**элементы теории вероятностей**

**СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ, ЕГО ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ**

Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события.

Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

События будем обозначать буквами *А, В, С, ....* Если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условий, то оно называется *достоверным;* если же оно не может произойти — *невозможным.*

Если событие *А* при реализации комплекса условий может произойти, а может и не произойти, то оно называется *случайным.*

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий *А* и *В,* будем называть *суммой (объединением)* событий *А* и *В* и обозначать *А+В* или *А**В.*

Событие, состоящее в наступлении обоих событий *А* и *В,* будем называть *произведением (совмещением)* событий *А* и *В* и обозначать *АВ* или *A**B.*

События называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пусть, например, нас интересует появление определенного числа очков на грани при одном бросании игральной кости: i =1,2,3,4,5,6. Выпадение кон­кретного числа очков назовем *элементарным событием (исходом),* которое обо­значим . Таким образом, для каждого связанного с этим опытом события *А* можно выделить совокупность тех элементарных исходов , наступление ко­торых, влечет за собой наступление события *А.*

Пусть событие *А* состоит в появлении нечетного числа очков на грани. Этому событию благоприятствуют элементарные события т. е. неко­торое подмножество множества всех элементарных исходов. Совокупность элементарных событий обозначается  и называется *про­странством элементарных событий.*

Элементарные события взаимно исключают друг друга и в результате данного опыта обязательно произойдет одно из них. Пространство элементар­ных событий образует так называемую *полную группу попарно несовместных событий,* так как появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными.* Для противоположных событий одновременно выполняются два условия: *А+*—достоверное событие и *А*— невозможное событие.

Для количественной оценки возможности появления случайного события *А* вводится понятие вероятности.

Классическое определение вероятности.

*Вероятностью* события *А* называют отношение числа *т* исходов, благо­приятствующих этому событию, к числу *п* всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

*Р (А) = т/п*

В рассмотренном примере вероятность выпадения грани с нечетным числом очков составляет *Р (А)* = 3/6= 1/2.

Приведем аксиоматическое определение вероятности, пред­ложенное А. Н. Колмогоровым.

1°. *Каждому случайному событию А из поля событий ставится в соот­ветствие неотрицательное число Р (А), называемое вероятностью.*

2°. P(Ω)=1.

3°. Аксиома сложения. *Если события* *, А**,…,* *попарно не­совместны, то Р(А1+ А**+…+**)=Р(**)+Р(А2)+…+Р(**).*

Отсюда следует, что:

1) вероятность невозможного события равна нулю;

2) для любого события *А Р* (А)=1—Р *(**),* где — противоположное событие;

3) каково бы ни было случайное событие *А,* 0≤Р(А)≤ 1.

Используя эти аксиомы, свойства вероятностей выводят в качестве теорем.

К числу основных понятий теории вероятностей также относится *частота*

события, под которой понимают отношение числа испытаний, в которых это событие произошло, к общему числу фактически произведенных испытаний. Частоту события называют *статистической вероятностью.* Для вычисления частоты события необходимо произвести в действительности испытания (опыт), что не требуется для определения вероятности.

Массовые случайные события обладают свойством *устойчивости частоты:* наблюдаемые в различных сериях однородных испытаний (с достаточно боль­шим числом испытаний в каждой серии) значения частоты данного случайного события колеблются от серии к серии в довольно тесных пределах и стре­мятся (по вероятности) к некоторому постоянному числу. При этих условиях частоту можно принять за приближенное значение вероятности.

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа *тип* для вычисления вероятностей событий, и поэтому непосредственно пользоваться формулой *P(A)=m/n* не удается. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т. е. вероятности попадания точки в об­ласть (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Геометрическое определение вероятности.

Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G ив ней со­держится другая область *g.* Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область *g.* При этом выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы:

P=

(геометрическое определение вероятности).

**Решение задач:**

**1.** В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от I до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение. Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию *А,* равно числу всех возмож­ных случаев, т.е. *т=п=*10 и *Р(А)=1.* В этом случае событие *А* досто­верно.

**2.** В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова веро­ятность вынуть из урны синий шар?

Решение. Синих шаров в урне нет, т.е. *т = 0,* а *п=15.* Следовательно, *Р (А)* = 0/15 = 0. В данном случае событие *А -* невозможное.

**3.** В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Решение. Здесь m = 4**,** *п*=12 и Р (А) = 4/12= 1/3.

**4.** В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

Решение. Здесь число всех случаев *п* = = (10×9)/(1 ×2)= 45. Число же случаев, благоприятствующих событию *А,* определяется равенством *т=**, т.* е. *m =*(6×5)/(1×2)=15. Итак, *Р (А) =* 15/45= 1/3.

**5.** В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета - выигрыш по 50 руб., на десять би­летов- выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов- выигрыш по 10 руб., на 165 билетов - выигрыш по 5 руб., на 400 билетов - выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 руб.?

Решение. Здесь *m* =1 + 4+ 10+ 20 =35, *n* = 2000, т.е. *Р (А)* = *m/n* = 35/2000 = 0,0175.

**6.** Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

Решение. Здесь *m* =1, *n* = 4(герб-герб, герб-лицо, лицо-лицо, лицо-герб) , т.е. *Р (А)* = =*m/n* = 1/4 = 0,25

**Примечание.** В случае классического определения вероятность невоз­можного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение, т. е. если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. При геометрическом же определении вероятности обратное утверждение не имеет места. Вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

**7.** Точка взята наудачу внутри круга радиуса *R.* Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоя­нии, меньшем *r (r < R).*

Решение. Событие А – попадание точки внутрь круга радиуса *r,* имеющего площадь =π∙. *Р (А)* = /, где = π∙. Тогда *Р (А)* = π∙/ π∙=.

**8.** Точка взята наудачу внутри круга радиуса *R.* Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от расположения внутри круга.

Решение. Событие А – попадание точки внутрь правильного треугольника*,* имеющего площадь=3/4. *Р (А)* =/, где = π∙. Тогда *Р (А)* =3/4∙ π∙=3/4 π.

**9.** Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

Решение. *Р (А)* =/=1/2=0,5.

**ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ**

**Теорема сложения вероятностей.** *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

*Р(А+В) = Р(А) + Р(В).*

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий:

*P*() = *A**).*

*Для двух совместных событий: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ).* 

Событие *А* называется *независимым* от события *В,* если вероятность собы­тия *А* не зависит от того, произошло событие *В* или нет. Событие *А* назы­вается *зависимым* от события *В,* если вероятность события *А* меняется в зави­симости от того, произошло событие *В* или нет.

Вероятность события *А,* вычисленная при условии, что имело место дру­гое событие *В,* называется *условной вероятностью* события *А* и обозначается *Р(А/В).*

Условие независимости события *А* от события *В* можно записать в виде *Р (А/В)=Р (А),* а условие зависимости—в виде *Р (А/В) ≠ Р (А).*

**Теорема умножения вероятностей.** *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную веро­ятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:*

*Р (АВ)=Р (А)∙Р (В/А)* или *Р(АВ) = Р(В)∙Р(А/В).*

Если событие *А* не зависит от события *В,* то и событие *В* не зависит от со­бытия *А;* тогда

*Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).*

Условная вероятность события *Ak ,* определенная в предположении, что осуществились события *А1, А2,…, Ak-1,* обозначается *Р (Ak/ А1, А2,…, Ak-1).*

*Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероят­ностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:*

*Р (А1 А2... Ak)*=*P* **(****)***=Р (А1)∙ Р (А2/А1)∙Р(А3/А1А2)...Р (Ak /А1А.2... Ak-1).*

В случае независимых событий справедлива формула

*P* **(****)***=**).*

**10.** В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый; черный; синий; красный; белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

Решение. Имеем *n*= 10+ 15 + 20 + 25 = 70, *Р* (Б) = 10/70= 1/7, *Р* (Ч) = 15/70 = 3/14, *Р* (С) =20/70 = 2/7, *Р* (К) =25/70 = 5/14. Применив теорему сложения вероят­ностей, получим

*Р* (Б + Ч) = *Р* (Б) + *Р*(Ч) = 1/7 + 3/14 = 5/14;

*Р*(С + К) = *Р* (С) + *Р* (К) =2/7+5/14 = 9/14;

*Р*(Б + Ч + С) = 1-*Р* (К) = 1-5/14 = 9/14.

**11.** В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идет о совмещении событий *А* и *В,* где событие *А*-появление белого шара из первого ящика, событие *В* - появление белого шара из второго ящика. При этом *А* и *В*-независимые события. Имеем Р *(А)* = 2/12= 1/6, *Р (В)* =8/12 =2/3. Применив теорему умножения вероятнос­тей, находим

*Р (АВ) =Р(А)∙Р (В)* = (1/6)∙ (2/3) = 1/9.

**12.** В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой -черный.

Решение. Пусть:

событие *А —* появление белого шара из первого ящика;

*» В*— » » » » второго »

*» С*— » черного » » первого » **(**С**=**);

*» D*— » » » » второго » *(D =**).*

Тогда *Р* *(А)* = 1/6, *Р (В)* = 2/3, *Р* *(С)* = *Р* (*)* = 1 - 1 /6 = 5/6, *Р (D)* = *Р* () = 1 - 2/3 = =1/3.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика - черный:

*P(AD) = P(A)∙P* (D) = (1/6)∙(1/3)= 1/18.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика - белый:

*Р (ВС) = Р(В)∙Р (С)* = (2/3) ∙ (5/6) = 5/9.

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого, или второго), окажется белым, а шар, вынутый из другого ящика, - черным. Применяем теорему сложения вероятностей:

*Р* = *Р* (АD)+*Р* (ВС) = 1/18+5/9= 11/18.

**13.** В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероят­ность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть событие *А* - появление белого шара при первом вынимании; событие *В* - появление белого шара при втором вынимании. По теореме умно­жения вероятностей для случая зависимых событий имеем *Р* *(АВ)* = *Р* *(А)∙Р(В/А).* Но *Р* *(А) =* 6/(6+8) = 6/14= = 3/7 (вероятность появления первого белого шара); *Р (В/А)* = (6 - 1)/(6 + 8 - 1) = 5/13 (вероятность появления второго белого шара в предположении, что первый белый шар уже вынут). Следовательно, *Р(АВ) =* (3/7) ∙ (5/13) =15/91.

**14.** Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго- 0,8, для третьего- 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Решение. *Р*(*А*) = 0,75, *Р*(*В*)=0,8, *Р(С*) = 0,9; *Р (АВС) = Р (А)∙Р (В)∙Р (С)* = =0,75∙0,8∙0,9 = 0,54.

**15.** В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадает хотя бы один стрелок.

Решение. Здесь *Р(**)* = 1- 0,75 = 0,25 (вероятность промаха первого стрелка); *Р (*) = =1 - 0,8 = 0,2 (вероятность промаха второго стрелка); *Р (*) =1- 0,9=0,1 (вероятность промаха третьего стрелка); тогда *Р* (*) —* вероятность одновре­менного промаха всех трех стрелков- определится следующим образом:

*Р* (*)*=*Р(**)* ∙ *Р (*) ∙ *Р (*) = 0,25∙ 0,2∙ 0,1 = 0,005.

Но событие, противоположное событию *,* заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность *Р*=1— *Р* (*),* т. е. *Р*= 1—0,005 = 0,995.

**16.** Вероятность выхода станка из строя в течение одного рабочего дня равна α (α -малое положительное число, второй степенью которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя? Решить задачу при α = 0,01.

Решение. Так как 1- α - вероятность того, что станок не выйдет из строя в те­чение дня, то по теореме умножения вероятностей (1- α)5 - вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение 5 дней.

Воспользовавшись биномиальным разложением и пренебрегая членами, содержащими α 2, α 3, α 4 и α 5, получим приближенное равенство (1- α*)5* ≈1—5∙ α, т. е. *Р* ≈1—*5∙* α *.* Приняв α = =0,01, получаем *Р≈* 0,95.

**ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ**

Если производится *п* независимых испытаний, в каждом из которых ве­роятность появления события *А* одна и та же и равна *р*, то вероятность того, что событие *А* появится в этих *п* испытаниях *т* раз, выражается *формулой Бернулли*

= ∙ ∙ ,

где *q* **=** 1 **—** *р.* Таким образом,

 = ,  = *n∙p∙**,…,* *=* *.*

Число называется *наивероятнейшим числом* наступлений события *А* в *п* испытаниях, если значение  при *т =*не меньше остальных значений  ,т.е. ≥ при ≠.

Если р ≠ 0 и *р ≠* 1, то число  можно определить из двойного неравенства

*пр - q≤* ≤ *пр+p.*

Разность граничных значений в этом двойном неравенстве равна 1**.** Если *пр+p* не является целым числом, то двойное неравенство определяет лишь одно наивероятнейшее значение *т0.* Если же *пр+р -* целое число, то имеются два наивероятнейших значения: *= n p - q* и  = *n p+p.*

**17.** В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара *р =* 20/30 = 2/3 можно считать одной и той же во всех четырех испытаниях; *q* = 1— *р* = 1/3. Используя фор­мулу Бернулли, получаем

= ∙∙=  ∙ .

**18.** Вероятность появления события *А* равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие *А* появитcя не более трех раз?

Решение. Здесь *р* = 0,4, *q* = 0,6. Имеем:

вероятность появления события *А* 0 раз:  *=q 10;*

» » » » 1 »: *=10pq9;*

» » » » 2 раза: *=* *45p2q8;*

» » » » 3 »: *= 120p3 q 7.*

Вероятность того, что событие *А* появится не больше трех раз, составляет

*P* = *+* *+**+**,*

т. е.

*P*= *q 10* + *10pq9*+ *45p2q8* +*120 p3q 7* или *Р =q 7* (*q*3 + 10*q2р* + 45*qр*2 + 120р3).

Полагая *p* = 0,4, *q* = 0,6, получим *Р* = 0,67 (0,216+1,44+4,32+7,68)≈0,38.

**19.** Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятности рожде­ния мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение. Вероятность рождения девочки *р* = 0,5, тогда *q* = 1 - *р* = 0,5 (вероятность рождения мальчика). Значит, искомая вероятность

*P*3,5 = ∙*p³∙q²* = (0,5)3∙(0,5)2 =  .

**20.**В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что среди детей будет не больше трех девочек.

Решение.

= =  ; = 5 ∙ =  ;

= 10 ∙ =  ; = 10 ∙ =  ;

*Р =* + + +=  .

**21.**Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

Решение. *p*= 0,5, *q*= 0.5. = ∙ ∙ =  ∙ ∙ =  =  .

**22.**Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше трех раз?

Решение. *p*= 0,5, *q*= 0.5. =∙∙ = =  .

=∙∙ = 6 ∙ = 6   = .

=∙∙ = 15 ∙ = 15   = .

=∙∙ = 20 ∙ = 20   = .

*Р =* + + + = +  +  +  =  .

**23.** В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают под­ряд 14 шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а за­тем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

Решение. Здесь *п =* 14, *р* = 10/50 = 1 /5, *q* = 1 *- р* = 4/5. Используя двойное нера­венство *пр*- *q* ≤  ≤ *nр + р* при указанных значениях *n,* *р* и *q,* получим

14/5 - 4/5 ≤  ≤ 14/5 + 1/5, т. е. 2 ≤  ≤ 3.

Таким образом, задача имеет два решения: *= 2,* *= 3.*

**24*.*** Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сде­лано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. Здесь *n* = 25, *р =* 0,7*, q=*0,3*.* Следовательно,

25 ∙ 0,7 - 0,3 ≤  ≤ 25 ∙ 0,7 + 0,7, т. е. 17,2 ≤  ≤ 18,2.

Так как *т -* целое число, то = 18.

**25.** В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 ок­тября в данном городе за 40 лет.

Решение. Имеем *n* = 40, *р* = 1/7, *q* = 6/7. Таким образом,

40 ∙ 1/7 – 6/7 ≤  ≤ 40 ∙ 1/7 + 1/7 ,

4 ≤  ≤ 5 т. е.  = 5.

**26.** В урне 100 белых и 80 черных шаров. Из урны извле­кают *п* шаров (с возвратом каждого вынутого шара). Наивероят­нейшее число появлений белого шара равно 11. Найти *п* .

Решение. Из двойного неравенства *пр - q ≤* ≤ *пр+p* следует, что

*(* *- p)/p ≤ n ≤ (* *+ q)/p.*

Здесь = 11, *р =* 100/180 = 5/9, *q* = 4/9; следовательно,

 ≤ *n ≤* , т.е. 18,8 ≤ *n ≤* 20,6*.*

Итак, задача имеет два решения: = 19, = 20.

**27.** Можно ли в предыдущей задаче изменить числовые зна­чения  и *р* так, чтобы задача не имела решений?

Решение. Нет, задача всегда имеет решение, так как

(+*q)/p - (* *- p)/p = (p + q)/p = 1/p > 1.*

**ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА**

Если известно, что событие *А* может произойти вместе с одним из собы­тий*,*, ..., *Нп* (гипотез), образующими полную группу попарно несовмест­ных событий, то событие *А* можно представить как объединение событий *А*, *А**, …,А Нп ,* т. е.

*А = А**+ А**+... + АНп .* Вероятность события *А* можно определить по формуле

*Р(А) = Р* () ∙ *Р (А/*) *+ Р (*) ∙ *Р* (*А/*) + ... + *Р (Нп)∙ Р (А/Нп),*

или

*Р(А)=* *.*

Эта формула называется *формулой полной вероятности.*

Условная вероятность события  в предположении, что событие *А* уже имеет место, определяется по *формуле Бейеса:*



Вероятности *,* вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез.*

**28.** Имеются четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 чер­ный шар, во второй — 2 белых и 3 черных шара, в третьей—3 белых и 5 черных шаров, и четвертой—4 белых и 7 черных шаров. Событие—выбор *i* -й урны *(i* = 1, 2, 3, 4). Известно, что вероятность выбора *i*-й урны равна *i/10,* т. е. *Р* () = 1/10, Р()= 1/5, *Р* () = 3/10, *Р* () = 2/5. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Из условия следует, что *Р (A/**)* = 1/2 (условная вероятность извлече­ния белого шара из первой урны); аналогично *Р* (*А*/) =2/5, *Р* (*А*/) = 3/8, *Р (А/*) =4/11. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

*Р* (*А*)=*Р* () ∙ *Р (А/**)+Р(*) ∙ *Р* (*А*/) +Р *(**) ∙Р (А*/) + *Р* () ∙ Р (*А/*)=

= 

**29.** Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором—10 белых и 10 черных ша­ров, в третьем—20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Решение. Пусть *,* *,* -гипотезы, состоящие в выборе соответственно пер­вого, второго и третьего ящика; событие *А -* появление белого шара. Тогда *Р (**)=P* ()= =*Р* () = 1/3 (выбор любого из ящиков равновозможен); *Р (А/**)* = 1 (вероятность извлечения белого шара из первого ящика); *Р* (*А*/) = 10/20=1/2 (вероятность извлечения белого шара из второго ящика); *Р (А*/) *=0* (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика).

Искомую вероятность *Р (**/А)* находим по формуле Бейеса:

*Р (**/А)* =   =  .

**30.** В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй— 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую перело­жили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар—белый.

Решение. После того, как из второй урны переложили в первую один шар, в первой урне оказалось две совокупности шаров: 1) 5 белых и 10 черных шаров, первоначально находившихся в этой урне; 2) один шар, переложен­ный из второй урны. Вероятность появления белого шара из первой совокуп­ности составляет *Р (A/**)* = 5/15=1/3, а из второй совокупности *Р* (*А*/) = 3/10. Вероятность того, что произвольно вынутый шар принадлежит первой совокупности, есть *Р* () = 15/16, а второй совокупности — *Р(*)= = 1/16.

Используя формулу полной вероятности, получим

*Р* (*А*)=*Р* () ∙ *Р (А/**)+Р(*) ∙ *Р* (*А*/) = 