РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Содержание

Введение ………………………………………………………………..…. ..….3

Глава I.Теоретические основы проблемы математических способностей ......5

Раздел 1 Общая характеристика способностей.

1.1.1. Понятие способности…..………………………………………….………5

1.1.2. Общие и специальные способности…...……………………………..…...7

1.1.3. Способности и задатки……………….…………….…………………….8

Раздел 2. Математические способности.

1.2.1. Исследование математических способностей в зарубежной психологии……………………………………………………………………….11

1.2.2. Исследование математических способностей в отечественной психологии……………………………………………………………………….16

1.2.3. Классификация математических способностей……………………….20

Глава II. Методика развития математических способностей………………....22

Раздел 1. Общая методика.

2.1.1. Общие положения теории развития способностей……..………...…….22

2.1.2. Принципы работы по развитию математических способностей учащихся……………………………………………………………………….....25

2.1.3. Развитие математической одарённости………………………….............28

Раздел 2. Частная методика.

2.2.1. Развитие математических способностей на уроках математики………34

2.2.2. Развитие математических способностей на внеклассных занятиях…...41

Заключение……………...………………………...……………………………..53

Литература………………...………………………………...……………...…....55

Приложения………………………………………………………………………57

Введение.

В последнее время во многих странах наблюдается значительный рост интереса к проблемам математического образования. Это связано с тем, что значение математики в жизни человеческого общества возрастает с каждым днём. Высокий уровень развития математики является необходимым условием подъёма и эффективности целого ряда важнейших областей знаний. Как подчёркивают учёные, развитие наук в последнее время характеризуется тенденцией к их математизации, и это касается не только физики, астрономии или химии, но и таких наук, как современная биология, медицина, метеорология, экономика, лингвистика и другие. Математические методы и математический стиль мышления проникают всюду. Трудно найти такую область знаний, к которой математика не имела бы никакого отношения. С каждым годом математика будет находить всё более широкое применение в разнообразных областях человеческой деятельности. Принципиально область применения математики неограниченна, указывает академик А.Н. Колмогоров [7].

 В связи с этим в нашей стране ежегодно возрастает потребность в математиках. В последнее время потребность эта явно не удовлетворяется, «математики стали дефицитны».

Хорошо известно, что основной вклад в развитие той или иной науки делают люди, проявляющие способности в соответствующей области. Всё это выдвигает перед школой задачу всемерного развития у учащихся математических способностей, склонностей и интересов, задачу повышения уровня математической культуры, уровня математического развития школьников. Наряду с этим школа должна уделять особое внимание школьникам, проявляющим высокий уровень способностей к математике, содействовать математическому развитию учащихся, проявляющих особую склонность к изучению математики.

Некоторые считают, что вместо отбора способных к математике школьников необходимо заниматься изысканием возможностей максимального математического развития всех учащихся. Но одно всегда будет дополнять другое, так как и при самых совершенных методах обучения индивидуальные различия в математических способностях всегда будут иметь место – одни и тогда будут более способными, другие – менее способными. Уравнение в этом отношении никогда не будет достигнуто.

Следовательно, учителя математики должны вести систематическую работу по развитию математических способностей у всех школьников, по воспитанию у них интересов и склонностей к математике и наряду с этим должны уделять особое внимание школьникам, проявляющим повышенные способности к математике, организовать специальную работу с ними, направленную на дальнейшее развитие этих способностей.

Несмотря на потребность общества в людях, способных внести свой вклад в развитие математической науки, и возлагающуюся на школу задачу по развитию математических способностей, в современной школе наблюдается следующая ситуация:

* сокращение часов преподавания математики;
* формализм математических знаний;
* отсутствие мотивации учения;
* неумение применять полученные знания на практике;
* отсутствие самостоятельной и творческой деятельности учеников;
* отсутствие в подавляющем большинстве учебников и дидактических пособий заданий, способствующих подготовке учеников к этой творческой деятельности.

Как же помочь учителю в организации учебной деятельности по развитию математических способностей?

Объект исследования моей работы - процесс развития способностей в школе.

Предметом исследования моей работы является процесс развития математических способностей в основной школе.

 Целью моего исследования является теоретико-методический анализ проблемы развития математических способностей школьников.

Глава I.

Теоретические основы проблемы математических способностей.

Раздел 1. Общая характеристика способностей учащихся.

1.1.1. Понятие способности.

Естественно, в своей работе я буду говорить в основном о математических способностях, однако для понимания сложных проблем этой теории следует осветить некоторые фундаментальные вопросы теории способностей.

Прежде всего следует понять, как в психологии трактуют само понятие «способности» и его взаимосвязь с процессом формирования целостной всесторонне развитой личности.

Понятие «способности» употребляется учителем в самых разных сочетаниях: «способный ученик», «одаренный ученик», «талантливый ученик», «у этого ученика есть природные способности», «у него большие задатки» и т. д. В дидактике и методике преподавания математики мы говорим о творческих, исследовательских, познавательных способностях, о способностях к счёту или другим видам математической деятельности.

Все это многообразие терминологии заставляет задуматься над сущностью понятия.

Российская педагогическая энциклопедия дает следующее определение:

«Способности – индивидуально-психологические особенности личности, являющиеся условиями успешного выполнения определённой деятельности».

Проблема способностей широко исследовалась и исследу­ется психологами России.

Одним из основоположников этой теории в нашей стране был Рубинштейн. Он писал: «Под способностями обычно понимают свойства или качества человека, делающие его пригодным к успешному выполнению какого-либо из видов общественно-полезной деятельности, сложившегося в ходе общественно-исторического развития» [17].

Б.М. Теплов [19] включал три признака в понятие «способно­сти»: «Во-первых, под способностями разумеются индивидуально-психологические особенности, отличающие одного челове­ка от другого… Во-вторых, способностями называются не всякие, вообще, индивидуальные особенности, а лишь такие, которые имеют отношение к сущности выполнения какой-либо деятельности или многих деятельностей... В-третьих, понятие «способность» не сводится к тем знаниям, навыкам или умениям, которые уже выработаны у данного человека». Последнее замечание спорно, так как знания, умения и навыки, которые уже выработаны у учащихся, также требуют от них определенных способностей.

Очень интересно такое заключение Б.М. Теплова: «Не в том дело, что способности проявляются в деятельности, а в том что они создаются в этой деятельности».

С.Л. Рубинштейн, Б.М. Теплов и многие другие психологи России (А.Г. Ковалев, В.Н. Мяснищев, К.К. Платонов и др.) являются представителями так называемого *личностно-деятельного подхода* к понятию способностей. Одним из важнейших положений личностно-деятельного подхода является соответствие нервно-психических свойств человека требованиям деятельности. Учебная деятельность сложна и многогранна, она предъявляет определенные требования к психическим и физическим возможностям учащихся. Если особенности учащегося отвечают этим требованиям, то он способен и на высоком уровне осуществлять учебную деятельность. Если такого нет, то у него нет способностей к данной деятельности.

За последние годы сформировался еще один подход к понятию «способности», который называют *функционально-генетическим* (В.Д. Шадриков, Е.П. Ильин и др.).

Одной из отличительных черт функционально-генетиче­ского подхода к рассмотрению проблемы способностей является признание их генетической обусловленности, врожденности. В.Д. Шадриков [23] определяет способности как «свойства функ­циональных систем, реализующих отдельные психические функ­ции, которые имеют индивидуальную меру выраженности, проявляющуюся в успешности и качественном своеобразии освоения и реализации отдельных психических функций».

Широко известно высказывание Б.М. Теплова: «Способно­сти не существуют до деятельности». В.Д. Шадриков указал на внутреннюю противоречивость этого высказывания: «Если способности не существуют до деятельности, то в дея­тельности использовать их нельзя, а если способности не толь­ко используются в деятельности, но и развиваются в ней, то они существуют до деятельности».

Следует отметить, что указанные два подхода, по мне­нию психологов, не противоречат друг другу, а, скорее, их до­полняют.

1.1.2. Общие и специальные способности

Сложным и не до конца решенным в психологии является вопрос о соотношении общих и специальных способностей.

По диапазону видов деятельности, успех которых обеспечивают те или иные способности, последние подразделяются на общие и специальные.

Крутецкий [10] под *общими умственны­ми способностями* понимает такие способности, которые необходимы для выполнения не какой-то одной, а мно­гих видов деятельности. К общим умственным способно­стям автор относит, например, такие качества ума, как ум­ственная активность, критичность, систематичность, быстрота умственной ориентировки, высокий уровень аналитико-синтетической деятельности, сосредоточенное внимание. *Специальные способности* - это способности, которые необходимы для успешного вы­полнения какой-нибудь одной определенной деятельности - музы­кальной, изобразительной, математической, литератур­ной, конструктивно-технической и т.п.

С.Л. Рубинштейн [16] рассматривал взаимоотношение общей одаренности и специальных способностей: «Специальные спо­собности определяются в отношении к отдельным специаль­ным областям деятельности. Внутри тех или иных способно­стей проявляется общая одаренность индивида, соотнесенная с более общими условиями ведущих форм человеческой дея­тельности».

В этом утверждении есть важная мысль, что общую одарен­ность надо искать «внутри» специальной одаренности.

Каждый из учебных предметов в школе (физика, история, физкультура и т. д.) требует наряду с более общими способностями некоторых специальных способностей, обусловленных своеобразием этого предмета. Для успешного выполнения каждой деятельности необходимы и более общие и более специальные способности.

В.Г. Ананьев пишет, что «специальные способности связа­ны как генетически, так и структурно с одаренностью, а ода­ренность конкретно проявляется в специальных способностях и развивается в них. Это очевидное положение приходится под­черкивать, так как за последнее время в психологической лите­ратуре проявляется тенденция свести всю проблему к изуче­нию специальных способностей, фактически игнорируя явле­ние общей одаренности».

В.А. Крутецкий [10] так говорит о специальных способностях: «Задача всестороннего развития способностей, как нам кажется, должна дополняться не менее важной задачей выявления тех детей, которые обнаруживают особые склонности и способности к отдельным видам деятельности (математике, тех­нике, литературе и т. д.) и предоставления им возможностей для дальнейшего развития в этом направлении. Иначе говоря необходимо ориентироваться на такой подход в обучении, ко­торый, реализуя всестороннее развитие способностей каждого, одновременно максимально содействует росту способностей к тем видам деятельности в обучении, в которых ученик показывает наибольшие успехи и удовлетворяет наибольший интерес».

1.1.3. Способности и задатки

В исследовании проблемы способностей есть один очень сложный, интересный и загадочный вопрос: каково происхождение способностей? Психологи ведут по этому поводу многолетние дискуссии. Они связаны с понятием *задатков*. По поводу задатков можно прочитать многое. Вслед за Б.М. Тепловым [19] следует считать, что задатки, талант — это врожденные качества, и их наличие означает, что при прочих равных условиях они значительно облегчают формирование способностей, помогают раньше их выявить и успешно развивать; на базе различных по структуре задатков могут сформироваться сходные способности и, наоборот, на базе сходных задатков — разные способности и т. д. С.Л. Рубинштейн [16] писал: «Во всех случаях мы разумеем «врожденность» не самих способностей, а лежащих в основе их развития задатков».

Психолог Л.А. Венгер [2] ставит эти идеи под сомнение: «Дети рож­даются не одинаковыми. Уже в первые недели их жизни обнару­живаются различия в их возбудимости, активности, в быстроте и устойчивости реакций на внешние воздействия. У младенцев наблюдается разный темп развития движения, неодинаковое воздействие оказывают на них одни и те же внешние впечатле­ния. Беда, однако, заключается в том, что еще никому не уда­валось установить связь между индивидуальными особенно­стями младенцев и последующим развитием их способностей. Предположение о задатках — пока что простое умозаключе­ние, вытекающее из того, что в ходе обучения и развития спо­собностей заметна разница между детьми и что у некоторых детей легче формируются, например, математические, у дру­гих — литературные способности». В конце Л.А. Венгер пишет: «Окончательное разрешение спора о задатках принадлежит будущему. Пока ясно одно: способности, достаточные для усвоения всех предметов школьной программы, плодотворного творческого труда в самых различных (если и не во всех) областях производства, науки, искусства, могут быть сформированы у любого здорового ребенка». Вот почему можно утверждать, что определенный уровень математических способностей присущ каждому школьнику. Необходимо только понимать, что эти уровни существуют, уметь их выявлять и развивать.

Руководствуясь соображениями здравого смысла, соотношение способностей человека может быть пред­ставлено диаграммой, которая напоминает круги Эйлера. Здесь очень важно пересечение всех трех кругов — именно оно определя­ет основные личностные качества человека, уровень его сформированности. Естественно, сколько людей, столько и возможных пересечений как всех кругов, так и каждой пары. Заметим, что радиусы кругов, естественно, различны и могут в какой-то степени иллюстрировать наличие тех или иных спо­собностей (если научиться их измерять).

Задатки

Общие способности

Специ-альные способ-ности

Выводы.

Итак под способностями следует понимать индивидуально-психологические свойства личности, которые реализуются специализированными функциональными системами головного мозга и которые при благоприятных условиях в наибольшей мере определяют успешность освоения и продуктивность выполнения какой-либо деятельности или ряда деятельностей. Специальные и общие способности имеют общий фундамент — задатки (природные способности). Куда «пойдут» эти задатки — в общую развитость человека или в какую-нибудь область специальной деятельности — зависит от очень многих факторов воспитания и развития. Во всяком случае ясно, что не существует какого-либо вида способностей отдель­но, т. е. нет специальных способностей без развитых общих и наоборот. Способности – понятие динамическое. Они не только проявляются и существуют в деятельности, они в деятельности создаются, в деятельности и развиваются.

Раздел 2. Математические способности.

## 1.2.1. Исследование математических способностей в зарубежной психологии.

В исследование математических способностей внесли свой вклад такие яркие представители определенных направлений в психологии, как А.Бинэ, Э.Трондайк и  Г. Ревеш, и такие выдающиеся математики, как А.Пуанкаре и Ж. Адамар.

Большое разнообразие направлений определило и большое разнообразие в подходе к исследованию математических способностей, в методических средствах и теоретических обобщениях.

Единственное, в чем сходятся все исследователи, это, пожалуй, мнение о том, что следует различать обычные «школьные» способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта.

Большое единство взглядов проявляют зарубежные исследователи по вопросу о  врожденности или приобретенности математических способностей. Если и здесь различать два разных аспекта этих способностей – «школьные» и творческие способности, то в отношении вторых существует полное единство – творческие способности ученого-математика являются врожденным образованием, благоприятная среда необходима только для их проявления и развития. В отношении «школьных» (учебных) способностей зарубежные психологи высказываются не столь единодушно. Здесь, пожалуй, доминирует теория параллельного действия двух факторов – биологического потенциала и среды.

Основным вопросом в исследовании математических способностей (как учебных, так и творческих) за рубежом был и остается вопрос о сущности этого сложного психологического образования. В этом плане можно выделить три важные проблемы.

1.      *Проблема специфичности математических способностей*. Существуют ли собственно математические способности как специфическое образование, отличное от категории общего интеллекта? Или математические способности есть качественная специализация общих психических процессов и свойств личности, то есть общие интеллектуальные способности, развитые применительно к математической деятельности? Иначе говоря, можно ли утверждать, что математическая одаренность – это не что иное, как общий интеллект плюс интерес к математике и склонность заниматься ею?

2.      *Проблема структурности математических способностей.* Является ли математическая одаренность унитарным (единым неразложимым) или интегральным (сложным) свойством? В последнем случае можно ставить вопрос о структуре математических способностей, о компонентах этого сложного психического образования.

3.      *Проблема типологических различий в математических способностях.* Существуют ли различные типы математической одаренности или при одной и той же основе имеют место различия только в интересах и склонностях к тем или иным разделам математики?

По вопросу о специфике математических спо­собностей, хотя и нельзя констатировать наличие единого мнения, но большинство ученых, среди которых такие крупные авторитеты в области психологии, как А. Бинэ, Г. Ревеш, и в области математики, как Ж. Адамар и А. Пуанкаре, явно скло­няются в пользу признания специфичности математического таланта. А. Бинэ прямо и недвусмысленно указывал на то, что «мате­матический ум предполагает совершенно специальную способность». А. Пуанкаре и впоследствии Ж. Адамар говорили о специфике мышления математика, о своеобразной, свойственной математикам «математической ин­туиции», о подсознательной творческой работе. Хотя Адамар и отмечал, что математическая одаренность и математическое творчество как-то связаны собщим интеллектом, творчеством вообще (упоминая в этом отношении о фактах связи математи­ческой одаренности с одаренностью в других областях), но он же указывал на частые случаи «ограниченности» математическо­го ума. Ревеш высказывает убеждение в том, что математический талант есть специфическая форма таланта, которую необходимо отличать от других форм научного таланта. Математический талант может проявляться вместе с другими талантами, но он органически не связан с ними; таланты к другим наукам возможны без мате­матической способности и даже при абсолютном отсутствии пос­ледней.

Вопрос о структурности математических учебных способностей принимал у психологов прежде всего форму вопроса о том, нужно ли говорить о математических способностях как об едином свойстве или пра­вильнее говорить об арифметических, алгебраических и геомет­рических способностях. Еще в 1909—1910 гг. К. Стоун и независимо от него С. Куртис, изучая достижения в арифметике и способности к этому предмету, пришли к выводу о том, что едва ли можно говорить о математических способностях как об едином целом, даже в отношении арифметики. В 1910 г. была опубликована большая статья В. Брауна «Объ­ективное исследование математических способностей», в которой говорилось, что успешность в алгебре и геометрии определяется качественно различными свойствами и что нет свойства, которое лежало бы в основе ма­тематических способностей вообще. Исследований по выявлению компонент математических способностей проводилось большое количество, но они не дают более или менее ясного и четкого представления о структуре математических способностей. Для примера приведу результаты исследования структуры математического мышления, проводимого В. Хаекером и Т. Цигеном. Авторы прежде всего выделили четыре основных сложных компонента, составляющие «ядро» математического мышления: пространственный, логический, числовой и символический. Даль­ше они попытались каждый из этих компонентов разложить на более простые составляющие. Получилась такая схема:

A. Пространственный компонент.

1. Понимание пространственных фигур, образов и их ком­плексов (синтезов, гештальтов).
2. Память на пространственные образы (пространственные
представления).
3. Пространственные абстракции (умение видеть у простран­ственных объектов общие признаки).
4. Пространственное комбинирование (понимание и самостоятельное нахождение связей и отношений простран­ственных объектов).

B. Логический компонент.

1. Образование понятий (типа «синус», «логарифм», «тензор»
и т. д.) и понятийных абстракций.
2. Понимание, запоминание и самостоятельное нахождение
общих понятийных связей.
3. Понимание, запоминание и самостоятельное выведение
заключений и доказательств по правилам формальной
логики.

C. Числовой компонент.

1. Образование числовых представлений.
2. Память на числа, числовые решения.

D.Символический компонент.

1. Понимание символов.
2. Запоминание символов.
3. Операции с символами.

Обобщая результаты большинства исследований, мы получим самые общие характеристики математического мы­шления, такие, как способность к абстракции, способность к логи­ческому рассуждению, хорошая память, способность к простран­ственным представлениям и т. д.

Перейдём к вопросу о типологии математических способностей. Наиболее распространенной в зарубежной психологии яв­ляется типология математических талантов, основанная на противопоставлении дискурсивного, развернутого во всех своих звеньях мыслительного процесса, интуитивному мыслительному процессу, связанному с непосредственным «схватыванием» необ­ходимых отношений. Еще Р. Декарт в своих «Правилах для руководства ума» противопоставлял цепи последовательных логических умо­заключений интуицию как непосредственное усмотрение связей и отношений между различными явлениями. Ж. Адамар говорит о логическом и интуитивном математическом мышлении (и соот­ветственно о двух типах математиков). «Логика» отличает зна­чительно меньший «удельный вес» бессознательного в мышлении, более узко направленная мысль, последовательность и ясная расчлененность мыслительного процесса. Мышление «интуити­виста» характеризуется значительно большим удельным весом бессознательного, более «рассеянной» мыслью, быстротой и сокращённостью («свернутостью») мыслительного процесса.

Интересен взгляд западных учёных на сущность математического творчества. В работах А. Пуанкаре, Ж. Адамара, Г. Ревеша встречаются следующие идеи. Ход мыслительного процесса ученого может осознаваться не во всех своих звеньях. Ученому свой­ственно не только «развернутое» дискурсивное мышление, но и так называемое интуитивное мышление, протекающее в сокра­щенном, «свернутом» виде. Оно усматривает или открывает существенные связи раньше, чем дискурсивное мышление успеет доказать их соответствие действительности. Это часто и воспринимается как бессознательная творческая ра­бота. Можно установить определенные стадии творческого процесса: 1) период бесплодного сознательного обду­мывания; 2) период отвлечения от работы, период отдыха или переключения на другую деятельность. В это время активно ра­ботает подсознательное мышление, происходит «инкубация» идеи; 3) внезапное «озарение», открытие истины в тот момент, когда человек меньше всего думает о предмете; 4) снова созна­тельная работа над анализом и отшлифовкой идеи.

## 1.2.2. Исследование проблемы математических способностей в отечественной психологии.

Свои взгляды на природу и сущность математических спо­собностей или математического мышления высказывали многие математики и методисты.

Одним из первых отечественных авторов, затрагивающих проблему математических способностей, был русский математик Д.Д. Мордухай-Болтовский. Основные мысли о математическом творчестве он изложил в оригинальной статье «Психология математического мышления». Автор предлагает следующий перечень компонентов, в совокупности образующих математи­ческие способности: «Хорошая математическая способность предполагает сильную память и причем главным образом на предмет того типа, с которым имеет дело математика»; «остро­умие», т. е. способность «обнимать умом зараз два совершенно разнородных предмета»; «быстрота мысли», которую автор связал с «бессознательным мышлением». Д.Д. Мордухай-Болтовский отметил различие двух типов воображения: абстрактного у «алгебраистов» и более конкретного у «геометров».

А.Я. Хинчин [21] указывал следующие черты математического мышления: 1) доминирование логической схемы рассуждений, 2) лаконизм (стремление находить кратчайший путь к цели), 3) четкое расчленение хода рассуждений, 4) точность (каждый математический символ имеет строго
определенное значение).

А.Н. Колмогоров в работе «О профессии математика» указывал, что способности к механическому запоминанию большого числа фактов, формул, складывание и перемножение в уме длинных рядов многозначных чисел не имеют отношения к математическим способностям. Он отмечал, что различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях, что эти способности проявляются обычно рано и требуют непрерывного упражнения. К математическим способностям А.Н. Колмогоров относил: 1) способность умелого преобразования буквенных выражений, нахождения удачных путей для решений уравнений, не подходящих под стандартные правила, или, как принято называть у математиков, «вычислительные или алгоритмические способности»; 2) геометрическое воображение или «геометрическую интуицию»; 3) искусство последовательного правильно расчлененного логического рассуждения.

Б.В. Гнеденко [5] выделяет следующие свойства математического мышления: 1) способность улавливать нечеткость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев доказательства; 2) привычку к полноценной логической аргумента­ции; 3) четкую расчлененность хода рассуждений; 4) лаконизм; 5) точность символики.

С.И. Шварцбурд считал, что главным элементом мате­матического воспитания следует признать воспитание творческой деятельности учащихся, и выделял компоненты «математиче­ского развития», которые рассматриваются в методической литературе: развитие пространственного представления; уме­ние отделить существенное от несущественного; умение абст­рагировать; умение абстрактно мыслить; умение от конкретной ситуации перейти к математической формулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующей существо дела; обладание навыками дедуктивного мышления; умение анализировать, разбирать частные случаи; применение научных выводов на конкретном материале; умение критиковать и ставить новые вопросы; владение достаточно развитой математической речью, как письменной, так и устной; обладание достаточным терпе­нием при решении математических задач.

Самое значительное исследование психологов по данной проблеме принадлежит В.А. Крутецкому и изложено в его книге «Психология математических способностей школьников».В. А. Крутецкий даёт следующее определение математическим способностям: "Под способностями к изучению математики мы понимаем индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обусловливающие на прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики". Собранный В. А. Крутецким материал позволил ему выстроить следующую общую схему структуры математических способностей  в школьном возрасте.

### *1.  Получение математической информации.*

1)  Способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи.

### *2.  Переработка математической информации.*

1)  Способность к логическому мышлению в сфере количественных и пространственных отношений, числовой и знаковой символики. Способность мыслить математическими символами.

2)  Способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий.

3)  Способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий. Способность мыслить свернутыми структурами.

4)  Гибкость мыслительных процессов в математической деятельности.

5)  Стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений.

6)  Способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении).

### *3.  Хранение математической информации.*

1)  Математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).

### *4.  Общий синтетический компонент.*

1)  Математическая направленность ума.

Выделенные компоненты тесно связаны, влияют друг на друга и образуют в своей совокупности единую систему, целостную структуру, своеобразный синдром математической одаренности, математический склад ума.

Не входят в структуру математической одаренности те компоненты, наличие которых в этой системе не обязательно (хотя и полезно). В этом смысле они являются нейтральными по отношению к математической одаренности. Однако их наличие или отсутствие в структуре (точнее, степень их развития) определяют тип математического склада ума. Не являются обязательными в структуре математической одаренности следующие компоненты:

1.  Быстрота мыслительных процессов как временная характеристика.

2.  Вычислительные способности (способности к быстрым и точным вычислениям, часто в уме).

3.  Память на цифры, числа, формулы.

4.  Способность к пространственным представлениям.

5.  Способность наглядно представить абстрактные математические отношения и зависимости.

1.2.3. Классификация математических способностей.

Исходя из всего вышесказанного и основываясь на компонентах (параметрах) математических способностей, вы­явленных математиками, педагогами и психологами в нашей стране и за рубежом, проведу систематизацию этих параметров предложенную В.А. Гусевым в его работе «Психолого-педагогические основы обучения математике».

Классифицируя составляющие математических способностей, автор пришёл к выводу, что прежде всего их можно распределить по двум основным блокам: в первый блок входят общие характеристики мышления или умственной деятельности (формулировки этих качеств личности формально не связаны ни с какой специальной математической деятельностью); ко второму блоку относятся параметры математических способностей, непосредственно связанные с математической деятельностью учащихся. Совершенно ясно, что эти параметры следует идентифицировать по уровню их сложности, продвинутости и т. д. Отме­чу при этом, что все составляющие взяты автором из соответствующих исследований, выполненных к настоящему времени.

Итак, рассмотрим один из возможных вариантов классифи­кации составляющих (параметров) математических способно­стей учащихся (см. Приложение 1).

Оценивая предложенную классификацию параметров математических способностей, можно сделать следующие выводы.

1. Отличительной чертой данной классификации является ее направленность на целостное формирование личности каж­дого школьника, и в этой связи ее многогранность.
2. Бросается в глаза большое пересечение указанных па­раметров с общими целями обучения математике, сложность этих взаимосвязей. Важно отметить, что фундаментом во всем этом многообразии являются мыслительные процессы, это вы­двигает на первый план процессы формирования приемов мыслительной деятельности.
3. Построенная классификация играет немаловажную роль
в диагностике параметров математических способностей учащихся и позволяет дифференцировать их по уровням владе­ния теми или иными приемами мыслительной деятельности.
4. Особенно важно, что здесь выделяются некоторые врож­денные параметры (задатки), о которых нам известно не­многое.

Выводы.

Под математическими способностями следует понимать специальные особые способности, которые необходимы для успешного выполнения математической деятельности. Математические способности являются не единым образованием, а имеют сложную многогранную структуру. Успешность математической деятельности зависит не от отдельно взятой способности, а от комплекса способностей. Математическая одарённость предполагает наличие определённых природных предпосылок и проявляется только в творческой деятельности. Однако не следует забывать, что каждый человек (ученик) обладает в определен­ной мере математическими способностями. Оценить и развить эти способности — задача педагогов.

Глава II.

Методика развития математических способностей.

Раздел 1. Общая методика.

2.1.1. Общие положения теории развития способностей.

Диалектико-материалистическая концепция развития способностей, преобладающая в отечественной психологии, опирается на следующие положения. Все психические явления, включая способности, являются вторичными образованиям по отношению к объективному миру, образу жизнедеятельности человека, его обучению и воспитанию, которые служат причиной, источником психического развития. Анатомо-физиологические задатки выступают лишь необходимые условия развития человека и его способностей. Способности имеют общественно-исторический характер. Их разнообразие порождено большим количеством исторически сложившихся видов деятельности, профессий, специальностей. Способности в своем развитии в основном определяются образом жизни и деятельности и изменяются с изменением жизнедеятельности. В формировании и развитии способностей решающую, определяющую роль играют внешние условия, обучение и воспитание в самом широком смысле слова, те виды деятельности, которые выполняет человек. Личность формирует и развивает свои способности в процессе усвоения и приумножения опыта прошлых поколений, воплощенного в продуктах материальной и духовной культуры. Формирование и развитие способностей определяется не только достигнутым уровнем культурного развития страны, наличием продуктов культуры, в которых воплотились способности человека, а прежде всего эффективностью способов усвоения (присвоения), созидания и усовершенствования этих продуктов в процессе рационально организованной деятельности. Причем не всякая деятельность развивает и формирует способности человека. Рассматривая общ­ую структуру жизнедеятельности человека, нетрудно заметить существование видов деятельности, не развивающих, а наоборот, отвлекающих и даже тормозящих развитие его основных способностей. Так, если человек, имеющий музыкальные или изобразительные наклонности задатки, вынужден заниматься тяжелым физическим трудом, то эта деятельность вряд ли будет развивать его потенциальные способности к музыке и живописи. Когда говорят о развивающей деятельности применительно к отдельному индивиду, то имеют в виду, что она, во-первых, выступает как значимая для него, как деятельность, вокруг которой аккумулируются и реализуются все возможности человека. Поэтому, чтобы понять, является ли данная деятельность развивающей, ей необходимо дать личностную характеристику. В этом смысле даже профессиональная деятельность, проходя­щая через всю жизнь человека, не всегда может быть значимой для индивида. Главным признаком значимости деятельности является то, что он идет на свою работу как на праздник, с большим воодушевлением. Во-вторых, такая деятельность должна быть организована в соответствии со следующими принципами: носит не репродуктивный, а творческий (во всяком случае субъективно-творческий) характер; отвечает принципам развивающего обучения, которое ведется на повышенном уровне сложности и опережает развитие, ведя его за собой, ориентируясь на те компоненты способностей, которые еще не полностью сформировались и которые формируются под влиянием такого обучения; деятельность положительно мотивирована: учащиеся испытывают чувство большой радости, совершая ее, и отчетливо понимают свои недостатки и допускаемые ошибки, видят результаты своих действий, осознают и объективно оценивают свое продвижение к цели на каждом этапе деятельности, заметно переживают успехи и относительные неудачи.

Задача разностороннего развития способностей должна дополняться не менее важной задачей выявления одаренных детей и предоставления им возможностей для дальнейшего развития. Иначе говоря, необходимо ориентироваться на такой подход в обучении, который, реализуя разностороннее развитие способностей каждого, одновременно максимально содействует росту способ­ностей к тем видам деятельности, к которым ученик проявляет наибольший интерес и может достичь наибольших успехов.

Для реализации данной концепции развития способностей необходимо: а) создать в учебных заведениях и внешкольных учреждениях условия, благоприятствующие формированию и развитию способностей учащихся; б) применить эффективные формы учебно-воспитатель­ной работы; в) применить рациональные методы и при­емы диагностики и развития способностей.

Как известно из психологии и педагогики, благопри­ятными условиями для воспитания способностей явля­ются:

* любовь к детям и педагогической деятельности, глубокое знание индивидуально-психологических и воз­растных особенностей учащихся, хорошее знание своего дела (содержания, форм и методов учебно-воспитательной работы);
* признание в учебном заведении в системе цен­ностей приоритета творческой деятельности и творчес­кой личности; творческий климат в учебном заведении и внешкольном учреждении;
* соблюдение в процессе уп­равления учебно-творческой деятельностью учащихся гуман­ного, демократического стиля общения;
* проблемное обу­чение; решение творческих задач; показ значимости орга­низуемой творческой деятельности для воспитания спо­собностей;
* сотрудничество (сотворчество) педагога и учащихся (осуществление совместных поисков условий и средств для развития творческих способностей); сам педагог как образец творческой личности с ярко выраженной уста­новкой на педагогическое творчество;
* уважение к лич­ности учащегося в сочетании с разумной требовательностью (анализ типичных ошибок и недостатков - только в доброжелательной форме);
* организация самостоятельной деятельности (все то, что учащиеся могут выполнить без по­мощи педагога, они должны выполнить самостоятельно);
* индивидуальный подход к учащимся в процессе выявле­ния и развития способностей;
* применение педагогом методов поощрения учащихся; выражение оптимизма и веры в творческие возможности учащихся;
* хорошая обеспечен­ность педагога научно-методической литературой и тех­ническими средствами обучения;
* высокий уровень вне­классной работы;
* система морального и материального поощрения творчески работающих педагогов; внедрение в практику работы учебного заведения передового пе­дагогического опыта;
* наличие дифференцированного обучения и т.д.

Для воспитания способностей большое значение име­ют следующие формы учебно-воспитательной работы: кружки, диспуты, семинары, конференции, КВН, экскур­сии, творческие уроки, факультативы, индивидуальное обучение, индивидуальный подход к учащимся, дифференциация обучения, коллективные формы обучения, иссле­довательская и опытническая работа, викторины, игры. конкурсы, клубы по интересам, кино-, изо- и фотосту­дии, научно-технические общества, фестивали, смотры, вечера вопросов и ответов, конкурсы, турниры, олим­пиады, лекции, беседы, выставки, практикумы, допол­нительные индивидуальные занятия с учащимися, домашняя работа учащихся и др.

Основные направления в развитии и формировании способностей предусматри­вают следующие мероприятия. Во-первых, выявление (диагностика) природных задатков к определенной деятельности и анализ качества результатов деятельности. Во-вторых, тренировка и развитие природных свойств личности путем ее включения в систематическую деятельное под руководством специалиста (учителя).

2.1.2. Принципы работы по развитию математических способностей учащихся.

В данном разделе описываются наиболее суще­ственные принципы работы по развитию математических способностей учащихся, реализуемые как на уроках, так и на внеклассных занятиях. Принципы составлены Э. Ж. Гингулисом [4] на основе анализа опыта работы по развитию математических спо­собностей учащихся.

*Принцип активной самостоятельной деятель­ности учащихся.* Он требует от учителя четкого выделения времени на объяснение нового материала. Предпочтительно вводить теоретический материал довольно крупными порциями — тем самым быстро осознается достаточно полная система фактов, необходимых для решения за­дач по данной теме. Но после этого нужно отве­сти не часть урока, а одно или несколько заня­тий полностью на *решение задач.* Обычно ребя­там сообщают номера (или тексты) сразу всех 5—6 задач, которые будут решены на уроке или на кружке. Класс работает самостоятельно. Сильные учащиеся при этом загружены весь урок, хотя оформлять решение до конца для них необязательно, достаточно сообщить учителю о том, что получены верные ответы. Основная часть класса справляется с меньшим числом заданий, но при этом тоже работает самостоя­тельно. Роль учителя сводится к выборочному контролю, к занятию с отстающими.

*Принцип учета индивидуальных и возраст­ных особенностей учащихся* предполагает нали­чие у учителя четких представлений о возможностях каждого ученика, о динамике роста его потенциала. С учетом этой динамики нужно предлагать индивидуальные задачи. Они должны быть доступными для учащихся средних возможностей. Тем самым ребята предохраняются от обескураживающего действия неудачи. В то же время более способные ребята требуют трудных задач, на которых они могут испытать свои умственные силы. Подготовка индивидуальных заданий требует от учителя широкой «задачной эрудиции».

К методическим средствам реализации указанного принципа относятся краткие содержа­тельные обсуждения идей и методов решения.
На определенном этапе — на рубеже VII—VIII классов — учащиеся начинают понимать, что усвоение нового метода способствует успеху в большей мере, нежели дове­денное до конца «кустарное» решение.

*Принцип постоянного внимания к развитию различных компонентов математических спо­собностей* заставляет отметить сложность проявления этих способностей. Учителя почти никогда не знают, какой подход обеспечит дан­ному ученику наибольший успех и продвижение
вперед. Кажется логичным заключить, что наибольшие достижения возможны при доста­точном внимании ко всем компонентам мате­матических способностей.

Достигается это с помощью правильного под­бора тематики задач, рассмотрения различных подходов к решению одной и той же задачи. Полезны приемы, направленные на повышение удельного веса геометрических, наглядных соображений. Они экономят время урока, так как наглядность может заменить и словесную формулировку условия, и подробную запись решения.

При разборе задач очень важно помнить о *принципе соревнования.* Во внеурочных усло­виях хорошо зарекомендовали себя различные математические олимпиады, «бои» и т. д., но элементы состязания возможны и на уроке. К соревнованию побуждают следующие вопро­сы учителя: «Кто решит быстрее? У кого реше­ние получилось самое короткое? Самое простое? Самое неожиданное?» и т. д.

Иногда высказывается мнение, что соревно­вания травмируют, деформируют сознание школьников и в результате слабые учащиеся еще острее чувствуют свою отсталость, а луч­шие «математики» класса зазнаются. Эти опасе­ния имеют основания. Но существуют и меры компенсации: предлагаемые задания должны быть посильны. Следует учитывать также, что учащиеся VII — IX классов уже довольно трезво оценивают свои математические способности. Венгерский психолог Э. Гефферт установила, что высокоодаренность не сочетается с эгоцентризмом и негативными социальными установками. Э. Гефферт пришла также к следующему выводу: «С радостью выполненная деятельность оплачивает сама себя, причем не ожидается дополнительного признания».

Рассматривая задачи, доступные учащимся, нельзя забывать о *принципе профессионализма.* Он требует, чтобы школьники уверенно владели системой опорных задач. Для этого нужна ежедневная работа по закреплению навыков, повторению ключевых идей и методов. Кроме того необходимо следовать *принципу яркости.* Это означает, что занятия должны быть разнообразны по форме и интересны по содержанию. Свою подлинную увлеченность предметом учитель может продемонстрировать подбором красивых и разнообразных задач, рассказами из истории математики.

На внеурочных занятиях есть возможность реализовать *принцип полной нагрузки.* Речь идёт о поддержании достаточно высокого уровня задач, предлагаемых на кружке или факультативе. Кроме того, имеется в виду повышенная скорость обсуждения решений и большая нагрузка на домашнюю работу ученика. Дома школьник в состоянии подготовить доклад по какому-то теоретическому вопросу, придумать красивую задачу, написать сочинение на математическую тему и т. д.

B заключение подчеркнем, что развитие у учащихся математических способностей напрямую зависит от личности учителя. Если школьникам
будет неинтересно с ним, если они не почувствуют роста своих возможностей, то они прекратят углубленные занятия математикой.

2.1.3. Развитие математической одарённости.

Для освещения проблемы одарённости в своей работе за основу я взяла жизненный путь и взгляды замечательного русского математика –Колмогорова Андрея Николаевича. Такой выбор неслучаен, так как в случае А.Н. Колмогорова нам предлагается редкая и, видимо, полезная в научном смысле ситуация: – математический гений размышляет по поводу развития математических способностей у детей и юношества. Следует учесть при этом, что он почти всю жизнь конкретно, как педагог, занимался развитием одаренных детей и юношей, постоянно анализируя свой собственный опыт в этом отношении.

На вопрос о пути своего становления как математика Андрей Николаевич отвечал, что его путь в математику был «извилистым». В детстве Колмогоров не был вундеркиндом. Иначе говоря, не было того резкого умственного опережения, которое заставляет окружающих возлагать на ребенка особые, редко оправдывающиеся надежды на замечательное будущее. Правда, как он сам пишет [7], «интерес к математике проявился достаточно рано. Так, где-то в четыре-пять лет придумал и сам решил такую задачу: имеется пуговица с четырьмя дырочками. Для ее закрепления достаточно протянуть нитку, по крайней мере, через две дырочки. Сколькими способами можно закрепить пуговицу?».

В этом же возрасте, по его словам, «испытал радость математического открытия», открыв закономерность - образование последовательных квадратов:

1=12
1+3=22

1+3+5=32
1+3+5+7=42 и так далее.

Но потом, в средних классах, победили другие интересы: он всерьез увлекается биологией, потом появились шахматы. Когда кончил среднюю школу, то занимался серьезным образом в семинаре С.В. Бахрушина. При этом увлекала металлургия и параллельно с университетом поступил на металлургический факультет химико-технологического института и некоторое время там проучился. «Окончательный выбор математики как профессии,- пишет Колмогоров, - произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, то есть лет с восемнадцати-девятнадцати».

Свой обычный, ни в коей мере не ускоренный тип развития Колмогоров рассматривал как неслучайный и принципиальный для развития творческих способностей и несколько скептически относился к так называемым «вундеркиндам».

А.Н. Колмогоров уже тогда, тридцать лет назад, видел опасность, которая сейчас стала очевидной для большинства психологов, работающих в области одаренности. Он весьма скептически относился к тому, что по выражению Н.С. Лейтеса, относится только к «возрастной одаренности». Колмогоров в переписке с Крутецким пишет, что «мы теряем много медленно развивающихся потенциально крупных талантов» [23]. И далее еще жестче - « в последние годы эта опасность сильно возросла при развившемся ажиотаже вокруг «одаренности» и особенно математической».  Ускоренное прохождение школьной программы, вообще ускоренное развитие, которое много лет является чуть ли не главным критерием высоких способностей, по мнению Колмогорова, мало о чем свидетельствует.

Именно потому для всех, кто работает с одаренными детьми- математиками, он ставит следующие вопросы:

1. «в каком возрасте можно, независимо от тренированности и различий в физиологически обусловленных темпах развития уловить хотя бы в первом приближении математические способности…

2. в каком возрасте форсированное развитие задатков математического мышления уже реально влияет на достижение «потолка» способностей».

Оба этих вопроса в другом месте – в ответах на анкету - формулируются им с почти максимальной степенью четкости:
«сейчас дело идет о выявлении математически одаренных детей с целью организованного форсирования их математических занятий. Следует решить не вопрос о том, когда это возможно, а когда это целесообразно (подчеркнуто А.Н. Колмогоровым)».

Такую постановку вопроса он дополняет личным опытом, весьма уместным, имея в виду масштаб его математического дарования: « что касается лично меня, то я думаю, что ни я сам, ни математическая наука ничего не потеряли из–за того, что задача «выявления» (кавычки Колмогорова) моих математических способностей была предоставлена мне самому. Я начал систематически дополнительно заниматься математикой в возрасте 15-16 лет, когда сам решил, что это серьезное и нужное дело».

Есть и другая точка зрения, которой следуют многие наши педагоги и даже психологи - специалисты по одаренности. Они считают, что чем раньше развивать специальные способности, тем лучше. (Кстати, и В.А. Крутецкий, в переписке с которым Андрей Николаевич обозначил эти мысли, судя по монографии, считал возможным и необходимым ранние специализированные занятия с одаренными к математике детьми.) Если иметь в виду последние физиологические и психофизиологические исследования о сензитивных периодах развития, с одной стороны, и исследования о закономерностях развития общих способностей, с другой, то приходится признать, что позиция, представленная выдающимся математиком, психологически значительно больше обоснована, чем бытующая в ряде школ система раннего интенсивного и специализированного обучения одаренных детей.

Как считает Колмогоров, «до 10-12 лет - с довольно хорошим успехом заменим общим воспитанием сообразительности и умственной активности». « Весьма желательны», - пишет Колмогоров,- и внешкольные занятия - типа математических кружков, но в них « следует по возможности избегать установки на предопределение будущих профессиональных интересов» [7].

Другое дело старшие классы, где «запоздание с усвоением строгой логики и специальных математических навыков в 14-15 лет делается уже трудно восполнимым».

Уже тогда, тридцать лет назад, Колмогоров четко определяет для себя разницу между высокими способностями к изучению математики, с одной стороны, и собственно творческими способностями в этой области, с другой.

По мысли Колмогорова, чтобы стать творческим математиком, нужно, во-первых, сохранять, культивировать у себя своего рода «детское мышление». По мнению А.Н. Колмогорова, способности к математическому творчеству у человека тем выше, чем на более ранней стадии общечеловеческого развития он остановился. Самый гениальный наш математик: (судя по всему, имеется в виду Гаусс),- говорил А.Н. Колмогоров, остановился в возрасте четырех-пяти лет, когда «дети любят отрывать ножки и крылышки насекомым». Себя А.Н. Колмогоров считал «остановившимся на уровне тринадцати лет, когда мальчишки очень любознательны и интересуются всем на свете, но взрослые интересы их еще не отвлекают».

Самодиагноз Андрея Николаевича с психологической точки зрения безупречен. Если учесть невероятную широту «посторонних» научных интересов математика Колмогорова - от гидродинамики до поведения в русской речи падежа, знать его литературные вкусы - от Евтушенко до Томаса Манна и Ахматовой, его культ дружбы и то особое место, которое в его жизни занимал спорт, то в этом случае возникает именно образ типичнейшего подростка. Но у Колмогорова есть еще одно условие для развития математической интуиции, необходимой для творчества. Впрочем, это условие некоторым образом связано с первым. Это обязательные для любого творческого ученого интересы, выходящие за рамки его профессии – прежде всего интересы в искусстве и литературе. (Конечно, в этом отношении Колмогоров не одинок. А. Эйнштейн много раз писал, что «Достоевский дает ему очень много, гораздо больше, чем Гаусс»).

Особое значение для Колмогорова имела музыка. Он считал, что «между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи». Далее он ссылается на своего друга, П.С. Александрова, у которого «каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением». Решая вопрос, стоит ли брать какого-то студента или аспиранта в ученики, Колмогоров всегда принимал во внимание его нематематические, общекультурные интересы.

Следует отметить, что современные психофизиологические исследования подтвердили особую связь музыки и математики. Так, именно у выдающихся математиков и музыкантов были обнаружены так называемые «гармоники», т.е. особые биоэлектрические показатели, определенным образом возникающие в ответ на стимуляцию мозга.

Обобщая выше сказанное, можно сделать следующие выводы:

1. По мнению Колмогорова, ускоренное («вундеркиндное») развитие не только не обязательно для достижения в будущем высокого профессионального (творческого) уровня, но в большей степени чревато возможностью неудач и даже психических отклонений. При диагностике математических способностей у детей категорически нельзя ориентироваться на темп развития и обучения.

2. Великий математик считал, что недопустима ранняя специализация способностей. Лишь с расцвета подросткового возраста (с 12-13 лет) можно начинать расширенное и углубленное обучение математике.

3. Для развития творческих способностей к математике, считает Колмогоров, необходимо выйти за пределы самой математики и развивать у ребенка, подростка или юноши общекультурные интересы, в частности, интерес к искусству (прежде всего - музыке) и поэзии.

В заключение хотелось бы добавить, что в способ­ных детях таланты развиваются только в результате самостоятельной умственной работы, привычки преодолевать разные трудности. Такие условия дает самообуче­ние и разумное одиночное обучение, не обучающее, но ободряющее и завлекаю­щее. Полная самостоятельность в посильных вопросах, и своевременное разъяснение учителя в вопросах, превышающих силы ученика, способствуют развитию и воспитанию таланта.

Выводы.

Процесс развития математических способностей учащихся требует от учителя большого профессионализма. Для обеспечения эффективности своей деятельности педагог должен владеть разнообразными методами обучения, использовать в своей работе многочисленные приёмы и средства обучения. Его деятельность должна быть направлена на развитие самостоятельности и творческого потенциала в учениках. Поэтому для успешного осуществления своей деятельности учитель нуждается в разнообразных методических пособиях и рекомендациях, в обмене педагогическим опытом с другими учителями. В следующем разделе будут рассмотрены конкретные рекомендации по организации процесса развития математических способностей на уроке и внеклассных занятиях.

Раздел 2. Частная методика.

2.2.1. Развитие математических способностей на уроках математики.

В подавляющем большинстве учебников и ди­дактических пособий для средней школы практи­чески отсутствуют задачи, которые способствовали бы подготовке учеников к деятельности творческо­го характера и формирова­нию у них соответствующих математических способностей. Математические знания учащихся слишком часто оказываются формальными и невостребован­ными, у основной массы учащихся не формирует­ся разумный подход к поиску способа решения незнакомых задач.

Поэтому на уроках математики необходимо более активно заниматься развитием навыков в применении общих форм математической деятельности, таких, как:

* использование известных алгоритмов, формул, процедур;
* кодирование, преобразование, интерпретация:
* классификация и систематизация;
* правдоподобные рассуждения;
* выдвижение и проверка гипотез, доказатель­ство и опровержение;
* разработка алгоритмов.

В данном разделе будут рассмотрены задачи раз­ного уровня сложности, решение которых способ­ствует развитию у учащихся навыков в использова­нии некоторых из выделенных выше общих форм математической деятельности.

*1. Использование известных алгоритмов, формул, процедур.*

К сожалению, в преподавании математики в рос­сийской школе по-прежнему доминирует формаль­ный подход, связанный с отработкой конкретных методов решений. Существует такой тезис: «Если уча­щемуся предлагают упражнения только одного типа, выполнение каждого из них сводится к одной и той же операции, если эту операцию не при­ходится выбирать среди сходных и условия, дан­ные в упражнении, не являются для учащегося не­привычными и он уверен в безошибочности своих действий, то учащийся перестает задумываться об их обоснованности». Этот тезис можно подкрепить описанием следующей пси­холого-дидактической закономерности: последовательность рассуждений (А, В, С ..... М), повторяющаяся при решении однотипных задач, может свертываться до со­ставной ассоциации (А, М). Однако обратный процесс — развертывание — происходит без по­терь не у всех учащихся.

Этот эффект хорошо известен составителям ва­риантов вступительных экзаменов в высшие учеб­ные заведения: какова бы ни была по сути проста задача, но если ее решение предполагает использо­вание двух различных (хотя бы и известных) алго­ритмов или же если в нем должно содержаться некоторое исследование (к примеру, по парамет­ру), то массовые ошибки неизбежны. Более того, ошибки часто появляются и в том случае, если ал­горитм используется в ситуации, в которой он не­применим.

Задача 1.1. *Решите систему*



Решение этой задачи, как нетрудно видеть, сво­дится к цепочке простых логических рассуждений и использованию стандартных формул. Однако для того, чтобы получить правильный ответ, эти стан­дартные формулы следует правильно использовать. Не приводя ответ полностью, выпишем одну из четырех серий решений

 (1)

К сожалению, слишком многие учащиеся бездум­но отождествляют параметры *k* и *n* и вместо се­рии (1) пишут, что



упуская тем самым, условно говоря, большую часть решений этой серии.

Задача 1.2. *Некоторое число умножили на 3*, *а затем к полученному произведению прибавили 2. Верно ли, что полученное число больше исходного?*

Ясно, что *За + 2 > а* только при *а > - 1*, но какой процент, к примеру, семиклассников сразу даст верный ответ?

Реакция учащихся на последнюю из проводимых в этом разделе задач продемонстрирует степень их понимания стандартной схемы решения иррацио­нальных уравнений.

Задача 1.3. *Решите уравнение *

Большая часть учеников начнет решение с нахождения ОДЗ и раскрытия модуля. А между тем можно сразу перейти к урав­нению



Целесообразно задать учащимся такой вопрос: «Как вам кажется, какое уравнение проще решить, дан­ное выше или уравнение **?».

*2. Кодирование, преобразование, интерпретация.*

Простейшим примером использования указан­ных форм деятельности является их внутриматематическое применение, к примеру, замена перемен­ной, перевод задачи с одного математического язы­ка на другой (от алгебры к геометрии и обратно).

Кодирование или переформулирование способст­вует выявлению скрытых свойств объектов (суще­ственных для данной задачи) путем включения их в другую систему связей. Использование разнооб­разных формулировок задачи способствует ее по­ниманию. Культура мышления предполагает раз­витое умение думать об одном и том же на разных языках.

Нужно уметь создавать и пользоваться различ­ными моделями. А потому важно научить школь­ников формализовывать задачи и переводить усло­вия и результаты с одного языка на другой, т.е. *кодировать* информацию, понимать смысл (т.е. *интерпретировать)* полученных в результате иссле­дования результатов. Многие школьные задачи со­держат в себе элементы кодирования, преобразо­вания, интерпретации (к примеру, практически все текстовые задачи, но далеко не только они). При­ведем примеры.

Задача 2.1. *Докажите, что если от произвольного двузначного числа отнять двузначное число, записан­ное теми же цифрами в обратном порядке, то полу­чится число кратное девяти.*

Самая первая кодировка, с которой знакомятся школьники в процессе обучения математике, — это десятичная (позиционная) запись натуральных чи­сел. Если *—* исходное число, то ,а число, «записанное теми же цифрами в обратном порядке», равно *,* поэтому их разность  кратна девяти.

Задача 2.2. *Вычислите*



Это число равно двум! Действительно, если положить , то получим выражение *(а + 1)(а + 2) - а(а + 3) = а2 +3а + 2 - а2 - За = 2* вне зависимости от значения переменной *а.*

Конечно, тот же результат может быть получен, если записать каждую из входящих в данное выра­жение дробей в виде

 

и раскрыть скобки. При таком способе решения еще придется увидеть (не используя калькулятор), что *1997∙1998 -1996 ∙1999 = 2.*

Самое время сказать несколько слов о роли каль­куляторов в обучении математике. Если он имеет­ся у каждого учащегося в классе, то бессмысленно предлагать подобную единичную задачу; ясно, что ее математическое содержание останется нераскрытым. Необходимо дать несколько примеров, в каж­дом из которых ответ - 2, с тем, чтобы затем «раз­гадать загадку».

Задача 2.3. *Проверьте, что*

  (2)

*и найдите еще несколько подобных примеров.*

Проверить это равенство легко, труднее найти аналогичные. Конечно, кто-то может сразу дога­даться, что *8 = 32 - 1*, и написать равенство

  (3)

справедливость которого тоже очевидна. Однако, как и в предыдущем примере, основная идея - это введение замен (подстановок). Запишем равенство



Его частными случаями являются равенства (2) и (3). В результате мы построили своего рода мо­дель. Все что осталось сделать, — это исследовать ее, т.е. найти соотношение между *а* и *b*,при выполнении которого справедливо наше обобщен­ное равенство. А для этого надо провести простые преобразования:

, или , откуда .

*3. Классификация и систематизация*

*Классификация —* общепознавательный прием, суть которого заключается в разбиении данного множества объектов на попарно непересекающие­ся подмножества (классы) в соответствии с так называемым основанием классификации, т.е. при­знаком, существенным для рассматриваемых объ­ектов. *Систематизация -* это объединение объек­тов или знаний о них путем выявления существен­ных связей между ними, установление порядка между частями целого на основе определенного закона, правила или принципа.

Как писал У.У.Сойер: «Математика — это классификация и изучение всех возможных зако­номерностей». Однако навыки в проведении клас­сификации и систематизации необходимы далеко не только математикам, но инженерам и врачам, юристам и экономистам, менеджерам и т.д.

В математике часто встречается *дихотомия,* т.е. разбиение множества на два подмножества. Дейст­вительно, натуральные числа разделяются на про­стые и составные, действительные числа - на ра­циональные и иррациональные, а иногда на алгеб­раические и трансцендентные. Целые числа можно различать по их остаткам при делении на какое-то число и т.д. и т.п. Естественнее всего классифика­ция появляется при решении комбинаторных за­дач, однако наша первая задача из другой темы.

Задача 3.1. *Может ли быть верным равенство .*

*И если да, то когда?*

Часто встречается такой ответ: «Данное равенст­во верно в том случае, когда числа *а* и *b* имеют разные знаки». Ответ не является полным, посколь­ку в нем ничего не говорится о том случае, когда одно из этих чисел обращается в ноль. Здесь допу­щена распространенная ошибка, которая заключа­ется в неполноте проведенной классификации. В данном случае следует учитывать, что кроме поло­жительных и отрицательных чисел, существует еще и ноль. Правильный ответ: при *ab ≤ 0.*

Задача 3.2. *Сколькими способами можно располо­жить на шахматной доске (в соответствии с прави­лами шахмат) белого и черного королей?*

Ответ: *4 ∙ (64 - 4) + 24 ∙ (64 - 6) + 36 ∙ (64 - 9) = 3612* способами.

Введем систематизацию, различая случаи распо­ложения одного из королей, например, черного. Именно, если черный король находится в одной из четырех угловых клеток, то, значит, имеется *64 - 4 = 60* возможностей для расположения белого ко­роля. Если черный король стоит на краю доски, но не в углу (таких клеток 24), то имеются 58 вари­антов для белого короля (из 64 клеток он не имеет права занимать саму клетку черного короля и еше 5 соседних, т.е. имеющих с ней общую сторону или вершину.) В оставшихся 36 случаях белый король может стоять на любой из 55 клеток, поскольку для него запрещены 8 клеток, соседствующих с клеткой черного короля, и сама эта клетка, т.е. 64 — 9 = 55.

Задача 3.3. *Сколько различных (с точностью до положения в пространстве) каркасов треугольные пирамид можно составить, имея*

1. *зеленые и красные стержни длиной по 20 см каждый?*
2. *стержни длиной в 10 и 20 см?*

Давайте составим таблицу, систематизирующую пирамиды по числу, например, зеленых стержней

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число зелёных стержней | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Число пирамид | 1 | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 |

Действительно, все пирамиды с одним зеленым ребром являются одинаковыми. Если зеленых рёбер два, то они могут быть либо смежными, либо скрещивающимися, поэтому в соответствующем месте стоит число «2». Но не кажется ли странным число «4» в средней клетке этой таблицы? Ведь три зеленых стержня могут:

а) выходить из одной вершины;

б) образовывать треугольник;

в) образовывать незамкнутую пространственную ломаную.

Однако в последнем случае имеются две различные конфигурации, так сказать, правая илевая. На рис. изображены обе эти конфигурации, причем зеленые стержни обозначены толстыми линиями.

Таким образом, при помощи чисто комбинатор­ных рассуждений находим ответ: можно составить 12 пирамид.

Что можно сразу сказать о задаче пункта 2), так это то, что число вариантов не может быть большим, чем в случае 1), поскольку все равно, как различать ребра пирамиды: по цвету или же по длине — так что основания классификации одина­ковы. Другое дело, что различаются сами множест­ва пирамид, поскольку, к примеру, пирамиды, в одной из граней которой имеются два ребра дли­ной 10 см и одно — 20 см, не существует. В частности, аналогичная таблица не будет симметрична! Ответ: 5 различных пирамид.

Указанный в этом разделе подход к преподава­нию математики может быть использован в шко­лах различного профиля. И вполне возможно, что чем более, так сказать, гуманитарной является школа, тем сильнее следует подчеркивать немате­матическую сторону дела, т.е. то, что методы и подходы, применяемые при решении конкретных математических задач, имеют чрезвычайно общий характер и связаны с процессом *формирования и развития качеств мышления, необходимых для пол­ноценного функционирования в современном общест­ве.*

2.2.2. Развитие математических способностей на внеклассных занятиях.

Внеурочные занятия по математике решают целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, развитию индивидуальных способностей ученика, максимальному удовлетворению их интересов и потребностей.

Почему ученик занимается математикой вне занятий? В младшем возрасте это интерес к математике как любимому предмету, в среднем и старшем – это либо интерес к математике как науке, либо профессионально-ориентационный интерес, связанный с предполагаемой послешкольной деятельностью.

Среди задач, которые можно решать на внеклассных занятиях выделяются две категории внеучебных задач.

*Первая категория.* Задачи типа математических раз­влечений (занимательные задачи). По поводу этой категории Б.Л. Кордемский [9] пи­шет: «Первая категория внеучебных задач (очень пестрая по содержанию) прямого отношения к школьной программе не имеет и, как правило, не предполагает большой математиче­ской подготовки. Сюда входят задачи различной степени труд­ности и, прежде всего, начальные упражнения из цикла вне­школьных упражнений, развивающих математическую иници­ативу, т. е. упражнения, предназначенные для тех, кто делает лишь первые шаги в мир математической смекалки.

*Вторая категория.* Задачи, примыкающие к школь­ному курсу математики, но повышенной трудности.

Рассмотрим каждую категорию отдельно.

*Занимательные задачи.*

Занимательные задачи в большинстве случаев содержат сюжет, доступный и понятный учащимся на начальных стадиях изучения математи­ки. В структуре этих задач заложено проявление и развитие, например, таких параметров математических способностей, как догадка, смекалка, сообразительность, любопытство, любознательность и т. п.

В практике школы не предусмотрено реше­ние задач занимательного характера непосредственно на уроке (нет прямого указания в программе, нет рекомендаций в мето­дической литературе, отсутствует соответствующий материал в учебниках), в то время как для боль­шинства людей, интересующихся математикой, первые живые впечатления от этой науки связываются с задачами или целы­ми книгами «развлекательного» плана. Задачи занимательного характера могут служить прекрасным способом вызывать у учащихся интерес к изучению математики.

Учитывая многообразие различного рода увлекатель­ных, шутливых задач, для обеспечения целенаправленного и эффективного их использования необходима некоторая клас­сификация занимательных задач.

Остановимся на классификации, предложен­ной одним из специалистов в области занимательных задач, Б.Л. Кордемским [8]. Заметим, что классификация ведётся согласно операционно-тематическому принципу - по сюжетам в сочетании с груп­пами однородных операций - действий, применяемых для решения задач, объединенных темой. Согласно этому принципу выделяют следующие задачи:

1. «Затруднительные положения» (сюжетный стержень:
физические действия, выполнение которых затруднено, но может быть осуществлено средствами математической смекалки).
2. «Геометрия на спичках» (сюжетный стержень: конструи­рование из спичек моделей фигур).
3. «Семь раз примерь, один раз отрежь» (сюжетный стержень: преобразование фигур при помощи перекраивания).
4. «Умение везде найдет применение» (сюжетный стержень: элементарно-технические и практические вопросы, решение которых требует участия математической мысли).
5. «С алгеброй и без нее» (сюжетный стержень безразличен, операционный стержень: алгебраический путь решения или любой иной, но всегда есть некоторая «изюминка» или в самом способе, или в сопоставлении способов решения).
6. «Математика почти без вычислений» (операционный стержень: действий почти нет, но для решения нужны искусные рассуждения).

Примеры занимательных задач будут содержаться в базе данных.

Особое значение имеют задачи, которые принято называть логическими. Основную, главную роль при решении таких задач играет правильное построение цепочки точных, иногда очень тонких, рассужде­ний. Термин «логическая задача» в методической лите­ратуре недостаточно четко определен. В большинстве случаев *логическими задачами* называют те, для решения которых необходимо лишь логическое мышление и не требуется математических выкладок. Поэтому их можно ис­пользовать для работы с учащимися различных классов без яв­ной связи с материалом, изучаемым по школьной программе. Важно, что многие из задач такого рода носят занимательный характер. К сожалению, задач подобного рода практически нет на стра­ницах школьных задачников. Их можно найти только в сбор­никах и книгах занимательного характера.

Среди широко распространенных логических задач выде­лим те, которые решаются способом так называемого «здраво­го рассуждения», способом предположений, составлением раз­личных таблиц, вычерчиванием графов. Один из наиболее эле­ментарных, примитивных случаев состоит в применении спо­соба перебора.

Рассмотрим задачи, которые можно считать логическими, но решение любой из них опирается на «здравый смысл».

Задача 1. *Крестьянину нужно перевезти через реку вол­ка, козу и капусту. Как осуществить перевоз, чтобы волк не съел козу, а коза не съела капусту?*

Схема рассуждений и ход решения.

 Рассудительный ученик должен потребовать такое уточне­ние текста задачи: при крестьянине никто никого не ест! Без этого уточнения решать задачу невозможно.

Ознакомившись с текстом задачи, учащиеся могут сделать следующие выводы.

1. Крестьянин может сначала перевезти козу, оставив волка и капусту на одном берегу (волк не ест капусту!).
2. Крестьянин после этого может перевезти либо волка, либо капусту, но он должен с противоположного берега козу увезти назад, чтобы волк не съел ее, или она капусту. В этой комбина­ции перевоза козы назад и заключается необычность идеи, по­могающей решить задачу.
3. После этого крестьянин перевозит соответственно капу­сту или волка.
4. Наконец крестьянин снова перевозит козу.

При решении данной задачи учащемуся прежде всего необ­ходим «жизненный опыт», так как решение задачи не предпо­лагает каких-либо сложных математических выкладок. По-видимому, в данной задаче проявляется навык проведения логических рас­суждений и характерных для дедуктивного мышления умений находить логические следствия из данных начальных условий. Конечно, при решении этой задачи и при решении любой дру­гой, необходимы навык полноценной логической аргументации, стремление к ясности, простоте, экономности и рационально­сти решений.

При формировании аналитико-синтетической деятельности у учащихся представляют интерес так называемые задачи-головоломки или, как называет их английский профессор Смаллиан, - «дурацкие штучки».

Приведем пример такой задачи.

Задача 2. *Имеются две монеты на сумму 15 копеек. Одна из них не пятак. Что это за монеты?*

Схема рассуждений и ход решения.

 Практика показывает, что эта задача ставит в тупик челове­ка достаточно часто, поскольку увидеть ответ не так уж легко. Это совершенно не страшно, надо просто подробно исследо­вать ситуацию. Как это делать?

1. На вопрос, какими могут быть две монеты, составляющие сумму 15 копеек, ответ для системы монет нашей страны однозначный: 10 копеек и 5 копеек.
2. Необычность формулировки задачи состоит в том, что указано: из этих двух монет одна не пятак, т. е. десятикопеечная, зато другая — пятак. При решении данной задачи должно проявиться такое качество мышления, как умение абстрагировать.

Нестандартность мышления проявляется и при решении таких задач, в которых встречаются слова одного рода, а под­разумевается противоположный пол. Например, такая задача.

Задача 3. *Сын отца полковника беседовал с отцом сына полковника. Кто с кем беседовал, если полковника при этом не было?*

Схема рассуждений.

Стандартное понимание слова «полковник» приводит к стереотипному выводу, что полковник — мужчина, но в задаче «полковник» — женщина, т. е. брат полковника беседовал с му­жем полковника.

Выше отмечалось, что приведенные задачи требуют для своего решения определенного «здравого смысла», но следует указать и на такие задачи, которые содержат в условиях очень много данных. Удерживать в памяти все факты, приведенные в условиях задачи, трудно, поэтому следует использовать вспо­могательные записи или таблицы. Эти записи помогают исклю­чить из рассмотрения нерешаемые варианты (противоречащие условию). Ниже при­ведены задача, решение которых требует использования вспо­могательных таблиц.

Задача 4. *Олег, Игорь и Оля учатся в одном классе. Среди них есть лучший математик, лучший спринтер и лучший ху­дожник класса. Известно, что:*

1. *лучший художник не нарисовал своего портрета, но на­
рисовал портрет Игоря;*
2. *Оля никогда не уступала мальчикам в спринте.*

*Кто в классе лучший математик, лучший спринтер и луч­ший художник?*

В задаче речь идет о двух множествах (множество школь­ников и множество специальностей). Воспользуемся таблицей 3x3 клетки.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Математик | Спринтер | Художник |
| Олег | - | - | + |
| Игорь | + | - | - |
| Оля | - | + | - |

Из первого условия задачи следует, что Игорь не худож­ник, ставим в таблице «-», во второй строке и в третьем стол­бце. Из второго условия следует, что Оля лучший спринтер и поэтому ставим знак «+» в третьей строке и во втором столбце, значит Оля не художник. Игорь не художник, художник — Олег, а лучшим математиком может быть только Игорь. Наглядно показано, что таблица значительно облегчила решение задачи.

Иногда приходится составлять таблицы с большим числом входов или рассматривать несколько таблиц. В этом случае можно использовать графы. Иногда граф может играть вспо­могательную роль в сочетании с другими методами решения.

*Графом* называют схему (сетку, карту), составленную из нескольких точек, называемых *вершинами графа,* и нескольких отрезков (или дуг), соединяющих эти точки и называемых реб­рами графа.

Применяя граф к решению логических задач, вершинам и ребрам графа обычно придают определенный смысл. Часто решение задачи получается наглядным и эффективным. При­мером решения с использованием графов может служить сле­дующая задача.

Задача 5. *Студенты педагогического университета орга­низовали эстрадный квартет. Михаил играет на саксофоне. Пианист учится на физическом факультете. Ударника зовут не Валерием, а студента географического факультета зовут не Леонидом. Михаил учится не на историческом факультете. Андрей не пианист и не биолог. Валерий учится не на физиче­ском факультете, а ударник - не на историческом. Леонид иг­рает не на контрабасе. На каком инструменте играет Валерий и на каком факультете он учится?*

Схема рассуждений и ход решения.

 В этой задаче имеется три множества (студенты, инстру­менты, факультеты) по четыре элемента в каждом. Составле­ние таблиц громоздко (придётся чертить три таблицы) и неэф­фективно. Воспользуемся графами. Обозначим студентов пер­выми буквами их имен: М, А Л, В; инструменты, на которых они играют: С, П, У, К; факультеты, на которых они учатся: Ф, Г, И, Б. Будем соединять элементы двух множеств сплошной линией, если между ними установлено взаимно однозначное соответствие, и пунктирной линией, если такое отсутствует.

М

В

Л

А

И

Ф

Б

Г

С

У

П

К

Пианист учится на физическом факультете, им может быть Леонид, потому что Андрей не пианист, Михаил играет на сак­софоне, а Валерий не учится на физическом факультете. Тогда Андрей — ударник, так как Валерий — не ударник, и Андрей учится на географическом факультете, потому что ударник учится не на историческом и Андрей — не биолог. Михаил - биолог, а Валерий играет на контрабасе и учится на историче­ском факультете.

При отборе задач, предназначенных для той или иной цели, необходимы требования, которым бы отвечала выбранная система задач. Например, Ю.М. Колягин предъявляет следующие требования к задачам, которые могут быть использованы для развития гибкости мышления:

а) допускают несколько способов решения;

б) требуют конструирования нового способа из ранее изученных, применения вспомогательных приемов;

в) требуют необычного способа решения, при этом полезно
завуалировать необходимость необычного способа таким содер­жанием и структурой, которые по виду напоминают обычную стандартную задачу;

г) решаются известным способом, но необычное содержание задачи маскирует этот способ.

*Задачи повышенной трудности.*

В качестве примера таких задач приведу систему заданий для учащихся 7-9 классов по углубленному изучению курса математики. Данная система разработана на основе технологии развивающего обучения и способствует развитию у учащихся математических способностей. Задания вводятся во внеучебное время, учащиеся могут выполнять их либо самостоятельно, либо с помощью учителя, родителей, учеников старших классов. Один раз в неделю учитель проводит консультации по выполнению предложенных заданий.

Сама система заданий представлена в приложении 2. Она включают опорные знания и умения базовой программы. Вместе с тем углубленное обучение с помощью этой системы заданий имеет свои особенности:

* необходимо на основании диагностических исследований производить отбор учащихся: за трехлетний цикл учебы в 7-9 классах данную систему заданий могут усвоить в полном объеме только хорошо подготовленные ученики;
* в системе заданий учтено, что у учащихся 7 класса не сформировано целостное представление о математике как науке;
* задания тесно связаны, переплетены с тем, чем учащиеся занимаются на уроках алгебры и геометрии;
* при выполнении заданий учащимся помогают специальные опорные конспекты по каждой теме, составленные на уроке;
* при организации работы по предложенной системе заданий необходимо проявлять доверие к силам ребенка, диалог учителя и ученика на равных;
* при обучении по предложенной системе заданий вся работа направлена на создание условий для активной, познавательной деятельности, для самостоятельного добывания знаний учащимися, когда требуется самостоятельное осмысливание материала, высказывание собственного мнения об изучаемом, анализ способов познания тех или иных тем.

Разработанная система заданий по математике позволяет:

- максимально использовать резервные возможности в развитии математических способностей каждого ученика;

- добиться быстрого и основательного усвоения углубленных программных знаний с экономией учебного времени;

- повысить интеллектуальный уровень учащихся;

- сформировать навыки выполнения умственных операций;

- повысить качество подготовки школьников по математике.

 Рассмотрю диофантовы уравнения. Такие уравнения настолько разнообразны, что вряд ли существует какой-либо способ, алгоритм для их решения. Об этом убедительно свидетельствует хрестоматийная история так называемой Большой теоремы Ферма, связанная с диофантовым уравнением xn + yn = zn ; при n = 2 это уравнение ещё античными математиками, однако лишь в самом конце прошлого века было доказано, что при других n оно решений не имеет.

В школьном курсе диофантовым уравнениям практически не уделяется внимания. Решение уравнений в целых числах требует изобретательности и потому способствуют развитию математических способностей учащихся. Но прежде учащихся нужно ознакомить с простейшими, стандартными приёмами, подходами к решению уравнения, всегда имеющими поисковый, эвристический характер.

Простейший приём решения состоит в том, что одна переменная выражается через остальные, и полученное выражение исследуется с целью нахождения значений этих переменных, при которых оно является целым числом. При этом, естественно, следует использовать основные понятия и факты, связанные с делимостью, - такие, как простые и составные числа, признаки делимости, взаимно простые числа и др.

Особенно часто применяются следующие утверждения:

1. Если произведение делится на простое число *p*, то хотя бы один из его сомножителей делится на *p*.
2. Если произведение делится на некоторое число *с* и один из его сомножителей взаимно прост с числом *с*, то второй множитель делится на *с.*

Задача 1. *Решить в целых числах уравнение x²y – y = 2005x.*

Решение. Выразим переменную *y* через *x: y* = $\frac{2005x}{\left(x-1\right)(x+1)}$ и рассмотрим прежде всего «крайний» случай, который всегда «мешает» общим рассуждениям о делимости: *х = 0*. В этом случае получаем решение заданного уравнения *х = 0, y = 0*, и далее считаем, что *х ≠ 0.*

 Числа *х* и *х –* 1 всегда взаимно простые, и, согласно утверждению, 2005 делится на *х –* 1, и точно так же делится на *х +* 1. При этом разность этих делителей равна 2 и -2. Но среди делителей числа 2005 = 5·401, т.е. чисел ±1, ±5, ±401 таких чисел только два: 1 и -1. Следовательно, *х* – 1 = -1,

 *х* + 1 = 1, т.е. *х = 0*, т.е. уравнение имеет только одно решение ( 0;0).

Заметим, что выражать *y* через *x* вовсе не обязательно, и из исходного вида уравнения сразу можно сделать вывод, что 2005*х* делится на *х2* – 1.

Задача 2. *Решить в целых числах уравнение xy2 + x = y(2005 – 2x).*

Решение. Из уравнения имеем *x =* $\frac{2005y}{(y+1)^{2}}$*.* Так как числа *y* и *y + 1* взаимно простые, то *(y + 1)2* и *y* взаимно простые. Поэтому, для того чтобы дробь, стоящая в правой части равенства, была целым числом, необходимо, чтобы число 2005 делилось на *(y + 1)2*. Это возможно, если *(y + 1)2 = 1* – так как среди натуральных делителей числа 2005: 1, 5, 401, 2005 только 1 является полным квадратом, и следовательно, уравнение имеет два решения: (0;0), (-4010; -2)

Задача 3. *Решить в целых числах уравнение y2 - 3x = 2005.*

Решение. Данное уравнение означает, что *2005* - *y2* делится на 3, и поскольку 2005 = 2004 + 1, то на 3 должно делиться число *1 - y2*, или, что то же самое, *y2 – 1 = ( y – 1)( y + 1)*. А это верно только в случае, когда само *y* не делится на 3, т.е. *y* имеет вид либо *3n – 1*, либо *3n + 1*. При  *y = 3n – 1* уравнение принимает вид *9n2 – 6n + 1- 3x = 2005, 3n2 – 2n - x = 668, откуда x= 3n2 – 2n – 668,* и точно так же для *y = 3n + 1* получаем *x= 3n2 + 2n – 668*.

Таким образом, заданное уравнение имеет бесконечное множество решений вида *(3n2 – 2n – 668, 3n - 1 )* и *(3n2 + 2n – 668, 3n + 1)*, *n* – любое целое число.

Столь же простым эвристическим приёмом является запись условия в виде равенства некоторого выражения и числа, после чего надо перебрать все возможные случаи разложения этого числа на множители.

Задача 4. *Решить в целых числах уравнение x3 – y – 2005 =yx2 – x.*

Решение. Заданное уравнение легко преобразуется к виду *x3 – yx2 +x – y = 2005, (x – y)( x2 + 1) = 2005.*

Так как число *x2 + 1* натуральное, то оно равно 1, 5, 401, т.е. все целые решения уравнения получаются как решения систем:

$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+ 1=1\\x- y=2005,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x^{2}+ 1=5\\x- y=401,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x^{2}+ 1=401\\x- y=5.\end{array}\right.$$

Они легко находятся: (0;-2005), (2;-399), (-2;-403), (20; 15), (-20; -15).

Задача 5. *Решить уравнение* $\frac{x}{y}$ *+* $\frac{y}{z}+ \frac{z}{x}$ *= 2005, где x, y, z – целые попарно взаимно простые числа.*

Решение. Попарная взаимная простота чисел  *x, y, z* означает, что никакая пара из этих чисел не имеет общих простых делителей.

Освободившись от дробей, получаем уравнение *x2z + y2 x + z2 y = 2005 xyz,* из которого следует, что *x2z* делится на *y*, хотя числа *x, y* и *z*, а значит, и числа *x2z* и *y*, по условию, не имеют общих простых множителей, такая ситуация возможна только в случае, когда *y* вообще не имеет простых множителей, т.е. *y* = ±1. Аналогично, *x* и *z* равны ±1. Отсюда следует, что уравнение не имеет решений.

Ещё один достаточно эффективный подход к решению диофантовых уравнений – рассмотрение возможных остатков от деления одного целого числа на другое. Этот подход опирается прежде всего на известное свойство деления с остатком: если при делении на натуральное число *n* числа *а* и *b* дают соответственно остатки *r* и *s,* то сумма *а* + *b,* разность *а* – *b*, произведение *аb* при делении на *n* дают те же остатки, что и числа *r* + *s, r* – *s* и  *rs.*

Самое сложное в применении рассматриваемого метода – выбор «подходящего» значения *n*, и иногда приходится делать несколько попыток.

Задача 6. *Решить в целых числах уравнение x2 + 2005y = 3.*

Решение. Так как 2005 делится на 5, то заданное уравнение означает, что *х2* при делении на 5 даёт остаток 3, а это невозможно, и следовательно, в целых числах уравнение решений не имеет.

Задача 7. *Решить в целых числах уравнение* $\sqrt{х}$ *+* $\sqrt{у}$ *=* $\sqrt{2005}$*.*

Решение. Уравнение имеет два тривиальных целочисленных решения: (0; 2005) и (2005; 0). Докажем, что других решений нет.

Имеем:

*2005 = х + у + 2*$\sqrt{ху}$*, 2005 – х + у = 2у + 2*$\sqrt{ху}$*,*

*2005 – х + у = 2*$\sqrt{у}$*(*$\sqrt{х}$ *+* $\sqrt{у}$*),* а из полученного уравнения вместе с заданными следует, что

*(2005 – х + у)2 = 4у(*$\sqrt{х}$ *+* $\sqrt{у}$*)2,*

*(2005 – х + у)2 = 4у·2005.*

Так как 2005 = 5·401, и числа 5 и 401 – простые, то правая часть является точным квадратом только в том случае, когда число *у* имеет *вид у = t2·5·401*, где можно считать, что целое число *t ≥ 0.* Но при *t ≥ 1* имеем *у ≥ 2005*, $\sqrt{у} $*≥*$ \sqrt{2005}$*,* а тогда при *х ≠ 0* $\sqrt{х}$ *+* $\sqrt{у }$ *>* $\sqrt{у }$ *≥* $\sqrt{2005}$, т.е. уравнение не имеет решений, кроме полученных в самом начале.

Примеры задач для самостоятельного решения приведены в приложении 3.

Выводы.

Основополагающим в процессе развития математических способностей является грамотный подбор задач. Видов задач большое количество, каждая задача выполняет свою отдельную функцию (чаще даже несколько функций). Так занимательные задачи направлены на формирование познавательного интереса к изучению математики, развивают математическую смекалку. Задачи повышенного уровня сложности предназначены для более глубокого, вдумчивого, осмысленного понимания пройденных тем школьного курса математики. В учебных пособиях наблюдается дефицит нестандартных задач, решение которых требует от учеников умственного напряжения, проявления самостоятельности и творчества. Такое многообразие задач требует от учителя так называемой «задачной эрудиции». А ведь не каждый учитель, особенно начинающий, может похвастаться большим «банком задач» или умением их грамотно отбирать. Для решения этих проблем должна служить компьютеризация школ. Это поможет создать базу данных в школах с помощью программы Access. Основу базы данных будут составлять методические разработки по развитию математических способностей. Так как способности развиваются только в процессе специально организованной деятельности, в нашем случае при решении математических задач, то в основном методические разработки должны представлять собой различные комплексы задач; хотя возможности базы данных не исключают хранение различных обучающих программ, демонстрационных роликов, конспектов уроков и т.п.(OLE-объектов).

Заключение.

Задача всестороннего и гармонического развития личности делает совершенно необходимой глубокую научную разработку проблемы способностей школьников. Разработка этой проблемы представляет как теоретический, так и практический интерес.

Проблема способностей – это проблема индивидуальных различий. Каждый человек к чему-нибудь оптимально способен, но способности людей не одинаковы. Каждый человек более способен к одним и менее способен к другим видам деятельности. Это ставит перед школой задачу максимально возможного развития всех способностей ученика, уделяя при этом внимание развитию главной, ведущей способности, как основы его будущей профессиональной направленности. Итак, учитель математики на своих уроках должен развивать математические способности учеников, при этом учитывать возможности и интересы каждого из них.

Как же развиваются способности? Способности не есть нечто раз навсегда предопределённое, они формируются и развиваются в процессе обучения, в процессе упражнения, овладения соответствующей деятельностью. Если к этому добавить принцип учета индивидуальных и возраст­ных особенностей учащихся, то мы сталкиваемся с проблемой недостатка методической информации, в частности дидактических материалов.

Эта проблема легко решается, если использовать современные информационные технологии. Разработанная база данных предоставляла бы учителю готовые методические разработки по развитию математических способностей и позволяла бы осуществлять быстрый автоматический поиск необходимой информации. Но это не означает, что база данных способна решить все проблемы по развитию математических способностей.

Так как педагогика не стоит на месте, то база данных нуждается в регулярном пополнении новыми методическими разработками. Процесс развития способностей не отделим от процесса диагностики этих способностей, поэтому идеально было бы объединить базу данных с автоматизированной системой тестирования, которая бы по результатам теста автоматически находила в базе данных необходимые задания по развитию математических способностей.

Если учитель не знаток своего дела, то никакая база данных не разовьёт способности у его учеников. В процессе развития способностей главенствующую роль играет учитель, его профессионализм, а база данных – лишь инструмент, облегчающий его работу. Поэтому для процесса развития способностей так важна личность учителя, его жизненная позиция. Только педагог с активной жизненной позицией, постоянно занимающийся личным и профессиональным самосовершенствованием, постигающий новые педагогические технологии, методы и приёмы может достичь высоких успехов в процессе развития математических способностей своих учеников.

Литература.

1. Ведерникова Т. Н. , Иванов О. А. Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики // Математика в школе - №3.-2002.
2. Венгер Л.А. Педагогика способностей. – М., 1973.
3. Выплов Ю. Развитие мыслительной деятельности учащихся. //Математика. – 2003 - №24.
4. Гингулис Э.Ж. Развитие математических способностей учащихся. //Математика в школе. – 1990 - №1.
5. Гнеденко Б.В. Развитие мышление и речи при изучении математики. //Математика в школе. – 1991 - №4.
6. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: Вербум-М: Академия, 2003.
7. Колмогоров А.Н. Математика - наука и профессия. М., 1988.
8. Кордемский Б.Л. Математическая смекалка. – 9-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. Физ. - мат. Лит.,1991.
9. Кордемский Б.Л. Очерки о математических задачах на смекалку. – М.:Учпедгиз, 1958.
10. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968.
11. Метельский Н.В. Пути совершенствования обучения математике. – Минск: Университетское, 1989.
12. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителей. – Львов: «Квантор», 1991.
13. Окунев А.А. Спасибо за урок, дети!: ..о развитии творческих способностей учащихся: Книга для учителя: Из опыта работы. – М.: Просвещение, 1988.
14. Педагогика: Большая современная энциклопедия. /Сост. Рапацевич Е.С. – Мн.: «Соврем. слово», 2005.
15. Российская педагогическая энциклопедия в 2-х т. – М.: Науч. издательство «Большая Российская энциклопедия», 1999. – Т2.
16. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – М., 1989.
17. Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии. – М.: Педагогика, 1976.
18. Сефибеков С.Р. Учитель, умей направлять ученика. //Математика в школе. – 1991 - №5.
19. Теплов Б.М. Способности и одарённость. – М., 1961.
20. Хамов Г.Г., Тимоеева Л.Н. Решение уравнений в целых числах. // Математика в школе. – 2006 - №9.
21. Хинчин А.Я. Педагогические статьи. – М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1963.
22. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – Томск: Изд-во Том. ун-та. Москва: Изд-во «Барс», 1997.
23. Шадриков В.Д. О структуре познавательных способностей. //Психологический журнал – 1985 - №3.
24. Юркевич В.С. А. Н. Колмогоров и проблема развития математической одаренности. //Вопросы психологии – 2001 - № 3.
25. Якиманская И.С. Психологические основы математического образования: Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.:Издательский центр «Академия», 2004.

Приложение 1.

Классификация параметров математических способностей

БЛОК 1.

Параметры математических способностей, влияющие на развитие общих способностей учащихся

*1.1. Параметры математических способностей, характеризующие качества личности и особенности мыслительной деятельности, имею­щие врожденный характер*

*1.2. Параметры математических способностей, влияющие на повыше­ние эффективности любой учебной деятельности учащихся*

1.1.1. Качества личности:

 — волевая активность и трудо­способность;

— настойчивость в достижении поставленной цели;

— наблюдательность;

— память;

— произвольное управление своим вниманием;

— интровертность;

— интеллектуальная любозна­тельность

1.2.1. Владение основными при­емами учебной деятельности:

— привычка работать упорядо­ченно;

— умение схематизировать;

— умение самостоятельно добы­вать знания;

— умение делать выводы

1.1.2. Качества мыслительной деятельности:

— умение абстрактно мыслить;

— лаконизм;

— точность, сжатость, ясность словесного выражения мысли;

— сообразительность;

— умение анализировать

1.2.2. Владение приёмами иссле-довательской и творческой учебной деятельности:

— искусство последовательного, правильно расчлененного логическо­го рассуждения;

— умение ставить новые во­просы;

— умение сопоставлять выводы

БЛОК 2.

Параметры математических способностей, обеспечивающие

полноценную математическую деятельность

*2.1. Параметры, характеризую­щие «математический стиль» мыш­ления:*

- гибкость мыслительного процесса;

- обратимость мыслительного
процесса при математическом рассуждении;

- предельная скупость, суровая
строгость мысли и ее изложения;

- стремление к ясности, просто­те, экономности и рациональности
решений

*2.2.* *Параметры, характеризую­щие качества личности учащихся как математиков, имеющие природную обусловленность или приобретенные в процессе математической деятель­ности:*

- склонность находить логиче­ский и математический смысл во всех
явлениях действительности;

- привычка к полноценной логической аргументации;

- быстрота усвоения учебного
материала;

- геометрическое воображение
или «геометрическая интуиция»;

- обладание достаточным тер­пением при решении математиче­ских задач;

- математическая память

2.3. Параметры, характеризующие математическую деятельность

учащихся

2.3.1. Вводно-ориентировочный этап математической деятельности:

- умение от конкретной ситуации перейти к математической фор­мулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующей существо дела;

- умение анализировать состав заданного математического объекта;

- умение применять выводы; умение выводить логические след­ствия из данных предпосылок

2.3.2. Этап умственных действий:

- обнаружение и обобщение закономерностей, представленных
в конкретном материале;

- анализ математической структуры;

- умение сравнивать и классифицировать числовые и простран­ственные данные;

- умение вычленять и устанавливать зависимости между различными элементами чисел, геометрических фигур;

-владение достаточно развитой математической речью

2.3.3. Этап практических действий:

- применение общих принципов и оперирование абстрактными ко­личествами;

- манипулирование математическими схемами и отношениями;

- понимание и умение правильно применять принцип математической индукции;

- умение наглядно представлять пространственные фигуры

Приложение 2.

Система заданий для учащихся 7-9 классов по углубленному изучению школьного курса математики.

7 КЛАСС

1. Верно ли, что для любых чисел *a* и *b* выполняются условия



2. Известно, что . Верно ли, что ?

3. Известно, что . Запишите в виде двойного неравенства, что среднее арифметическое чисел *a* и *b* заключено между числами *a* и *b*.

4. При каких значениях коэффициента *m* уравнение *mx=5* имеет единственный корень? Существует ли такое значение *m*, при котором это уравнение не имеет корней? Имеет бесконечно много корней?

5. Решите уравнения:

а) *(х+2)(х-9) = 0*

б) *(х+1)(х-1)(х-5) = 0*

6. Не решая уравнения *7(2х+1)=13* докажите, что его корень не является целым числом.

7. При каких значениях *а* уравнение *ах = 8* имеет а) корень, равный *-4*; б) не имеет корней; в) имеет отрицательный корень.

8. При каком значении *а* точка *А (а; -1)* принадлежит графику функции *у=3,5х*

9. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой служит прямая, проходящая через точку *А(2;3)* и параллельная графику функции *у=1,5x - 3*

10. Докажите, что уравнение  не имеет положительных корней.

11. Точка *А(a;b)* принадлежит графику функции *у=х∙х*. Принадлежат ли этому графику точки *В(-a;b), C(a; -b), D(-a; -b)*.

12. Докажите, что сумма чисел и  кратна сумме *a* и *b*.

13. Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить на первое место, то число увеличивается на 324. Найти трехзначное число.

14. Докажите, что значение выражения *а∙а - а* кратно 2 при любом целом значении *а*.

15. Решите уравнения:



8 КЛАСС

1. Докажите, что *(а+1)(b+1) – (а-1)(b-1) =18*, если *а+ b=9*

2. Представьте в виде произведения:

а) *(х+1)3 + х3*;

б) *27а3 – (а - b)3*.

3. Решите уравнение *х3 - 2х2 - х + 2 = 0.*

4. Постройте график уравнения

а) *(х-2)(у-3) =0*

б) 

5. При каком значении *k* система  имеет единственное решение?

6. Написали два числа. Если первое число увеличить на 30%, а второе уменьшить на 10%, то их сумма увеличится на 6. Если же первое число уменьшить на 10%, а второе на 20%, то их сумма уменьшится на 16. Какие числа были написаны?

7. Построить треугольник:

а) по двум сторонам и высоте, проведенной из одной вершины;
б) по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла;
в) по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону;

г) по острому углу и двум высотам, проведенным к сторонам, образующим данный угол.

8. На продолжениях медиан BM и CN треугольника ABC за точки M и N отложены отрезки MP и NQ, соответственно равные BM и CN. Докажите, что прямая PQ проходит через точку A.

9. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если BC=12.

10. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

11. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30 градусам, а гипотенуза равна 8. Найти отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

9 КЛАСС

1. Построить графики следующих функций:



2. При каких целых значениях *n* значение выражения  является натуральным числом?

3. Упростить выражения:



4. Решите уравнения:



5. При каких значениях параметра *а* один из корней уравнения *(а2 - 5а + 3)∙х2+ (3а - 1)∙х + 2 = 0* в два раза больше другого?

6. При каких значениях параметра *b* уравнение *х2 + bх + 4 = 0*: а) имеет один из корней, равный 3; б) имеет различные корни; в) имеет один корень; г) не имеет корней?

7. Сторона треугольника равна *а*. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.

8. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до стороны, противолежащей этой вершине.

9. Найти отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

10. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

Приложение 3.

Система задач для самостоятельного решения.

1. На какое наименьшее натуральное число надо умножить 9, чтобы десятичная запись произведения оканчивалась на 2005?
2. Если к натуральному числу *a* прибавить 20 или вычесть 69, то в обоих случаях получим квадрат натурального числа. Найти число *a.*
3. Найти год рождения тех людей, которым в 2005 г. Исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения.
4. Решить в натуральных числах уравнение x5 - x3 = 2005y3, где y – простое число.

*Указание*. При любом х левая часть уравнения является числом чётным.

1. Решить в целых числах уравнение 3x2 – y2 + 4z2 = 2005.

*Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 4.

1. Решить в целых числах уравнение x2 – 2y2 + 8z2 = 20052005.

*Указание*. Рассмотреть остатки от деления на 8.

1. Решить в целых числах уравнение 2x2 - 3xy + y2 – x + 2y – 3 = 0.

*Указание*. Разложить левую часть на множители как квадратный трёхчлен от переменной х.

1. Решить в натуральных числах уравнение 2х + 7у = 2005z.

*Указание*. Рассмотреть остатки от деления на 3.

1. Решить в целых числах уравнение х4 + у4 = 2005z2.

*Указание*. Рассмотреть остатки от деления на 3.

1. Решить в натуральных числах уравнение у2 – 2005 = х!

*Указание*. Рассмотреть остатки от деления на 7. Маленькик значения х проверить непосредственно.

1. Решить в натуральных числах уравнение 3х3 + 9у3 + 2005z3 = 0.

*Указание*. Если х, у, z – натуральное решение уравнения, то z делится на 3, z = 3k, а тогда х и у также должны делиться на 3, т.е. х = 3m, у = 3n.

После подстановки в уравнение и сокращения получаем то же самое уравнение для новых переменных.

1. Решить в целых числах уравнение 3х2 – у2 = 2005z2.

 *Указание*. Доказать, что число 3х2 – у2 делится на 5 тогда и только тогда, когда числа х и у оба делятся на 5. Поэтому и z делится на 5, и можно применить использованный в предыдущей задаче так называемый метод спуска.