**«Методические рекомендации**

**обучения учащихся решению текстовых задач**

**(единого государственного экзамена по математике: задачи на движение, работу, проценты, смеси)»**

**Учитель математики**

**Муниципального общеобразовательного учреждения**

**«Средняя общеобразовательная школа № 12»**

**города Подольска Московской области**

**Дианова Лариса Викторовна**

**2012**

**СОДЕРЖАНИЕ**

Стр.

Введение……………………………………………………………………3

1. Задачи на движение……………………………………………………….8

1.1. Задачи на движение по прямой ………………………………………8

1.1.1. Задачи на движение по прямой навстречу………………… 12

1.1.2. Задачи на движение по прямой вдогонку…………………..13

1.2. Задачи на движение по замкнутой трассе…………………………14

1.3. Задачи на вычисление средней скорости…………………………… 17

1.4. Задачи на движение по реке…………………………………………. 18

1.5. Задачи на движение протяжных тел………………………………… 20

2. Задачи на работу………………………………………………………………. 22

3. Задачи на проценты…………………………………………………………… 26

3.1. Задачи на растворы, смеси и сплавы………………………………………. 26

3.2. Задачи «о продуктах»……………………………………………………….. 30

3.3. Задачи на формулу сложных процентов…………………………………… 31

Заключение………………………………………………………………… 35

Список литературы…………………………………………………………37

**Введение**

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН по математике

волнует всех: учителей, обучающихся и их родителей. Для одних главное – это набрать минимальный аттестационный балл. Этих обучающихся учитель ориентирует на устойчивое, безошибочное решение первой части работы. Хотя для того, чтобы набрать минимальный аттестационный балл (24 тестовых балла, т.е. 5 первичных баллов) достаточно верно решить несколько заданий из первой части, из опыта работы понимаешь, что невнимание, тревога, стресс могут повлечь за собой совершенно непредсказуемые ошибки. Поэтому очень хочется, чтобы обучающиеся умели решать как можно больше заданий первой части работы. Для других – за экзаменационную работу получить максимальный экзаменационный балл, т.к. большинство выпускников ориентируется на поступление в ВУЗ. Им необходимо уметь решать задания первой части с высокой надежностью. Как научить решать задачи ЕГЭ по математике, чтобы сдать экзамен, если с математикой проблемы?

В кодификаторе требований (умений) к уровню подготовки выпускников по математике для задания В13 указано на необходимость применения математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики, интерпретация результата, учет реальных ограничений, т.е. обучающиеся должны уметь строить и исследовать простейшие математические модели (5.1 . Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры). Умение решать эти задачи позволяет проверить у выпускников наличие логического мышления, сообразительности и наблюдательности, а также способности к анализу полученных результатов. Цель учителя состоит в том, чтобы научить выпускников средней школы решать подобного рода задачи и прочно усвоить различные методы, применяемые в процессе их решения.

Говоря об анализе результатов ЕГЭ по математике прошлого года, эксперты сообщают, что хуже всего выпускники справляются с решением практических задач. «Выпускники не могут выяснить, сколько стоит билет с 50-процентной скидкой или какое наибольшее количество сырков по 7 рублей можно купить на 60 рублей», — сообщил председатель научно-методического совета по математике, член-корреспондент РАН, академик РАО Алексей Семенов. Причиной, по мнению руководителя федеральной комиссии разработчиков КИМ ЕГЭ по математике 2011—2012 годов Ивана Ященко, является неумение старшеклассников прочитать условия задачи и правильно их понять и интерпретировать. 25% ошибок, говорит он, были связаны именно с неправильной трактовкой условий. [4]

Анализируя результаты выполнения контрольных, тренировочных, диагностических работ можно сделать вывод, что определенные темы, вынесенные на экзамен по математике, для учащихся представляют определенную трудность, среди них «Текстовые задачи». 10% обучающихся к ним вообще не приступают, около 25% допускают ошибки в составлении уравнения или в решении дробно-рациональных уравнений. Часто не меньшую сложность представляют арифметические задачи, которые решаются по действиям без составления каких-либо уравнений.

Учитывая вышеизложенное, приходишь к выводу, что учеников необходимо вооружить алгоритмом решения текстовых задач. Для решения этих задач не надо обладать математическими способностями. Важно знать секреты, которые, как правило, ученику рассказывает учитель: «Текстовая задача В13 — легко! Алгоритм решения и успех на ЕГЭ».

Рассмотрим методику использования текстовых задач, предлагаемых в демоверсиях, в Открытом банке заданий по математике рассчитанных для выпускников средней школы при подготовке к ЕГЭ по математике.

Почему текстовые задачи В13 относятся к простым? Во-первых, все задачи В13 из банка заданий ФИПИ решаются по единому алгоритму. Во-вторых, все В13 однотипны — это задачи на движение или на работу. Главное — знать к ним подход. Всё, что нужно, — это здравый смысл плюс умение решать квадратное уравнение. Для решения этих задач не надо обладать математическими способностями. Важно знать секреты, которые, как правило, ученику рассказывает учитель.

Решение любой текстовой задачи складывается из трех основных моментов:

1. удачного выбора неизвестных;
2. составление уравнения и формализации того, что требуется найти;
3. решение полученного уравнения.

Для повышения мотивации обучающихся надо постоянно напоминать, что для превращения высказываний в тексте задачи в уравнение математических знаний вообще не надо – необходим лишь здравый смысл. Практическое, заземленное мышление на уровне торговли на базаре гарантирует успех на 100%. Важно обязательно сформулировать при помощи переменной, ЧТО надо найти. Кроме того, в текстовых задачах все величины, как правило, положительны (надо не забыть наложить ограничения). Выбирая неизвестные, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. [8]

При решении текстовых задач могут помочь несколько простых и общих советов. Первое прочтение задачи ознакомительное. Надо попытаться получить информацию и представить в другом виде – это может быть рисунок, таблица или просто краткая запись условия задачи. При решении задач короткую запись задачи можно сделать с помощью рисунка или таблицы. Таблица является универсальным средством и позволяет решать большое количество идейно близких задач.

Второе прочтение имеет своей целью выбор неизвестных, при этом не обращаем внимание на числа и «мелочи». Главное, чтобы неизвестные соответствовали условию задачи, при составлении соответствующей “математической модели” (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств). При третьем прочтении задачи следует ее условие расчленить на логические части и «посплетничать». Необходимо следить за тем, что соответствует каждой фразе текста задачи в полученной математической записи и чему в тексте задачи соответствует каждый “знак” полученной записи (сами неизвестные, действия над ними, полученные уравнения, неравенства или их системы). [9]

Очень важно не только составить уравнение, неравенство, систему уравнений или неравенств, но и решить составленное. Если решение задачи не получается, то нужно ещё раз прочитать и проанализировать задачу (заданный текст и полученную запись). Иногда по условию задачи достаточно отыскать не сами неизвестные, а их комбинации. Например, не *x* и *y*, а *x+y*, *x/y*, *1/x* и т.п. [1]

Можно выделить семь вопросов, которые дают верное направление решению задач разных типов.

1. О каком процессе идёт речь? Какими величинами характеризуется этот процесс? (Количество величин соответствует числу столбцов таблицы).
2. Сколько процессов в задаче? (Количество процессов соответствует числу строк в таблице).
3. Какие величины известны? Что надо найти? (Таблица заполняется данными задачи; ставится знак вопроса).
4. Как связаны величины в задаче? (Вписать основные формулы, выяснить связи и соотношения величин в таблице).
5. Какую величину (величины) удобно выбрать в качестве неизвестной или неизвестных? (Клетки в таблице заполняются в соответствии с выбранными неизвестными).
6. Какие условия используются для составления “модели”? (Выписать полученную “модель”)
7. Легко ли решить полученное? (Если решить сложно, ввести новые переменные, использовать другие соотношения). [16]

Все задачи, приведенные в этой работе, взяты из Банка заданий ФИПИ. Подобраны они так, чтобы представить все возможные типы заданий с таким номером (В13). [13]

**1. Задачи на движение**

Задачи на движение часто встречаются в вариантах ЕГЭ. Здесь всего два правила:

1. Все эти задачи решаются по одной-единственной формуле: $S=vt$, то есть расстояние = скорость $∙$ время. Из этой формулы можно выразить скорость $v=\frac{s}{t}$ или время $t=\frac{s}{v}$.

2. В качестве переменной *х* удобнее всего выбирать скорость. Тогда задача точно решится.

Основными типами задач на движение являются следующие:

1. задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку, с задержкой в пути),
2. задачи на движение по замкнутой трассе,
3. задачи на движение по воде,
4. задачи на среднюю скорость,
5. задачи на движение протяжных тел. [10]

**1.1. Задачи на движение по прямой**

Для начала очень внимательно читаем условие. В нем все уже есть. Помним, что текстовые задачи на самом деле очень просты.

*Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.*

Строим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист |  |  |  |
| автомобилист |  |  |  |

Про задачу необходимо «посплетничать»: читаем первую фразу и заполняем таблицу и т.д. Анализируем первую фразу «*из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист»*, мы можем заполнить первую колонку таблицы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | 50 |  |  |
| автомобилист | 50 |  |  |

Читаем дальше «и*звестно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста».* Вопрос задачи примем за *х*, а скорость автомобилиста на 40 км больше, чем велосипедиста, т.е. *х+40.* Заполняем следующую колонку таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | 50 | *х,*$ x>0$ |  |
| автомобилист | 50 | *х+40* |  |

Имеем только одну свободную колонку, значит, следует применить формулу $t=\frac{s}{v}$, и продолжить заполнение таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | 50 | *х* | $$\frac{50}{х}$$ |
| автомобилист | 50 | *х+40* | $$\frac{50}{х+40}$$ |

Читаем дальше «*известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа позже автомобилиста*».

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | 50 | *х* | $$\frac{50}{х}$$ |
| автомобилист | 50 | *х+40* | $$-\frac{50}{х+40}$$ |
| разница во времени |  |  | $$=4$$ |

Последний столбец позволит составить уравнение.

$\frac{50}{х}-\frac{50}{х+40}=4$. После приведения дробей к общему знаменателю, имеем $\frac{2000}{х(х+40)}=4$. Слабые ученики сталкиваются с трудность: какое дальше должно быть действие, но как правило практически все обучающиеся умеют решать пропорции, поэтому заменяем уравнение пропорцией. $\frac{2000}{х(х+40)}=\frac{4}{1}$, решаем квадратное уравнение *х2+40х-50=0 : х1=10* или *х2= - 50.* Ясно, что *х2* не подходит по смыслу задачи — скорость велосипедиста не должна быть отрицательной ($x>0)$. Ответ: 10.

 Задачи на задержку в пути решаются аналогично.

*Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.*

 «Сплетничаем»: читаем первую фразу и заполняем таблицу и т.д.

*«Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно»*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 |  |  |
| обратно | 70 |  |  |

Вопрос задачи: «*Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В»,* т.е. скорость туда принимаем за *х*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 | *х, х>0* |  |
| обратно | 70 |  |  |

«*он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней»*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 | *х, х>0* |  |
| обратно | 70 | *х+3* |  |

Имеем только одну свободную колонку, значит, следует применить формулу $t=\frac{s}{v}$, и продолжить заполнение таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 | *х, х>0* | $$\frac{70}{х}$$ |
| обратно | 70 | *х+3* | $$\frac{70}{х+3}$$ |

Последняя колонка заполнена, значит, в последней фразе будет указание, как составить уравнение: «*По дороге он сделал остановку на 3 часа».*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 | *х, х>0* | $$\frac{70}{х}$$ |
| обратно | 70 | *х+3* | $$\frac{70}{х+3}$$ |
| остановка |  |  | 3 |

*«В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В».*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| туда | 70 | *х, х>0* | $\frac{70}{х}$ = |
| обратно | 70 | *х+3* | $\frac{70}{х+3}$ + |
| остановка |  |  | +3 |

Имеем уравнение $\frac{70}{х}$ = $\frac{70}{х+3}$+3, $\frac{70}{х}-$ $\frac{70}{х+3}= $3, приводим дроби к одному

знаменателю: $\frac{70∙3}{х(х+3)}=\frac{3}{1}$, *х2+3х-70=0, х1=*7 (это вполне правдоподобная скорость велосипедиста). А ответ  *х2=10* не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна. Ответ: 7.

**1.1.2. Задачи на движение по прямой навстречу**

Задачи на встречное движение для слабых обучающихся решаются по той же схеме, что и прочие задачи на движение.

Прототип задания B13 (№ 99590)*. Расстояние между городами A и B равно 435 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.*

«Сплетничаем»: *Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B*. Движение 1 автомобиля разделено на 2 отрезка пути. *Навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль.* Заполняем клетки таблицы, не забывая, что надо найти «*на каком расстоянии от города A автомобили встретятся».*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| А $\rightarrow $В | 1 часть  |  | 60 + | ? | 60 | 1 |
| 2 часть до встречи |  | +60*х* | 60 | *х, х>0* |
| В $\rightarrow $А | до встречи | 65*х* | 65 | *х* |

Последний столбец заполненный дает подсказку, как составить уравнение. Осталось не использованное 1 условие задачи: «*Расстояние между городами A и B равно 435 км*». Значит, надо заполнить колонку до конца.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| А $\rightarrow $В | 1 часть  |  | 60 + | ? | 60 | 1 |
| 2 часть до встречи |  | + 60*х* + | 60 | *х, х>0* |
| В $\rightarrow $А | до встречи | + 65*х =* | 65 | *х* |
|  | весь путь | = 435 |  |  |

Получили уравнение 60 + 60*х* + 65*х =* 435, 125*х =*375, *х =* 3. Ответ на вопрос задачи 60 + 60*х =* 60(1+ *х*) = 60(1+3)=240.

Ответ: 240.

 Для сильных учащихся необходимо напомнить, что если расстояние между телами *S,* а их скорости *v1* и *v2*, то время, через которое они встретятся, находится по формуле $t=\frac{S}{v\_{1 }+ v\_{2}}$ . Поэтому задача решается арифметически:

1. 60$∙$1=60 (км) – путь, пройденный 1 автомобилем за 1 ч.
2. 435 – 60 = 375 (км) – расстояние между автомобилями при встречном движении.
3. 60 + 65 = 125 (км/ч) – скорость сближения.
4. 375 : 125 = 3 (ч) – время, через которое произошла встреча.
5. 1+3 = 4 (ч) – время движения 1 автомобиля.
6. 60$∙$4 = 240 (км)

Ответ: 240.

**1.1.3. Задачи на движение по прямой вдогонку**

Задачи на движение вдогонку для слабых обучающихся решаются аналогично.

Прототип задания B13 (№ 99595) *. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?*

«Сплетничаем»: *Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго.* Составляем таблицу и анализируем условие по данной фразе. 300 м = 0,3 км. И продолжаем заполнение: «*Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?*»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| I | *t(х+1,5) -*  | *х+1,5,*  | *t, t>0 ?* |
| II | *- t х =* | *х, х>0* | *t* |
|  | 0,3 |  |  |

Получим уравнение *t(х+1,5) - t х =*0,3, 1,5*t =* 0,3, *t=*0,2. Ответили ли мы на вопрос: «*Через сколько минут*»? 0,2 ч = 0,2$∙$60 мин = 12 мин.

Ответ: 12.

 Для сильных учащихся необходимо напомнить, что если расстояние между телами *S,* они движутся по прямой со скоростями *v1* и *v2* соответственно (*v1* > *v2*)так, что первое тело следует за вторым, то время *t*, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t=\frac{S}{v\_{1 }- v\_{2}}$ . Поэтому задача решается арифметически: *t=*$\frac{0,3}{1,5}$, *t=*0,2 ч, т.е. 12 мин.

**1.2. Задачи на движение по замкнутой трассе**

 Как правило, вызывают затруднения задачи на движения по замкнутой трассе (по окружности). Решаются они почти так же, как и обычные задачи на движение. В них тоже применяется формула $S=vt$. Но есть одна хитрость.

Прототип задания B13 (№ 99599) *Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.*

 Во-первых, переведем минуты в часы, поскольку скорость надо найти в км/ч. Скорости участников обозначим за *х* и *у*. В первый раз мотоциклист обогнал велосипедиста через 10 минут, то есть через $\frac{1}{6}$ часа после старта. До этого момента велосипедист был в пути 40 минут, то есть $\frac{2}{3}$ часа. Запишем эти данные в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I встреча | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | $\frac{2}{3}$*х* = | *х, х>0* | $$\frac{2}{3}$$ |
| мотоциклист | =$\frac{1}{6}$ *у* |  | *у, у>0* ? | $$\frac{1}{6}$$ |

Имеем $\frac{1}{6}$ *у =*$ \frac{2}{3}$ *х,* т.е. $\frac{у}{6}$ = $\frac{2х}{3}$ , *у =*4 *х.*

Затем мотоциклист второй раз обогнал велосипедиста. Произошло это через 30 минут, то есть через $\frac{1}{2}$ часа после первого обгона.

Заполним вторую таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| II встреча | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| велосипедист | $\frac{1}{2}$ *х*= $\frac{х}{2}$ | *х, х>0* | $$\frac{1}{2}$$ |
| мотоциклист | $$\frac{1}{2}∙4х=2х$$ |  | 4 *х* ? | $$\frac{1}{2}$$ |

А какие же расстояния они проехали? Мотоциклист обогнал велосипедиста. Значит, он проехал на один круг больше. Это и есть секрет данной задачи. Один круг — это длина трассы, она равна 30 км. Получим второе уравнение: 2*х -* $\frac{х}{2}$= 30, 1,5*х =* 30, *х*, 4*х=* 80.

Ответ: 80.

Прототип задания B13 (№ 99600). *Часы со стрелками показывают*

 *8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?*

 Это, пожалуй, самая сложная задача В13. За один час минутная стрелка проходит один круг, а часовая $\frac{1}{12}$ часть круга. Пусть их скорости равны

1 круг/ ч и $\frac{1}{12}$ круг/ч. Старт — в 8:00. Найдем время, за которое минутная стрелка в первый раз догонит часовую.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I встреча | *S*, круг | *v,* $^{круг}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| минутная | 1 | 1 | 1 |
| часовая | $$\frac{1}{12}$$ | $$\frac{1}{12}$$ | 1 |
| минутная | 1 *t -* | 1 | *t* |
| часовая | *-* $\frac{1}{12}$ *t =* | $$\frac{1}{12}$$ | *t* |
| разница в пути | = $\frac{2}{3}$ |  |  |

Минутная стрелка проходит за 1 час 1 круг, а часовая меньше на $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ круга, поэтому уравнение будет таким: *t -* $\frac{t}{12}$ *=* $\frac{2}{3}$ . Решив его, получим, что *t* = $\frac{8}{11}$ часа. Итак, в первый раз стрелки поравняются через $\frac{8}{11}$ часа.

Пусть во второй раз они поравняются через время *t1* , разница в пройденном пути составит 1 круг.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| II встреча | *S*, круг | *v,* $^{круг}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| минутная | 1 *t1 -* | 1 | *t1* |
| часовая | *-* $\frac{1}{12}$ *t1* *=* | $$\frac{1}{12}$$ | *t1* |
| разница в пути | = $1$ |  |  |

Запишем уравнение: *t1 -* $\frac{t1 }{12}$= 1, *t1 =* $\frac{12}{11}$ *.* Итак, через $\frac{12}{11}$ часа стрелки поравняются во второй раз, еще через $\frac{12}{11}$ часа — в третий, и еще через $\frac{12}{11}$ часа — в четвертый. Значит, если старт был в 8.00, то в четвертый раз стрелки поравняются через $\frac{8}{11}$ + 3$∙$ $\frac{12}{11}$ = 4 часа.

**1.3. Задачи на вычисление средней скорости**

В Открытом банке данных встречаются задачи на вычисление средней скорости. [2, 3, 11, 13]

Прототип задания B13 (№ 99606). *Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч, а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.*

Обучающиеся должны знать, что средняя скорость не равна среднему арифметическому скоростей. Она находится по специальной формуле: *vсредмн*=$\frac{S\_{средн}}{t\_{средн}}$ . Если участков пути было два, то *vсредмн*= $\frac{S\_{1 }+S\_{2 }}{t\_{1}+ t\_{2}}$

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| I часть пути | 50$∙$2 | 50 | 2 |
| II часть пути | 100$∙$1 | 100 | 1 |
| III часть пути | 75$∙$2 | 75 | 2 |
| Средние значения | 50 + 100 + 150 | $$\frac{50+100+150}{2+1+2}$$ | 2+1+2 |

Итак, *vсредмн* = $\frac{300}{5}$, *vсредмн* = 60.

Ответ: 60.

**1.4. Задачи на движение по реке**

 Следующий тип задач — когда что-нибудь плавает по реке, в которой есть течение. Например, теплоход, катер или моторная лодка. Обычно в условии говорится о собственной скорости плавучего судна и скорости течения. Собственной скоростью называется скорость в неподвижной воде. Течение помогает, по течению плыть — быстрее. Скорость при движении по течению равна сумме собственной скорости судна и скорости течения. А если двигаться против течения? Течение будет мешать, относить назад. Теперь скорость течения будет вычитаться из собственной скорости судна. Скорость плота считается равной скорости течения реки. [14]

Прототип задания B13 (№ 99602)*. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.*

«Сплетничаем»: *Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления.*

*Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч.* Пусть скорость лодки в неподвижной воде *х* $^{км}/\_{ч}$*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| против течения | 255 | *х - 1, х>1* | $$\frac{255}{х-1}$$ |
| по течению | 255 | *х + 1* | $$\frac{255}{х+1}$$ |

К последнему столбцу надо применить последнее данное: «*вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше».*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| против течения | 255 | *х - 1, х>1* | $\frac{255}{х-1}$ *-* |
| по течению | 255 | *х + 1* | *-* $\frac{255}{х+1}$ = |
| разница во времени |  |  | = 2 |

Получаем уравнение: $\frac{255}{х-1}$ *-* $\frac{255}{х+1}$ = 2. $\frac{255\left(х+1\right)-255(х-1)}{\left(х-1\right)(х+1)}=2$, $\frac{255(х+1-х+1)}{\left(х-1\right)(х+1)}=2,$

$\frac{255∙2}{х^{2}-1}$ = 2, $х^{2}=256$, х1 =16 и х2 = *-*16 ( не удовлетворяет ограничению *х>1*).

Прототип задания B13 (№ 26588). *Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| по течению  | 200 | 15 *+ х* | $\frac{200}{15+х}$ + |
| стоянка | 0 | 0 | + 10 + |
| против течения | 200 | 15 *- x,* 0*<х<*15 | + $\frac{200}{15-х}$ = |
| затрачено времени |  |  | = 40 |

Получаем уравнение: $\frac{200}{15-х}$ + $\frac{200}{15+х}$ + 10 = 40, решая, получим *х2* = 25, т.е. х1 = 5 и х2 = *-* 5 (не удовлетворяет ограничению 0*<х<*15).

Ответ: 5.

Прототип задания B13 (№ 26587). *Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.*

Пусть скорость течения равна *х км/ч*. Сколько времени баржа плыла? Ясно, что надо из 16 вычесть 10. 1 час 20 минут = 1$ \frac{1}{3}$ часа = $\frac{4}{3}$ ч.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
| по течению  | 15 | 7*+ x*  | $\frac{15}{7+х}$ + |
| стоянка | 0 | 0 | + $\frac{4}{3}$ + |
| против течения | 15 | 7 *- х,* 0*<х<*7 | + $\frac{15}{7-х}$ = |
| затрачено времени |  |  | = 6 |

Решив задачу, получаем х1 =2 и х2 = *-*2 (не удовлетворяет ограничению 0*<х<*7).

Ответ: 2.

**1.5. Задачи на движение протяжных тел**

У обучающихся вызывают больше всего затруднения задачи на движение протяжных тел.

 Прототип задания B13 (№ 99611). *По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.*

 «Сплетничаем»: *По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда.*  Речь идет о скорости удаления, т.е.

*v1 + v2* = 90 км/ч+ 30 км/ч = 120 км/ч = $\frac{120000}{3600}$ м/с = $\frac{100}{3}$ м/с

 (90 км/ч = $\frac{90000}{3600}$ м/с = $25$ м/с, 30 км/ч = $\frac{25}{3}$ м/с).

«*Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда».* Пусть длина пассажирского поезда *х* м.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, м | *v,* $^{м}/\_{с}$ | *t,* с |
| пассажирский | *х* ? | 25 |  |
| товарный | 600 | $$\frac{25}{3}$$ |  |
| совместное движение | *х +* 600 | $$\frac{х + 600}{30}=\frac{100}{3}$$ | 30 |

$\frac{х + 600}{30}=\frac{100}{3}$*, х +* 600 =1000, *х =* 400.

Ответ: 400.

Прототип задания B13 (№ 99612). *По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 75 км/ч и*

*55 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 300 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 18 секундам. Ответ дайте в метрах.*

 «Сплетничаем»: *По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда.*  Речь идет о скорости сближения, т.е. *v1 + v2* = 75 км/ч *+* 55 км/ч = 130 км/ч = $\frac{130000}{3600}$ м/с=

= $\frac{325}{9}$ м/с (75 км/ч = $\frac{75000}{3600}$ м/с = $\frac{375}{18}$ м/с, 55 км/ч = $\frac{275}{18}$ м/с). «*Длина пассажирского о поезда равна 300 метрам. Найдите длину скорого поезда».*

Пусть длина скорого поезда *х* м.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, м | *v,* $^{м}/\_{с}$ | *t,* с |
| скорый | *х* ? | $$\frac{375}{18}$$ |  |
| пассажирский | 300 | $$\frac{275}{18}$$ |  |
| совместное движение | *х +* 300 | $$\frac{х + 300}{18}=\frac{325}{9}$$ | 18 |

Получили уравнение $\frac{х + 300}{18}=\frac{325}{9}$, *х +* 300 = 650, *х =* 350. Ответ: 350.

**2. Задачи на работу**

Еще один тип задач В13, встречающийся в вариантах ЕГЭ по математике *-* это задачи на работу. Они также решаются с помощью одной-единственной формулы: *А= p*$∙$*t*. Здесь *A* *-* работа, *t* *-* время, а величина *p*, которая по смыслу является скоростью работы, носит специальное название *-* производительность. Она показывает, сколько работы сделано в единицу времени. Например, продавец в супермаркете надувает воздушные шарики. Количество шариков, которые он надует за час *-* это и есть его производительность. [5, 7, 11 – 15]

Правила решения задач на работу очень просты.

1. *А= p*$∙$*t*, т.е. работа = производительность$∙$время. Из этой формулы легко найти t или *p=*$\frac{А}{t}$.
2. Если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти *-* работа принимается за единицу. Построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, страниц или построенных домов *-* работа как раз и равна этому количеству.
3. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода...) *-* их производительности складываются.
4. В качестве переменной удобно взять именно производительность.

Прототип задания B13 (№ 26594). *На изготовление 475 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?*

По аналогии с задачами на движение, составляем таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *S*, км | *v,* $^{км}/\_{ч}$ | *t,* ч |
|  | *А,* дет | $$\frac{А}{t}^{дет}/\_{ч}$$ | *t,* ч |
|  | *А,* дет | $$\frac{А}{t}^{дет}/\_{ч}$$ | *t,* ч |
| I рабочий | 475 |  | *х +* 3 ? |  | $\frac{475}{х+3} $= |
| II рабочий | 550 | *х*  | $\frac{550}{х}$ *-* |
| Разница во времени |  |  | *-* 6 |

 Полученное уравнение лучше записать $\frac{550}{х} -\frac{475}{х+3}=6.$ $\frac{75х + 550∙3 }{х(х+3) }$= 6, 25*х+*550=2(*х2 +* 3*х*)*,* 2*х2 +* 6*х –* 25*х –* 550 = 0, 2*х2 -* 19*х –* 550= 0, *х1=-*12,5 (не подходит по смыслу задачи), *х2=*22. *х +* 3 = 25.

Ответ: 25.

 Прототип задания B13 (№ 26596). *Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?*

В этой задаче (в отличие от предыдущей) ничего не сказано о том, что это за работа, чему равен ее объем. Значит, работу можем принять за единицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *А,* раб | $$\frac{А}{t}^{раб}/\_{дн}$$ | *t,* дн |
| I рабочий | 1 | $\frac{1}{х}$ + |  | *х*  |  |
| II рабочий | 1 | + $\frac{1}{у}$ = | $$у$$ |
| I + II | 1 | = $\frac{1}{12}$ | 12 |
| I рабочий |  | $\frac{2}{х}$*=* |  | $$\frac{1}{х}$$ | 2 |
| II рабочий |  | = $\frac{3}{у}$ |  | $$\frac{1}{у}$$ | 3 |

$\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{х}=\frac{3}{у}\\\frac{1}{х}+\frac{1}{у}=\frac{1}{12}\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{х }-\frac{3}{у}=0\\\frac{3}{х}+\frac{3}{у}=\frac{1}{12}\end{array}\right.$; $\frac{5}{х}= \frac{1}{12},$ *х=*60.

Ответ: 60.

 Всевозможные задачи про две трубы, которые наполняют какой-либо резервуар для воды *–* это тоже задачи на работу. В них также фигурируют величины производительность, время и работа.

Прототип задания B13 (№ 26597). *Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *А,* л | $$\frac{А}{t}^{л}/\_{мин}$$ | *t,* мин |
| I труба | 110 |  | *х* ? |  | $\frac{110}{х}–$  |
| II труба | 110 | *х +*1 | *-* $\frac{110}{х+1}$*=* |
| Разница во времени |  |  | *=* 1 |

$\frac{110}{х}$ *–* $\frac{110}{х+1}$*=*1, *х 2* + *х –* 110 = 0, *х1 =*10, *х2 = –*11 (не подходит по смыслу задачи).

Ответ: 10.

Прототип задания B13 (№ 99616). *Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?*

Здесь работают трое, и переменных будет тоже три. Пусть *х* $-$производительность Игоря, *у* $-$ производительность Паши, а z $-$ производительность Володи. Забор, то есть величину работы, примем за 1, т.к. мы ничего не можем сказать о его размере.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *А,* забор | $$\frac{А}{t},^{забор}/\_{ч}$$ | *t,* ч |
| Игорь | 1 | *х* |  |
| Паша | 1 | *у* |  |
| Володя | 1 | z |  |
|  |
|  | *А,* забор | $$\frac{А}{t},^{забор}/\_{ч}$$ | *t,* ч |
| И + П  | 9(*х + у*) = 1 | *х + у* | 9 |
| П + В | 12(*у +* z) = 1 |  *у +* z | 12 |
| В + И | 18(*х +* z) = 1 | *х +* z | 18 |
| И + П + В | 1 | *х + у +* z |

|  |
| --- |
| $$\frac{1}{х + у + z} ?$$ |

 |

$\left\{\begin{array}{c}9(х + у) = 1,\\12(у + z) = 1,\\18(х + z) = 1,\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}9(х + у) = 1,\\12(у + z) = 1,\\18(х + z) = 1,\end{array}\right. $2(*х + у +* z) = $\frac{1}{9}$ *+* $\frac{1}{12}$ *+*$\frac{1}{18}$ *, х + у +* z= $\frac{1}{8}$,

$\frac{1}{х + у + z}$ = 8.

Ответ: 8.

Задание В13 пополнилось новыми задачами. Теперь оно включает в себя практически все типы текстовых задач, которые раньше предлагались на вступительных экзаменах в вузы. Кроме привычных задач на движение и работу, появились задания на проценты, на растворы, сплавы и смеси.

**3. Задачи на проценты**

Основными типами задач на проценты являются следующие:

1. задачи на растворы, смеси и сплавы,
2. задача «о продуктах» (о процентном содержании какого – либо вещества),
3. задачи на формулу сложных процентов.

**3.1. Задачи на растворы, смеси и сплавы**

Тип задач на растворы, смеси, сплавы встречаются не только в математике, но и в химии. Самый простой способ их решения – это при решении задач короткую запись задачи можно сделать с помощью таблицы. Таблица является универсальным средством и позволяет решать большое количество идейно близких задач с использованием аналогий.

Прототип задания B13 (№ 99571). *В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?*

После первого прочтения задачи строим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, л (100%) | Часть количества(чистое вещество), л | % содержаниечистого вещества |
| I (вещество) |  |  |  |
| II (вода) |  |  |  |
| I + II (раствор) |  |  |  |

Разбиваем текст на логические части и анализируем. *В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества.* I-го вещества 5 л, % содержание – 12%

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, л(100%)  | Часть количества(чистое вещество), л | % содержаниечистого вещества |
| I (вещество) | 5 |  | 12 |
| II (вода) |  |  |  |
| I + II (раствор) |  |  |  |

Заполнены две ячейки строки, необходимо заполнить последнюю ячейку. Задачи на пропорции даже слабые учащиеся решают хорошо, поэтому, не запоминая формул, составляем пропорцию:

 5 л – 100% $\frac{5}{х }= \frac{100}{12}$ , *х* = $\frac{60}{100}$ . Лучше пока не сокращать дробь.

 *х* л – 12% Продолжаем заполнение таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, л(100%) | Часть количества(чистое вещество), л | % содержаниечистого вещества |
| I (вещество) | 5 | $\frac{60}{100}$  | 12 |
| II (вода) |  |  |  |
| I + II (раствор) |  |  |  |

Фраза *«добавили 7 литров воды»* говорит о том, что она имеет 0% концентрации, т.е. в ней не содержится чистого вещества. Значит, в строке II (вода) кроме первой ячейки (7 л), следует поставить «0». Ответ на вопрос задачи «*Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?»* поможет найти слово «*добавили»*, т.е. речь идет о сумме I + II (раствор). Заполняем таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, л(100%) | Часть количества(чистое вещество), л | % содержаниечистого вещества |
| I (вещество) | 5 | $\frac{60}{100}$  | 12 |
| II (вода) | 7 | 0 | 0 |
| I + II (раствор) | 5+7=12 | $\frac{60}{100}$ + 0 = $\frac{60}{100}$ |

|  |
| --- |
| ? |

 |

Важно постоянно напоминать обучающимся, что в смесях, растворах и сплавах % содержание не является средним арифметическим (аналогия со средней скоростью, определением времени при общей работе и т.п.). Опять используем умение решать задачи на пропорции.

 12 л – 100% $\frac{12}{0,6}= \frac{100}{у}$ , *у* = $\frac{60}{12}$ , *у* = 5.

 $\frac{60}{100}$л – *у* %

Ответ: 5.

Прототип задания B13 (№ 99572). *Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?*

«Сплетничаем»: *Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества.* Вспомним, что если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти *-* работа принимается за единицу. Аналогично, если объем раствор не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти *–* объем раствора принимается за единицу *х*. Пусть масса первого раствора равна 1. Масса второго – тоже 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, (100%) | Часть количества(чистое вещество) | % содержаниечистого вещества |
| I  | 1 *+* | $\frac{15}{100}$ + | 15 |
| II  | *+* 1 *=* | + $\frac{19}{100}$ = | 19 |
| I + II  | = 2 | = $\frac{34}{100}$ |

|  |
| --- |
| *х* ? |

 |

Составляем пропорцию.

 2 – 100% *х* = $\frac{34}{2}$ , *х =* 17.

 $\frac{34}{100}$ – *х* % Ответ: 17.

Прототип задания B13 (№ 99575). *Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?*

«Сплетничаем»: *Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля.* Пусть масса первого сплава равна *х*, т.к. I + II 200 кг, тогда масса II сплава (200 – *х*) кг.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, кг(100%) | Часть количества(никель), кг | % содержаниеникеля |
| I  | *х* | $\frac{10}{100}$*х +* | 10 |
| II  | 200 – *х* | + $\frac{30}{100} \left(200 – х\right)=$ | 30 |
| I + II  | 200 | = 50 | 25 |

$\frac{10}{100}$*х*+ $\frac{30}{100} \left(200 – х\right)=$ 50, $\frac{10}{100}$*х –* $\frac{30}{100}$*х+*60=50, 0,2*х* = 10, *х* = 50.

В таблице нет знака вопроса, значит, ответа на вопрос задачи мы не получили. Читаем вопрос: «*На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?*»

1. 200 – 50 = 150 (кг) – масса второго сплава.
2. 150 – 50 = 100 (кг).

Ответ: 100.

 Прототип задания B13 (№ 99577). *Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, кг(100%) | Часть количества(чистое вещество), кг | % содержание чистого вещества |
| I (кислота) |

|  |
| --- |
| *х* ? |

 | $\frac{30}{100}$*х +* | 30 |
| II (кислота) | *у* | *+* $\frac{60}{100}$ *у +* | 60 |
| III (вода) | 10 | + 0 = | 0 |
| I + II + III | *х + у +* 10 | = $\frac{36}{100}∙(х+у+10)$ | 36 |
| I (кислота) |

|  |
| --- |
| *х* ? |

 | $\frac{30}{100}$*х +* | 30 |
| II (кислота) | *у* | *+* $\frac{60}{100}$ *у +* | 60 |
| III (кислота) | 10 | + 5 | 50 |
| I + II + III | *х + у +* 10 | = $\frac{41}{100}∙(х+у+10)$ | 41 |

$\left\{\begin{array}{c}\frac{30}{100}х + \frac{60}{100} у= \frac{36}{100}∙(х+у+10), \\\frac{30}{100}х + \frac{60}{100} у+5= \frac{41}{100}∙(х+у+10), \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}30х + 60 у=36х+36у+360, \\30х+60 у+500 =41х+41у+410, \end{array}\right.$

5*х* + 5*у =* 450, *х + у =*90, *у =* 90 –*х.* Из первого уравнения системы 4*у* – *х* = 60,

360 – 4*х* – *х* = 60, *х* = 60.

Ответ: 60.

**3.2. Задачи «о продуктах»**

Если встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов урюк, из хлеба сухари или из молока творог – на самом деле это задача на растворы. Виноград мы тоже можем условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху мы могли бы понять, что это именно виноград, а не картошка. Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. [5, 6, 7, 11 – 15]

Прототип задания B13 (№ 99574). *Виноград содержит 90% влаги, а изюм* – *5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?*

В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме 5% воды и 95% «сухого вещества». «Сухое вещество» остается неизменным.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Всё количество, кг(100%) | Часть количества(сухое вещество), кг | % содержаниесухого вещества |
| виноград |

|  |
| --- |
| *х* ? |

 | $\frac{10}{100}$*х=* | 100 – 90 = 10 |
| изюм | 20 | = $\frac{95}{100}∙20$ | 100 –5 = 95 |

$\frac{10}{100}$*х =* $\frac{95}{100}∙20$*, х=*190.

Ответ: 190.

**3.3. Задачи на формулу сложных процентов**

Для выполнения заданий на проценты необходимо важное правило: за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем, а также полезны формулы:

1. если величину *х* увеличить на *р*%, получим *х*($1+\frac{p}{100})$.
2. если величину *х* уменьшить на *р*%, получим *х*($1-\frac{p}{100})$.
3. если величину *х* увеличить на *р*%, а затем уменьшить на *q%*, получим*х*($1+\frac{p}{100})$. ($1-\frac{p}{100})$.
4. если величину *х* дважды увеличить на *р*%, процентов, получим *х*($1+\frac{p}{100})$2.
5. если величину *х* дважды уменьшить на *р*%, процентов, получим *х*($1-\frac{p}{100})$2  [11 – 15]

 Воспользуемся ими для решения задач В13.

Прототип задания B13 (№ 99565). *В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?*

40000($1+\frac{8}{100})$.($1+\frac{9}{100})$ = 47088

Ответ: 47088.

 Прототип задания B13 (№ 99566). *В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?*

На первый взгляд слабым учащимся, кажется, что в условии ошибка и цена акций вообще не должна измениться. Ведь они подорожали и подешевели на одно и то же число процентов! Но это не так. Пусть при открытии торгов в понедельник акции стоили *х* рублей. К вечеру понедельника они подорожали на *р*% и стали стоить *х*($1+\frac{p}{100})$. Теперь уже эта величина принимается за 100%, и к вечеру вторника акции подешевели на *р*% по сравнению этой величиной. Соберем данные в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | в понедельник утром | в понедельник вечером | во вторник вечером |
| Стоимость акций | *х* | *х*($1+\frac{p}{100})$ | *х*($1+\frac{p}{100})$.($1-\frac{p}{100})=$ |
| Результат |  |  | *= х*($1-\frac{4}{100})$ |

*х*($1+\frac{p}{100})$.($1-\frac{p}{100})=$ *х*($1-\frac{4}{100})$ , 1 $-\frac{p^{2}}{100^{2}}$ = $1-\frac{4}{100}$ , $p^{2}=400$, по смыслу задачи *р*>0, значит *р*=20.

Ответ: 20.

Прототип задания B13 (№ 99569). *Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.*

Холодильник стоил 20000 рублей, его цена два раза уменьшилась на *р*%. Для решения применим формулу *х*($1+\frac{p}{100})$2 = 20000($1+\frac{p}{100})$2 , но «*через два года был продан за 15842 рублей».* Имеем

20000($1-\frac{p}{100})$2 = 15842,

($1-\frac{p}{100})$2 =$ \frac{15842}{20000}$,

($1-\frac{p}{100})$2 = $\frac{7921}{10000}$ , по смыслу задачи $1-\frac{p}{100}$ = $\frac{89}{100}$ , *р* = 11.

Ответ: 11.

 Прототип задания B13 (№ 99567). *Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?*

 Пусть стоимость рубашки равна *х*, стоимость куртки *у*. Как всегда, принимаем за сто процентов ту величину, с которой сравниваем, то есть цену куртки. Тогда стоимость четырех рубашек составляет 100 – 8 = 92% =$ \frac{92}{100}$ от цены куртки, то есть 4*х =* 0,92*у, х =*0,23*у*, 5*х* =1,15*у* , но 1,15*=*$\frac{115}{100}$ = 115%, т.е. 5 рубашек на 15% дороже куртки (т.к. цену куртки приняли за 100%).

Ответ: 15.

 Прототип задания B13 (№ 99568). *Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?*

Заполним таблицу. Ситуации, о которых говорится в задаче («если бы зарплата мужа увеличилась, если бы стипендия дочки уменьшилась...») назовем «ситуация А» и «ситуация В».

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | муж | жена | дочь | Общий доход |
| В реальности | *х* | *у* | z | *х + у +* z |
| Ситуация А | 2*х* | *у* | z | 1,67( *х + у +* z) |
| Ситуация В | *х* | *у* | $\frac{1}{3}$ z | 0,96(*х + у +* z) |

$\left\{\begin{array}{c}2х + у+z=1,67(х+у+z), \\х+у+\frac{1}{3} z=0,96\left(х+у+z\right). \end{array}\right.$

Но что мы видим? Два уравнения и три неизвестных! Мы не сможем найти *х*, *у* и z по отдельности. Правда, нам это и не нужно. «*Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?*» Лучше возьмем первое уравнение и из обеих его частей вычтем сумму *х + у +* z. Получим

 *х =* 0,67(*х + у +* z) Это значит, что зарплата мужа составляет 67% от общего дохода семьи.

Во втором уравнении мы тоже вычтем из обеих частей выражение *х + у +* z, упростим и получим, что z = 0,06(*х + у +* z). Значит, стипендия дочери составляет 6% от общего дохода семьи. Тогда зарплата жены составляет 100% $– 67\% -6\%= $27% общего дохода.

Ответ: 27.

В моей работе я разобрала практически все типы задания В13, мной не рассмотрены задачи на прогрессии, т.к. для их решения применяется другие алгоритмы.

**Заключение**

 В «Примерной программе основного общего образования по математике» дана «Общая характеристика учебного предмета», в которой отмечено, что «… одной из основных задач изучения алгебры является развитие алгоритмического мышления». А изучение основных типов текстовых задач и является одной из составляющих в развитии алгоритмизации мышления.

Решение текстовых задач способствует, с одной стороны, закреплению на практике приобретённых умений и навыков, с другой стороны, развитию логического мышления учащихся. При правильной организации работы у учащихся развивается активность, наблюдательность, находчивость, сообразительность, смекалка, развивается абстрактное мышление, умение применять теорию к решению конкретных задач.

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Поэтому этому уделяется много внимания (уже в первом классе обучащиеся начинают решать текстовые задачи). Связи с ведением ЕГЭ в 11 классе и экзаменом в новой форме в 9 классе это стало ещё более актуальным. Умение решать ту или иную задачу зависит от многих факторов. Однако, прежде всего необходимо научиться различать основные типы задач и находить ответ для простейших из них.

Без конкретной программы деятельности для учащихся, без алгоритмов или общих указаний по поиску решения задач, трудно организовать процесс учения детей, т.к. этот процесс имеет своими составными частями подражание и последующее творчество. Неосознанные навыки быстро утрачиваются. Лишь те навыки, которые доведены до автоматизма, или сохранили теоретическую основу, надолго остаются действенными. Я придерживаюсь в своей деятельности такого метода работы над задачами, когда ученик твёрдо усвоил основные приёмы решения задач и знает их основные типы. Эти приёмы и способы вырабатываются в процессе изучения той или иной темы и только впоследствии используются как алгоритм решения. Как показала практика, этот метод хорош при работе со слабыми и средними по успеваемости учениками. Они запоминают по различным признакам схему решения образца, решают определённый класс задач. Для более подготовленных учеников этот этап работы проходит быстро, без затруднений, они уже на начальной стадии изучения способны «ухватить» метод и применить его в более сложных ситуациях. Им даются уже более сложные задания, требующие не только автоматического применения основных приёмов, но и нетрадиционного подхода, смекалки.

**Список литературы**

1. Дорофеев Г., М.Потапов, Н.Розов «Математика для поступающих в вузы». М., Дрофа, 2003.
2. «ЕГЭ 3000 задач с ответами. Математика. Все задания группы В. Закрытый сегмент» Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. М., «Экзамен», 2011.
3. «Единый государственный экзамен. Типовые экзаменационные варианты. Математика» Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. М., Национальное образование. 2011.
4. Зиганшина Н. «Они не умеют считать без калькулятора» 21.04.11, <http://www.gazeta.ru/social/2011/04/21/3591189.shtml>
5. Крамор В.С. «Задачи на составление уравнений и методы их решения». М., Оникс – Мир и образование, 2009.
6. Крамор В.С. «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа». М., Просвещение, 1990.
7. Соломинская И.С., Соломинский Л.И. «Математика. Решение текстовых задач. Экспресс-репетитор для подготовке к ЕГЭ». М., АСТ-Астрель, 2010.
8. Ткачук В.В. «Математика – абитуриенту. Все о вступительных экзаменах в вузы». М., МЦНМО, 2007.
9. Черкасов О., Якушев А. «Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену (скорая помощь абитуриентам)». М., Айрис-пресс, 2003.
10. Шарыгин И.Ф. «Математика для поступающих в вузы». М., Дрофа, 2006.
11. Шестаков С.А., Гущин Д.Д. Рабочая тетрадь «ЕГЭ 2011. Математика. Задача В12». Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. М., МЦНМО, 2010.
12. <http://le-savchen.ucoz.ru>
13. <http://mathege.ru>
14. [http://www.ege-study.ru](http://www.ege-study.ru/ege-materials/math.html)
15. [http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/«metodicheskie-rekomendatsii-obucheniya-uchashchikhsya-resheniyu-zadach-s-kra](http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/)
16. <http://festival.1september.ru/articles/103564/>