**Метод проблемного обучения в современной школе на уроках математики**

**Статья отнесена к разделу:**[Преподавание математики](http://festival.1september.ru/articles/subjects/1), [Общепедагогические технологии](http://festival.1september.ru/articles/subjects/21)

*«Каждый человек видит тем больше нерешённых* *проблем, чем обширнее круг его знаний».*

С.Л.Рубинштейн

Обучение школьников ставить вопросы(проблемы) – важнейший фактор роста качества обучения, средство подготовки к творчеству, труду.

**Умственное воспитание** предполагает:

* овладение школьниками знаниями;
* овладение умениями правильно оперировать полученными знаниями, логически мыслить;
* развитие инициативы, умения принимать решения, не останавливаться на достигнутом;
* формирование творческого отношения к труду;
* формирование мотивов умственной деятельности.

Уровень развития умственных способностей всегда определяет способность правильно мыслить, достигать успехов в решении проблем.
Задача учителя научить школьника не только понимать, но и мыслить.
Для этого надо развивать способности школьников.Это развитие обеспечивает возможность самостоятельно овладевать знаниями. Но умственная деятельность должна быть, прежде всего, мотивирована. Необходимы аргументы средства, побуждающие школьника активно действовать на уроке.
У Плутарха есть известная притча о работниках,которые везли тачки с камнями. Работников было трое. К ним подошёл человек и задал каждому и них один и тот же вопрос: «Чем ты занимаешься?» Ответ первого был таков: «Везу эту проклятую тачку».
По иному ответил второй: «Зарабатываю себе на хлеб». Третий воодушевлённо провозгласил: «Строю прекрасный храм!»
Все они выполняли одну и ту же работу, но думали о ней, а, следовательно, и выполняли её по-разному. Поэтому, прежде всего, необходимо осознание школьниками полезности своего учебного труда, осознание мотивов своей деятельности. Конечно, в основе умственных способностей лежат природные задатки человека.Задача учителя в том и состоит, чтобы развить эти задатки.
Как известно, проблемой называют задачу, которую невозможно разрешить с помощью известных знаний и способов действий. Она обычно выглядит как противоречие, возникающее в ходе развития познания. Многие педагоги суть проблемного обучения видят в противоречии между знаниями и отсутствием необходимых знаний. Но тогда возникает вопрос: «Каков путь от незнания к знанию?». Если он лежит через заучивание, то здесь и проблемы нет. Но если для усвоения нового материала необходимы самостоятельные поиски,связанные с исследованием предметов и явлений, с выявлением их связей, изменений, то есть возникает проблемная ситуация, то здесь требуется напряжение умственной деятельности.

**Можно выделить три группы проблемных ситуаций:**

А. Познавательные (теоретическое мышление);
Б. Оценочные (критическое мышление);
В. Организаторско-производственные (практическое мышление).

Познавательные проблемы решаются сравнением,выдвижением гипотез, предположений и т.д. В результате появляются новые законы и выводы в науке, новые понятия…
Оценочные проблемы требуют критической оценки предметов и результатов труда.
Решение организаторско-производственных проблем связано с поиском путей различных положительных изменений окружающей действительности и способствует развитию практического мышления, а также ведёт к поиску применения знаний на практике.

**Рассмотрим подробнее некоторые ситуации**.

**А.**

а) На каждом уроке возможно привлекать учащихся к самостоятельному определению понятий. На основании наблюдений, описаний ученики выделяю существенные признаки предмета или явления.Например, учащиеся усвоили понятие«прямоугольник» и переходят к изучению квадрата.Необходимо определить понятие «квадрат». На доске учитель нарисовал несколько квадратов разных по размерам, положению, по цвету. Нужно установить, что общего во всех этих фигурах, дать определение понятия «квадрат». После многократного повторения этот приём закрепляется в сознании школьника как способ определения понятия, как средство познания окружающей действительности. Можно выделить два этапа формирования понятий:

1) Постановка вопросов для изучения фактов,всесторонний анализ явления.
2) Выделение существенных признаков предметов и явлений (учитель составляет вопросы, которые помогают раскрыть суть явления, проводит беседу,в результате которой формируются новые понятия).

б) Главное в решении познавательной проблемы –привлечь школьников к решению данной проблемы,заинтересовать их новой деятельностью.

в) Сравнение. Иногда сравнение выступает как самостоятельная проблема: сравни геометрические фигуры и т. д. Сравнение помогает глубже понять предметы и явления.
С помощью сравнения устанавливается сходство и различие предметов и явлений по определенным признакам.

г) Наиболее сложная познавательная проблема,которую решают ученики на уроке, это выдвижение обоснованных гипотез. На основании имеющихся сведений ученики должны сделать обоснованные предположения. В процессе выдвижения гипотез важно научить школьников обосновывать предположения, обращать внимание на существенность, достаточность аргументов, из которых вытекает предположение. Чем твёрже,глубже обосновано предположение, тем ближе оно к истине.

**Б.** Основная цель организации оценочных проблемных ситуаций – развитие критического мышления учащихся. Нет такой области жизни, где бы не приходилось оценивать предметы и явления. Умение правильно, критически мыслить необходимо всем людям.
Обычно на уроке учащимся приходится опровергать ложные суждения. В процессе этой работы они должны проявить высокую наблюдательность и путём сопоставления найти ошибку.

Примеры заданий:

* равным наклонным соответствуют равные наклонные;
* если произведение двух чётных чисел чётное число, то и сумма этих чисел чётное число;
* биссектриса угла в равнобедренном треугольнике есть одновременно его высота и медиана;
* в цветочном магазине продавали 67 роз. Красных было на 4 больше, чем белых. Сколько было красных и белых роз отдельно?

Как правило, учителя предлагают учащимся задания, в которых ошибки исключаются. В результате у школьников вырабатывается абсолютное доверие сообщениям, указаниям,заданиям. Чтобы этого избежать. Необходимо развивать у школьников способность к анализу,умению находить ошибки и обосновывать их.Прививать школьникам эти навыки надо постепенно: сначала научить определять суждение, в котором имеется ошибка, затем подбирать аргументы, опровергающие ошибки и,наконец, развёрнуто и последовательно строить опровержение. Опровергнуть суждение –значит установить его ложность; приводимый аргумент должен точно соответствовать логическим законам, правилам. Учитель использует различные приемы для поиска ошибок:взаимопроверка, рецензирование и диспут.

**В.** Учебные организаторско-производственные ситуации способствуют подготовке учащихся к активной деятельности в производстве, развивают практическое мышление, учат находить выход из возможных трудных положений. На уроках по различным предметам можно и необходимо готовить учащихся к труду, к выбору профессии, учить решать проблемы, которые возникают в процессе практической деятельности. Знания учащихся становятся более глубокими и прочными,обогащаются новыми фактами.

**УСЛОВИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ**.

1. Учащиеся на одном уроке должны решать разного вида проблемы.
2. Перед решением проблемных заданий необходимо мотивировать полезность их выполнения.
3. Систематичность в организации проблемного обучения на уроках.
4. Одна проблема должна решаться письменно, т.е. в её решении принимают участие все учащиеся.
5. Усвоение школьниками программного материала.
6. Учёт индивидуальных особенностей учащихся в процессе выполнения проблемных заданий.
7. Необходимо постепенно усложнять проблемные задания, постоянно вносить в них новое, неизвестное.

Процесс обучения математике в школе включает три основные составляющие:

– объяснение нового материала;
– самостоятельная работа;
– опрос учащихся.

Объяснение нового материала является эффективным, если содержание передаваемой информации и форма её подачи обеспечивают необходимую активность учащихся, и от того,как учитель организует объяснение, во многом зависит качество их знаний . Нередко при изучении геометрии параграф начинается сразу с определения или формулировки теоремы, поэтому учителю самому приходится продумывать вводные замечания, связывать данную тему с предыдущей,создавать проблемные ситуации, подыскивать материал, который бы заинтересовал учащихся.Например, урок, посвящённый трапеции, можно начать сразу с определения, а можно начать так:
«Приходилось ли вам слышать слово «трапеция»раньше? Знаете ли вы, что оно означает?
Сегодня на уроке мы узнаем, какая фигура в геометрии называется трапецией и каковы её свойства». А можно начать урок с изображения на доске различных выпуклых четырёхугольников.Среди них известные ребятам параллелограмм,прямоугольник, квадрат, ромб и новый четырёхугольник (трапеция). Учащимся предлагается назвать их и дать определение, а неизвестный четырёхугольник назвать «трапецией» и попросить учащихся дать самим определение (учащиеся должны **увидеть** параллельность только двух сторон).

Несколько иначе приходится начинать урок, на котором доказывается теорема. Возьмём урок«Теорема Пифагора». Начать можно с исторических сведений, рассказать о Пифагоре, а уж затем перейти к доказательству самой теоремы.Изложение исторического материала занимает немного времени и способствует повышению интереса к изучаемой теме. И всё же наиболее целесообразным является вариант,предусматривающий создания проблемной ситуации:«Рассмотрим задачу. В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 3 сантиметра. Чему равна гипотенуза этого треугольника?» Потом продолжаем: «Пока вы не можете решить такую задачу. Это не удивительно, так как для её решения необходимо знать очень важную теорему, с которой мы и познакомимся».
Предлагая учащимся задачу, решение которой возможно только с применением теоремы Пифагора,мы тем самым ставим проблему, как найти гипотенузу, зная катеты треугольника. Благодаря созданной проблемной ситуации, восприятие нового материала делается осознанным,целенаправленным, что способствует его глубокому усвоению.
Проблемную ситуацию можно создать, например, при построении биссектрисы угла, делении отрезка пополам и т.д.
Проблемное обучение эффективно способствует формированию у учащихся математического склада мышления, появлению интереса к предмету,прививает навыки исследовательской работы и желание самостоятельно решать возникшие ситуации.

**НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОРГАНИЗАЦИИ НАЧАЛА УРОКА**

1. Предлагается задача, которая решается только с опорой на жизненный опыт ребят, на их смекалку.
2. Даётся задача на тренировку памяти,наблюдательности, на поиск закономерностей по материалу, хорошо известному школьникам.
3. На доске записаны уравнения и ответы к ним,среди которых есть как верные, так и неверные.Предлагается проверить их.
4. На доске записано решение какого-либо примера или задачи с традиционными, наиболее часто встречающимися ошибками. Надо осуществить проверку каждого логического хода решения,преследуется цель получить наиболее полное обоснование критических замечаний.
5. Даётся обычная традиционная задача с традиционным решением. Предлагается найти более короткое, рациональное решение.
6. На доске дан чертёж к сложной задаче и осуществляется коллективный поиск её решения.
7. На столе у каждого ученика лежит чистый лист бумаги. Объявив тему урока, учитель сообщает, что в конце урока по некоторым рассмотренным на уроке вопросам будет проведена проверочная работа на 15 минут.
8. Урок начинается с чтения по фразам заданного для самостоятельного изучения параграфа и коллективного обсуждения его смысла.Ученики ответами на вопросы учителя доказывают глубину изучения темы.
9. Ребята изображают некоторую геометрическую фигуру и проводят небольшую исследовательскую работу по определённому плану.
10. Обсуждаются различные способы решения задачи заданной на предыдущем уроке. Эта задача, решение которой требует исследовательской работы,должна быть необычной, интересной, но доступной для всех учащихся.
11. Если на дом было дано творческое задание, то урок надо начинать с представления наиболее удачных работ.
12. рассматривается некоторая математическая проблема, которая ещё не обсуждалась в классе.Ученики намечают план её решения.

**ИСКУССТВО СТАВИТЬ ВОПРОСЫ**.

Знаменитый древнегреческий учёный Аристотель вопрос трактует как мыслительную форму,обеспечивающую переход от незнания к знанию.Любая система вопросов регулирует деятельность учеников, направляет её в необходимое русло. Чаще всего вопросы учителя подсказывают лишь область поиска решения.

*Пример*. Поиск решения задачи с помощью уравнения.

1. Какие процессы описаны в условии задачи?
2. Какими величинами характеризуется каждый процесс?
3. Что нам известно о каждой величине?
4. Какую зависимость между величинами выберем для составления уравнения?

Эти вопросы организуют работу учеников на первой основной фазе решения, на анализе ситуации. Вопросы направлены на поиск закономерностей между величинами.

**ПРИМЕРЫ УРОКОВ, НА КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАЛСЯ МЕТОД ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ.**

**Урок 1. Тема: «Формула корней квадратного уравнения»**

**Учитель:** Вы знаете, что математика одна из древнейших наук. В Древней Индии были распространены публичные соревнования по решению трудных задач. Задачи часто представлялись в стихотворной форме. Вот одна из таких задач:

Обезьянок резвых стая
Всласть, поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая…
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

Далее по тексту задачи составляется уравнение.При этом учащиеся могут допустить сами или учитель может спровоцировать следующую ошибку: . После проверки окончательно получаем уравнение . Это уравнение вида *ax*2+ *bx* + *c* = 0. Далее выясняется. Почему оно называется квадратным, являются ли квадратными уравнения вида *ax*2 + *bx* = 0, *ax*2 + *c* = 0, *bx* + *c* = 0.
Возникает проблема, как решать такие уравнения?
Затем рассматриваются предлагаемые учащимся пути решения неполных квадратных уравнений,предпринимаются безуспешные попытки решения полного уравнения , записанного в общем виде *ax*2 + *bx* + *c* = 0.
Вынесение общего множителя *x*(*ax* + *b*) + *c*= 0 по аналогии с решением уравнения *ax*2+ *bx* = 0, или перенос свободного члена *ax*2+ *bx* = – *c* по аналогии с уравнением *ax*2+ *c* = 0 не приносят желаемых результатов. Все попытки решения обсуждаются. Если ученики высказывают сомнение можно ли решить эту задачу вообще, учитель предъявляет им уравнение , которое ребята способны решить и в котором после проведённых преобразований «узнают» исходное уравнение.Один из вариантов решения предлагает учитель. Он сообщает, что в древности, когда геометрия была более развита. чем алгебра . такие уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Вот,например, как древние решали уравнение .

Рассмотрим рисунок 1.



*Рисунок 1*

Решение представлено на этом рисунке. Это решение следует сопроводить записями: *y* + 3 = 5,откуда *y* = 2.
*y* + 3, как в уравнении *y* + 3 = 5 появляется число 5; что сделано с обеими частями уравнения; где на рисунке добавленное к обеим частям равенства число 9; является ли число – 8 корнем исходного уравнения; в ходе какой операции потерян этот корень; почему древние греки были обречены его потерять?

Затем выясняется, что выражение *y*2 + *y*+ 9 и 16 + 9 геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение и уравнение *y*2 + 6*y* – 16 + 9 – 9 = 0 – одно и то же уравнение, откуда и получаем,что *y* + 3 = ±5.
Далее учитель выделяет новую проблему: как изобразить ситуацию геометрически, если второй коэффициент в уравнении отрицателен? Например,пусть уравнение имеет вид
*y*2 – 6*y* – 16 = 0.
По аналогии с рассмотренной выше ситуацией, на рисунке появляются квадраты со сторонами *y* и *y* – 3. Если учащиеся, исходя из рисунка 2,предлагают рассмотреть равенство
*y*2 = (*y* – 3)2 + 6(*y* – 3) + 9, то после преобразований получим 0 = 0. На вопрос,почему последняя запись не позволила продвинуться в решении уравнения, следует ответ,что эта запись – алгебраическое тождество и в нём не использовано условие, что *y*2 – 6*y*– 16 = 0. Преобразуя последнее равенство, получаем *y*2– 6*y* = 16. На рисунке 2 находим «изображение»выражения *y*2 – 6*y*, и обращаем внимание, что в нём из площади квадрата со стороной *y* два раза вычитается площадь квадрата со стороной 3.



*Рисунок 2*

Значит, если к выражению *y*2 – 6*y*прибавить 9, то получим площадь квадрата со стороной *y* – 3.
Заменяя выражение *y*2 – 6*y* равным ему числом 16, получим (*y* – 3)2 = 16 + 9, т.е. *y* – 3 = ± =± 5.
Далее возникает очередная подпроблема: как представить рассмотренные решения квадратных уравнений в краткой алгебраической форме, обоб щив геометрические решения.
В результате такого обобщения получаем метод выделения полного квадрата.

Приведенный пример удовлетворяет всем требованиям проблемного обучения:

а) Изучение темы начинается с ситуации невозможности решить практическую задачу, обнаруженную в старинных рукописях.
б) Проблема разбивается на ряд подпроблем.
в) Решению проблемы способствует рассмотрение истории решения квадратных уравнений.
г) На уроке показаны два способа решения уравнения – геометрический и алгебраический.
д) В беседе рассмотрен ряд гипотез, не приведших к решению и ошибочные шаги.
е) Исторический материал естественно «вплетается» в содержание урока, делая его живым и занимательным.

**Урок 2. Тема: «Теорема Пифагора»**

Учитель предлагает решить задачу: На охоте с двух отвесных скал два охотника заметили козла и одновременно в него выстрелили, причём стрелы достигли цели одновременно. Охотники одновременно начали спуск к добыче с одинаковой скоростью (см. рис. 3).



*Рисунок 3*

Проблемная ситуация возникает при построении математической модели практической задачи. Она рассматривается с помощью вопросов. Как на чертеже изображаются:

1) скалы?
2) расстояние между ними?
3) путь каждой стрелы?
4) путь каждого охотника?
5) что означает факт, что стрелы достигли цели одновременно?

Анализ задачи позволяет заключить, что на данном этапе задачу решить нельзя, так как невозможно использовать равенство отрезков ДС и СЕ, которые являются гипотенузами прямоугольных треугольников. Если бы зависимость между катетами и гипотенузой в прямоугольном треугольнике была известной, то можно было бы в каждом треугольнике выразить гипотенузу через катеты и приравнять полученные выражения.

**ВОЗНИКАЕТ ПРОБЛЕМА:**

Существует ли зависимость между гипотенузой и катетами в прямоугольном треугольнике, и, если она существует, то как она формулируется?
Для решения этой проблемы учитель организует поиск формулировки, предложив учащимся задание по группам:
Построить прямоугольные треугольники с катетами3 и 4, 12 и 5, 6 и 8, 8 и 15 и измерить гипотенузу. Результаты заносятся в таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| а | 3 | 12 | 6 | 8 |
| в | 4 | 5 | 8 | 15 |
| с | 5 | 13 | 10 | 17 |

Далее выдвигаются и обсуждаются различные гипотезы.

Верно ли, что *a* + , если это справедливо для первого и третьего случая?

Верно ли, что *a* = , если это справедливо для четвёртого случая?

Если учащиеся не увидят существующей зависимости, то учитель продолжает заполнять таблицу, находя квадраты соответствующих значений.
Следующая проблема возникает при доказательстве. Можно использовать различные доказательства, известные из истории математики.После доказательства теоремы Пифагора,возвращаемся к исходной задаче. В заключении этого урока можно предложить учащимся следующий вопрос:
В Древнем Египте после разлива Нила требовалось восстановить границы земельных участков, для чего на местности необходимо было строить прямые углы. Египтяне поступали следующим образом: брали верёвку , завязывали на равных расстояниях узлы и строили треугольники со сторонами 3,4 и 5 таких отрезков. Правильно ли они поступали?
Далее следует построение математической модели,формулировка проблемы и поиск доказательства.

**Урок 3. Тема: «Сумма n-первых членов арифметической прогрессии»**

Для создания проблемной ситуации учащимся предлагается старинная задача: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками,разность между каждым человеком и его соседом равняется меры». Далее учитель сообщает, что эта и подобные задачи в древности решались следующим образом: 10 мер **:** 10 = 1 мера – средняя доля.
1 мера · 2 = 2 меры – удвоенная средняя доля.Удвоенная средняя доля – это сумма долей пятого и шестого человека.
1 = 2 меры – меры –удвоенная доля пятого человека, 1 : 2 = меры – доля пятого человека и т.д.
Такие задачи, а также задачи, связанные с разделом имущества или наследства, приводят к понятиям арифметической и геометрической прогрессий, которые встречаются в египетских папирусах, относящихся ко второму тысячелетию до Н.Э.
Задачей урока является получение зависимости суммы членов прогрессии от их числа и проверка того, верно ли в древности решали приведённую задачу.
Попытаемся вначале найти сумму двадцати последовательных натуральных чисел, начиная с единицы. Если ученики будут предлагать выполнять сложение непосредственно. То следует сказать,что в данном случае важно получить идею нахождения суммы для любого количество членов,которое может быть достаточно большим. Затем учитель рассказывает легенду о маленьком Гауссе и предоставляет учащимся время для вычислений.Результат получен. Но известно, что ученик Гаусс сложил эти числа за 1 минуту. Учитель предлагает записать все числа в строчку и обращает внимание на то, что они образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 1. Имеется ещё одна закономерность. Если учащиеся её не видят,то учитель проводит стрелки:



Вывод: сумма двух членов, равноотстоящих от концов последовательности, равна 21. Таких сумм 10.Итак, сумма всех двадцати членов прогрессии равна S = (1 + 20) · 10 или в общем виде получаем S = (*a*1 + *an*) · .
Следующая проблема создаётся следующим вопросом: «Как изменятся наши рассуждения, если таких чисел 21?

1 2 3 ……….19 20 21
21 20 19 ……….3 2 1

Если сопоставить данную строку с такой же, но записанной в обратном порядке, то появится ещё один способ доказательства.
Наконец выясняется, как поступить, если требуется найти сумму n последовательных членов арифметической прогрессии, знаменатель которой отличен от 1. Вначале требуется убедиться, что *ak* + *an* – (*k* – 1) = const. Это верно, так как значение выражения
*ak* + *an* – (*k* – 1) = *a*1 + *d* · (*k* – 1) + *a*1 + *d* · (*n* – *k* + 1– 1) = 2 *a*1 + *d*(*n* – 1) не зависит от k. Получаем окончательную формулу ( для решения общей проблемы) S = , после чего возвращаемся к исходной задаче.

Как видим, учащиеся становятся очевидцами возникновения проблем, участниками их постановки и решения. Изучение темы проходит в форме решения интересных практических и познавательных задач. Существенное увеличение времени на подготовку к уроку оправдано возрастающим интересом учащихся к предмету.

***Литература.***

1. *М.И. Махмутов* Вопросы проблемного обучения в школе, Казань, издательство Казанского университета,1970 год.
2. *В.В. Гузеев* Методы обучения и организационные формы уроков, Москва, 1999 год.
3. Методика преподавания математики в средней школе, Москва, «Просвещение» 1980 год.
4. Научно-методические основы проблемного обучения в вузе, издательство Ростовского университета, 1988 год.
5. *М.И. Махмудов* Организация проблемного обучения в школе, Москва, «Просвещение» 1977 год.