3. Я сам знаю, понял, но объяснить другому не смогу.
4. У меня остались некоторые вопросы.

V. Домашняя работа.

Решить системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ 4x + 6y - 2z = 6, \\ 3x - y + 2z = -1. \end{cases}$

Ответ: бесконечное множество решений.

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 15, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$

Ответ: $(1; 1; 1; 1)$.

VI. Список использованной литературы

1 . http://www.mathprofi.ru/metod_gaussa_dlya_chainikov.html

2. http://ru.wikipedia.org/wiki/

3. http://mathserfer.com/theory/pyartli1/node54.html