## Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида , где ОДЗ неравенства задается системой 

Известен стандартный метод решения такого неравенства, который предполагает разбор двух случаев на области допустимых значений неравенства.

В первом случае, когда основания логарифмов удовлетворяют условию, знак неравенства изменяется: .

Во втором случае, когда основание удовлетворяет условию , знак неравенства сохраняется: .

При решении мы рассматриваем два случая и потом объединяем ответы. Но при рассмотрении второго случая приходится повторять выкладки из первого случая….

Вот уже многие годы при подготовке к ЕГЭ (да и на самом ЕГЭ) моих учеников выручает следующая теорема.

 **Теорема.** *Логарифмическое неравенство*

 *равносильно следующей системе неравенств*:



**Доказательство**: первые четыре неравенства системы задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства. Обратим теперь внимание на пятое неравенство. Если , то первый множитель этого неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство . Если же , то первый множитель пятого неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство . Таким образом, пятое неравенство системы включает в себя оба случая предыдущего метода. Терема доказана.

Рассмотрим пример.

*Решить неравенство* $log\_{х-2}2х-3>log\_{х-2}24-6х$*.*

*Первый способ.*

*Стандартный метод решения*, который предполагает разбор двух случаев на области допустимых значений неравенства.

$$\left\{\right.\left\{\right.$$

$\left\{\begin{array}{c}2х-3>0,\\24-6х>0,\\0<х-2<1,\\2х-3<24-6х.\end{array}\right.$ или$ \left\{\begin{array}{c}2х-3>0,\\24-6х>0,\\х-2>1,\\2х-3>24-6х.\end{array}\right.$

Решаем первую систему:$ \left\{\begin{array}{c}х>1,5\\х<4\\2<х<3\\х<\frac{27}{8}\end{array}\right.$, откуда получаем 2$<х<3.$

Решаем вторую систему: $\left\{\begin{array}{c}х>1,5,\\х<4,\\х>3\\х>\frac{27}{8}\end{array}\right.$, откуда получаем $\frac{27}{8}<х<4.$

Объединяя полученные ответы, имеем окончательное решение данного неравенства.

Ответ: 2$<х<3, \frac{27}{8}<х<4.$

*Второй способ.*

*Применение теоремы.*

$$\left\{\begin{array}{c}2х-3>0\\24-6х>0,\\х-2>0,\\х-2\ne 1,\\\left(\left(х-2\right)-1\right)\left(2х-3-\left(24-6х\right)\right)>0.\end{array};\right. \left\{\begin{array}{c}х>1,5\\х<4,\\х>2\\х\ne 3,\\8\left(х-3\right)\left(х-\frac{27}{8}\right)>0.\end{array}\right.$$

Решив которую, получим 2$<х<3, \frac{27}{8}<х<4.$

Ответ: 2$<х<3, \frac{27}{8}<х<4.$