Представить в виде многочлена (*x*2 - http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif)2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Применяем формулу квадрата разницы и получаем:

(*x*2 - http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif)2 = (*x*2)2 - 2·*x*2·http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif + (http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif)2 = *x*4 - 2http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif*x*2 + 5.

Ответ: *x*4 - 2http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol1.gif*x*2 + 5.

Представить в виде многочлена -(http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif - *x*)(*x*2 - 3)(*x* + http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Очевидно, что можно решить задачу открыв первые две скобки, далее последующие две. Но, если присмотреться, можно заметить более простой путь к решению задачи. А именно - занеся минус в первые скобки и открыв крайние мы получим квадрат разности, который легко преобразуется в многочлен:

-(http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif - *x*)(*x*2 - 3)(*x* + http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif) = (*x* - http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif)(*x* + http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol2.gif)(*x*2 - 3) = (*x*2 - 3)(*x*2 - 3) = (*x*2 - 3)2 = *x*4 - 6*x*2 + 9.

Ответ: *x*4 - 6*x*2 + 9.

Разложить на множители *x*3 - 3*x*2 + 4.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Глянув на выражение сложно решить, что делать, какую формулу сокращенного умножения здесь применить. Потому для начала нужно сгруппировать выражение так, чтобы применение формулы стало очевидным. Такие решения нетривиальны. Навык, чувство группировки вырабатывается после решения определенного количества подобных задач.

В данной задаче отметим, что отняв и добавив *x*2 у нас появляются возможные варианты для группирования. Далее применяя формулы сокращенного умножения получаем ответ:

*x*3 - 3*x*2 + 4 = *x*3 + *x*2 - 4*x*2 + 4 = *x*2(*x* + 1) - 4(*x*2 - 1) =

= *x*2(*x* + 1) - 4(*x* - 1)(*x* + 1) = (*x*2 - 4(*x* - 1))(*x* + 1) = (*x*2 - 4*x* + 4)(*x* + 1) = (*x* - 2)2(*x* + 1).

Ответ: (*x* - 2)2(*x* + 1).

Разложить на множители *x*4 - 4*x*3 + 3*x*2 + 4*x* - 4.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Пусть вас не пугает степень многочлена и неясность, что делать. Начинайте группировать выражения и вскоре вы прийдете к ответу:

*x*4 - 4*x*3 + 3*x*2 + 4*x* - 4 = *x*2(*x*2 - 4*x* + 3) + 4(*x* - 1) = *x*2(*x*2 - *x* - 3*x* + 3) + 4(*x* - 1) =

= *x*2(*x*[*x* - 1] - 3[*x* - 1]) + 4(*x* - 1) = *x*2(*x* - 3)(*x* - 1) + 4(*x* - 1) = (*x* - 1)(*x*2[*x* - 3] + 4) =

= (*x* - 1)(*x*3 - 3*x*2 + 4).

Так как мы уже решили предыдущую задачу, то знаем, что второй множитель (*x*3 - 3*x*2 + 4) равен (*x* - 2)2(*x* + 1), а потому:

(*x* - 1)(*x*3 - 3*x*2 + 4) = (*x* - 1)(*x* + 1)(*x* - 2)2.

Ответ: (*x* - 1)(*x* + 1)(*x* - 2)2.

Подставить вместо многоточия одночлены так, чтобы выполнялось равенство

(3*x* + ...)2 = 9*x*2 + 6*ax* + ...

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Найдем второй, неизвестный пока что член квадрата суммы. Мы знаем, что 6*ax* является удвоенным произведением членов. А так как первый равен 3*x*, то второй будет равен 6*ax* / 2·3*x* = *a*. Запишем:

(3*x* + *a*)2 = 9*x*2 + 6*ax* + ...

Далее получим недостающий одночлен, как квадрат второго члена, согласно формуле. Он будет равен *a*2.

Ответ: (3*x* + *a*)2 = 9*x*2 + 6*ax* + *a*2.

Подставить вместо многоточия одночлены так, чтобы выполнялось равенство

(15*x* - ...)2 = ... - ... + 50*y*.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Согласно формуле сокращенного умножения квадрата разницы найдем второй член в равенстве слева. Его квадрат равен 50*y*, а, значит, недостающий одночлен равен http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol3.gif. Левая часть равенства определена, теперь нам не составит труда заполнить остальные многоточия. (15*x*)2 = 225*x*2 - первый одночлен правой части найден. Найдем и второй 2·15*x*·5http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol4.gif = 150*x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol4.gif.

Ответ: (15*x* - 5http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol4.gif)2 = 225*x*2 - 150*x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/brief_mult/brief_mult_sol4.gif + 50*y*.

Найти трехзначное число, записанное в десятичной системе в виде *abc*, равное полусумме чисел *bca* и *cab*.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Перепишем условие задачи и получим:

2(100*a* + 10*b* + *c*) = (100*b* + 10*c* + *a*) + (100*c* + 10*a* + *b*),

что после превращения преобразуется в 7*a* = 3*b* + 4*c*, или 3(*a* - *b*) = 4(*c* - *a*). Отсюда следует, что *a* - *b* делится на 4, т.е. *a* - *b* = 4*m*. Из равенства 3(*a* - *b*) = 4(*c* - *a*) получаем, что *c* - *a* = 3*m*. Сложив равенства *a* - *b* = 4*m* и *c* - *a* = 3*m* получаем *c* - *b* = 7*m*. Но |*c* - *b*| ≤ 9, а потому *m* может принимать лишь значения -1, 0, 1. Если *m* = 1, то из равенства *c* - *b* = 7*m* получаем, что возможны лишь следующие случаи: 1) *c* = 7, *b* = 0; 2) *c* = 8, *b* = 1; 3) *c* = 9, *b* = 2. А так как *c* - *a* = 3*m*, то отсюда получаем для *a* значения 4, 5, 6. И числа-ответы: 407, 518, 629. Аналогично, при *m* = -1 находим числа 370, 481, 592. Наконец, при *m* = 0 получаем *a* - *b* = 4*m* = 0, *c* - *a* = 3*m* = 0, т.е. *a* = *b* = *c*. Получаем еще 9 чисел: 111, 222, ... ,999.

Ответ: 407, 518, 629, 370, 481, 592, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.

Найти четырехзначное число *abca* (в десятичной записи), равное (5*c* + 1)2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Учтем, что 0 < *a* ≤ 9; 0 ≤ *b* ≤ 9; 0 ≤ *c* ≤ 9; *a*, *b*, *c* http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/e.gif*Z* и согласно условию запишем:

1001*a* + 100*b* + 10*c* = 25*c*2 + 10*c* + 1;

25*c*2 = 1001*a* + 100*b* - 1;

25*c*2 - 1000*a* - 100*b* = *a* - 1;

Левая часть равенства делится на 25, значит и *a* - 1 должно делится на 25. Единственный возможный вариант - *a* = 1. Тогда

25*c*2 - 100*b* = 1000;

*c*2 = 40 + 4*b*;

*c* = 2http://easymath.com.ua/pic/formulas/whole/whole_sol1.gif.

Корень из *b* + 10 должен быть целым числом, а, согласно ограничениям на *b*, это возможно лишь при *b* = 6. Значит *c* = 8. Искомое число 1681.

Ответ: 1681.

Пусть *p* - простое число. Доказать, что 8*p*2 + 1 - простое число, лишь при *p* = 3.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

При *p* = 3, 8*p*2 + 1 = 73 - простое число. Докажем, что если *p* ≠ 3, то 8*p*2 + 1 - составное.

Из всех чисел кратным трем, лишь число 3 является простым. Пусть *p* не равно 3. Тогда *p* = 3*k* ± 1. Тогда 8*p*2 + 1 = 8(3*k* ± 1)2 + 1 = 8(9*k*2 ± 6*k* + 1) + 1 = 72*k*2 ± 48*k* + 9 = 3(24*k*2 ± 16*k* + 3). Т.е., если *p* = 3*k* ± 1, то 8*p*2 + 1 - составное. А значит лишь при *p* = 3, число 8*p*2 + 1 - простое.

Что и требовалось доказать.

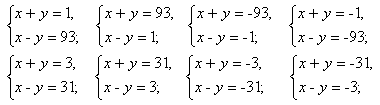
Решить уравнение *x*2 - *y*2 = 93 в целых числах.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для решения данной задачи необходимо найти все пары целых чисел (*x*; *y*), которые удовлетворяют условию или показать, что таких пар не существует.

Так как левая часть равенства можно разложить на множители, то резонно это сделать:

(*x* - *y*)(*x* + *y*) = 93;

Правая часть имеет восемь делителей: 1, 3, 31, 93, -1, -3, -31, -93, а потому может быть разложено на два целых множителя лишь восемью способами. А значит и уравнение имеет решения в восьми случаях:  


Решив каждую из систем, получаем восемь пар решений исходного уравнения (47; 46), (47; -46), (-47; 46), (-47; -46), (17; 14), (17; -14), (-17; 14), (-17; -14).

Ответ: пары чисел (*x*; *y*) равны (47; 46), (47; -46), (-47; 46), (-47; -46), (17; 14), (17; -14), (-17; 14), (-17; -14).

Решить уравнение *xy* + 3*x* - 5*y* = -3 в целых числах.

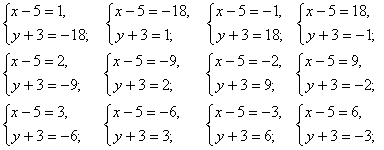
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В данном уравнение левая часть явно на множители не разлагается. Однако, мы можем к обоим частям добавить целые числа, чтобы разложить левую часть на множители:

*x*(*y* + 3) - 5*y* = -3;

*x*(*y* + 3) - 5*y* -15 = -18;

(*x* - 5)(*y* + 3) = 18.

Получаем следующие системы:  


Решая их, получаем следующие ответы (*x*; *y*) - (6; -21), (-13; -2), (4; 15), (23; -4), (7; -12), (-4; -1), (3; 6), (14; -5), (8; -9), (-1; 0), (2; 3), (11; -6).

Ответ: пары (*x*; *y*) равны (6; -21), (-13; -2), (4; 15), (23; -4), (7; -12), (-4; -1), (3; 6), (14; -5), (8; -9), (-1; 0), (2; 3), (11; -6).

Решить уравнение 4*x*3 - 2*y*3 - *z*3 = 0 в целых числах.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В данной задаче левая часть не разлагается на множители и, вообще, сложно найти преобразование, ведущее к решению этой задаче.

Остается исследовать свойства чисел, входящие в уравнение. Один из вариантов - метод бесконечного спуска.

В данном уравнении 4*x*3 и - 2*y*3 делятся на 2, значить и *z*3 должно делиться на 2. Обозначим *z* = 2*z*1, где *z*1 ∈ *Z*.

Подставляем в исходное уравнение, получаем:

4*x*3 - 2*y*3 - 23*z*13 = 0;

2*x*3 - *y*3 - 4*z*13 = 0.

Теперь мы видим, что 2*x*3 и - 4*z*13 делятся на 2. Значит и - *y*3 должно делится на 2. Обозначим *y* = 2*y*1, где *y*1 ∈ *Z*.

Тогда 2*x*3 - 23*y*13 - 4*z*13 = 0;

*x*3 - 4*y*13 - 2*z*13 = 0.

Отчего следует, что *x*3 делится на 2. Полагая, что *x* = 2*x*1, где *x*1 ∈ *Z*, получим:

23*x*13 - 4*y*13 - 2*z*13 = 0;

43*x*13 - 2*y*13 - *z*13 = 0.

Какие выводы можно сделать? Мы видим, что тройка (*x*; *y*; *z*) должна быть четная. Но при этом числа (*x*1; *y*1; *z*1), которые равны предыдущей тройке уменьшенной на 2, также удовлетворяют уравнению. Но раз так, значит и они должны делиться на 2.

Получается, что числа удовлетворяющие условию задачи должны быть четными, сколько бы раз мы их не делили на 2. Единственным четным числом, удовлетворяющим данное условие есть 0. Из чего делаем вывод, что решение данного уравнения одно *x* = *y* = *z* = 0.

Ответ: *x* = *y* = *z* = 0.

Найти остатки от деления квадрата целого числа на 3.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Целое число *x* при делении на 3 может давать следующие остатки: 0, 1, 2. Рассмотрим все случаи:

Пусть *x* = 3*k* (*k* ∈ *Z*).

*x*2 = (3*k*)2 = 9*k*2. Т.е. остаток будет равен 0.

Пусть *x* = 3*k* + 1 (*k* ∈ *Z*).

*x*2 = (3*k* + 1)2 = 9*k*2 + 6*k* + 1. Видим, что первые два слагаемые делятся на 3, а третье дает остаток 1, потому и квадрат числа в данном случае будет давать остаток 1 при делении на 3.

Пусть *x* = 3*k* + 2 (*k* ∈ *Z*).

*x*2 = (3*k* + 2)2 = 9*k*2 + 6*k* + 4. Видим, что первые два слагаемые делятся на 3, а третье также дает остаток 1, потому и квадрат будет иметь остаток равен 1 при делении на 3.

Мы перебрали все случаи и видим, что квадрат целого числа при делении на 3 всегда дает остаток 0 или 1.

Ответ: Остаток равен 0 или 1.

Решить уравнение |2*x* - 3| = 7.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Очевидно, что у нас есть две возможности: 2*x* - 3 = 7 или 2*x* - 3 = -7. Отсюда несложно получить, что *x* = 5, или *x* = -2.

Ответ: *x* = 5, или *x* = -2.

Решить уравнение |*x*2 - 2*x* - 7| = 4.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

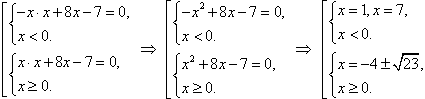
Воспользуемся методом решений № 2 и перейдем к совокупности:  
http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol1.gif

А далее имеем:  
http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol2.gif

Ответ: *x* = -1, *x* = 3 или http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol3.gif

Решить уравнение *x*|*x*| + 8*x* - 7 = 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

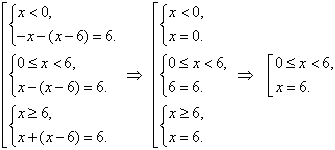
Используем первый метод и представляем уравнение в виде следующей совокупности:  


Первая система не дает корней, со второй подходит лишь http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol5.gif.

Ответ: *x* = http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol5.gif.

Решить уравнение |*x*| + |*x* - 6| = 6.

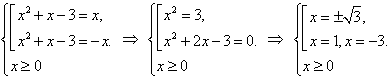
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Опять воспользуемся методом № 1 и перейдем к совокупности:  


Ответ: *x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol7.gif.

Решить уравнение |*x*2 + *x* + 3| = *x*.

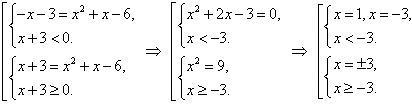
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся методом решений № 3. Получим систему:  


Ответ: *x* = 1 или *x* = http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol9.gif.

Решить уравнение |*x* + 3| = *x*2 + *x* - 6.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Увидев задание можно тут же браться решать его методом № 3. Однако в этом случае нужно будет расскладывать правую часть уранения на корни. Давайте лучше воспользуемся методом № 1 и раскроем модуль:  


Ответ: *x* = 3 или *x* = -3.

Решить неравенство |*x*2 - 4| < 3*x*.

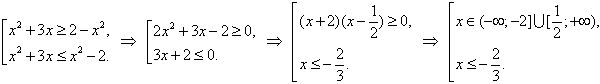
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся методом решения № 4 и запишем данное неравенство так:  
http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol11.gif

Ответ: *x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol12.gif.

Решить неравенство |*x*2 + 3*x*| ≥ 2 + *x*2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Применяем метод № 5, получаем совокупность:  


Ответ: *x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol14.gif.

Решить неравенство |*x*2 + *x* - 2| > |*x* + 2|.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для решения - возведем обе части неравенства в квадрат, согласно методу № 6:

(*x*2 + *x* - 2)2 > (*x* + 2)2;

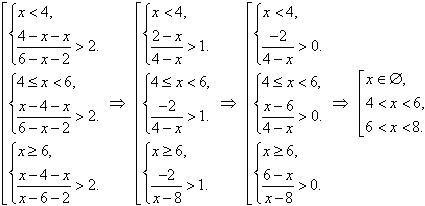
(*x* - 1)2(*x* + 2)2 > (*x* + 2)2

Укажем, что *x* = -2 не является корнем и сократим на (*x* + 2)2:  
http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol15.gif

Ответ: *x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol16.gif.

Решить неравенство  http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol17.gif.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Не стоит пугаться вида данной задачи. Давайте просто расскроем модули:  


Ответ: *x*http://easymath.com.ua/pic/formulas/module/module_sol19.gif.

Найти остаток от деления 520 на 24.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем свойства сравнений и получаем:

25 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif1 (mod 24);

52 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif1 (mod 24);

(52)10 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif110 (mod 24);

520 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif1 (mod 24).

Ответ: Остаток равен 1.

Доказать, что при любом *n* http://easymath.com.ua/pic/formulas/common/e.gifN число 37*n*+2 + 16*n*+1 + 23*n* делится на 7.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1) Так как 37 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2 (mod 7), то 37*n*+2 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2*n* · 4 (mod 7);

2) Так как 16 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2 (mod 7), то 16*n*+1 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2*n* · 2 (mod 7);

3) Так как 23 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2 (mod 7), то 23*n* http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2*n* (mod 7);

Согласно свойствам сравнения суммируем следствия трех предыдущих выражений и получаем:

37*n*+2 + 16*n*+1 + 23*n* http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif2*n* · 4 + 2*n* · 2 + 2*n* (mod 7);

Выносим в правой части сравнения 2*n* за скобки:

37*n*+2 + 16*n*+1 + 23*n* http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif7 · 2*n* (mod 7);

А так как правая часть сравнения и модуль делятся на 7, то и левая часть сравнения делится на 7.

Что и требовалось доказать.

Доказать, что (4*n* + 15*n* - 1) делится на 9, если *n* http://easymath.com.ua/pic/formulas/common/e.gifN

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Докажем, что (4*n* + 15*n* - 1) (**1**) делится на 9 с помощью метода математической индукции.

*База индукции:*

При *n* = 1, 4*n* + 15*n* - 1 = 4 + 15 - 1 = 18, которое делится на 9. Проверено.

*Переход:*

Пусть (**1**) выполняется при *n* = *k*. Докажем, что оно выполняется при *n* = *k* + 1:

4*k* +1 + 15(*k* + 1) - 1 = 4 · 4*k* + 15*k* - 14 = 4*k* + 15*k* - 1 + 3 · 4*k* + 15.

Согласно условию перехода 4*k* + 15*k* - 1 делится на 9, осталось показать, что 3 · 4*k* + 15 делится на 9. Заметим, что 3 · 4*k* + 15 = 3(4*k* + 5) (**2**). К тому же

4 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif1 (mod 3);

4*k* http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif1 (mod 3);

4*k* + 5 http://easymath.com.ua/pic/formulas/div/sravn.gif6 (mod 3), что означает, что 4*k* + 5 делится на 3, а (**2**) на 9.

Переход доказан, значит (4*n* + 15*n* - 1) делится на 9.

Что и требовалось доказать.

Доказать, что произведение *k* последовательных целых чисел делится на *k*!

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Запишем (*n* + 1)(*n* + 2)...(*n* + *k*) / *k*! = 1 · 2 · ... · *n* · (*n* + 1)(*n* + 2)...(*n* + *k*) / [*k*! · *n*!] =

= (*n* + *k*)! / [*k*! · *n*!] = (*n* + *k*)! / [*k*! · (*n* + *k* - *k*)!]. А это ни что иное, как C*kn* + *k*, которое является целым числом.

Решить неравенство (*x* + 4)(3 - *x*)(*x* - 2)2 < 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Согласно методу интервалов, описанному в методах решения, изобразим точки -4, 2, 3 на координатной прямой. У нас появится четыре промежутка, на каждом из функция *f*(*x*) = (*x* + 4)(3 - *x*)(*x* - 2)2 сохраняет знак. "Методом пробной точки" исследуем знак *f* на полученых промежутках. Отметим, что точки -4, 2, 3 не входят ответ, т.к. неравенство строгое.

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol1.gif

Получаем ответ - *x* < -4, *x* > 3.

Ответ: *x* ∈ (-∞; -4) ∪ (3; +∞;).

Решить неравенство (*x* - 1)(*x* - 5) < 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем метод интервалов и изображаем на координатной прямой точки 1, 5. Находим значение выражения на полученных трех интервалах методом пробной точки. Например, это точки 0, 2, 6. Значение выражения в этих точках будет значением выражения на всем интервале. Отметим, что неравенство строгое, а потому точки 1, 5 не будут входить в решение (они на картинке отмечены окружностями).

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol2.gif

Видим, что выражение отрицательно на интервале : 1 < *x* < 5, это и будет ответом.

Ответ: 1 < *x* < 5.

Решить неравенство (*x* - 2)(*x* + 13)(*x* - 7) ≥ 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Находим точки, в которых наше выражение обращается в ноль и отмечаем их по порядку на координатной прямой. Это точки -13, 2, 7. Используем метод пробной точки и определяем значение выражения на полученных интервалах. Заметим, что в условии идет нестрогое неравенство, потому точки, в которых выражение равно нулю также будет решением.

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol3.gif

Глядя на картинку, мы может написать ответ: *x* ∈ [-13; 2] ∪ [7; + ∞).

Ответ: *x* ∈ [-13; 2] ∪ [7; + ∞)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Решить неравенство | *x* + 1  *x* - 1 | ≥ 0. |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отметим, что при *x* = 1 выражение не имеет смысла, но при прохождении через эту точку выражение будет менять знак. Потому отмечаем на координатной прямой точки -1, 1, но "выкалываем" точку 1, т.к. она не входит в ОДЗ, а потому и в ответ:

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol4.gif

Теперь легко найти ответ: *x* ∈ (-∞; -1] ∪ (1; +∞).

Ответ: *x* ∈ (-∞; -1] ∪ (1; +∞).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Решить неравенство | 3  *x* | > -2. |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Приведем данное неравенство к нужному нам виду, когда произведение множителей сравнивается с нулем. Для этого перенесем -2 вправо и приведем к общему знаменателю.

|  |  |
| --- | --- |
| 3  *x* | +2 > 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| 3 + 2*x*  *x* | > 0. |

Используем метод интервалов и отмечаем точки -3/2, 0. Рисунок будет иметь вид:

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol5.gif

Теперь мы может написать ответ: *x* ∈ (-∞ -3/2) ∪ (0; +∞).

Ответ: *x* ∈ (-∞ -3/2) ∪ (0; +∞).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Решить неравенство *x* + 8 ≥ | 54  7 - *x* | . |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Приведем неравенство к виду, когда можно будет применить метод интервалов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* + 8 + | 54  *x* - 7 | ≥ 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| *x*2 + *x* - 2  *x* - 7 | ≥ 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| (*x* - 1)(*x* + 2)  *x* - 7 | ≥ 0. |

Используем метод интервалов, обозначаем точки -2, 1, 7 и последнюю "выкалываем", т.к. она не входит в ОДЗ. Находим ответ.

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol6.gif

Ответ: *x* ∈ [-2; 1] ∪ (7; +∞).

Решить неравенство (*x* - 1)3(*x* - 2)2 ≤ 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем метод интервалов, обозначаем точки 1, 2 на координатной прямой.

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol7.gif

Заметим, что выражение будет отрицательным при *x* ≤ 1. Но так как неравенство нестрогое, то точка 2 также будет решением, ведь в этой точке выражение обращается в ноль.

Ответ: *x* ∈ (-∞ 1] ∪ {2}.

Решить неравенство 2 - *x* - *x*3 ≥ 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для начала попробуем разложить данное выражение на множители.

*x*3 + *x* - 2 ≤ 0

(*x*3 - 1) + (*x* - 1) ≤ 0

Используем [формулы сокращенного умножения](http://easymath.com.ua/show_material.php?subp=brief_mult&type=theory).

(*x* - 1)(*x*2 + *x* + 1) + (*x* - 1) ≤ 0;

(*x* - 1)(*x*2 + *x* + 2) ≤ 0;

Отметим, что выражение во вторых скобках положительно при любом *x*, потому на него можно сократить. Будьте внимательны, в случае, если выражение может равняться нулю, на него сокращать нельзя!

*x* - 1 ≤ 0;

*x* ≤ 1;

Ответ: *x* ≤ 1.

Решить неравенство (*x* + 7)(*x* - 1)2(*x* - 4) < 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем метод интервалов, отмечаем точки -7, 1, 4. Методом пробной точки получаем следующие знаки выражения на выбранных интервалах:

http://easymath.com.ua/pic/formulas/rat_ineq/rat_ineq_sol8.gif

Отметим, что выражение будет отрицательным на интервале (-7; 4) за исключением точки 1, т.к. в этой точке выражение обращается в ноль, а неравенство - строгое.

Ответ: *x* ∈ (-7; 1) ∪ (1; 4).

Упростить выражение *a*5*a*-3*a*2 / *a*3*a*-4*a*-1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Пользуемся свойствами степеней.

В числителе получаем *a*5*a*-3*a*2 = *a*5-3+2 = *a*4.

В знаменателе - *a*3*a*-4*a*-1 = *a*3-4-1 = *a*-2.

В итоге *a*4 / *a*-2 = *a*6.

Ответ: *a*6

Упростить выражение *z* (*p* - 3) / (*p*2 + 3*p*) : *z* 12 / (9 - *p*2) · *z* 3 / (3*p* - *p*2) .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Пользуемся свойствами степеней и делаем преобразования:

*z* (*p* - 3) / (*p*2 + 3*p*) : *z* 12 / (9 - *p*2) · *z* 3 / (3*p* - *p*2) = *z* (*p* - 3) / *p* · (*p* + 3) - 12 / (3 - *p*) · (3 + *p*) + 3 / *p* · (3 - *p*) .

Далее упрощаем значение степени *z*. Сводим к общему знаменателю:

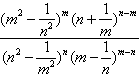
(*p* - 3) / [*p*(*p* + 3)] - 12 / [(3 - *p*)(3 + *p*)] + 3 / [*p*(3 - *p*)] =

[(*p* - 3)2 + 12p - 3(*p* + 3)] / [*p*(*p* + 3)(*p* - 3)] = [*p*2 - 6*p* + 9 + 12*p* - 3*p* - 9] / [*p*(*p* + 3)(*p* - 3)] =

[*p*2 + 3*p*] / [(*p*2 + 3*p*)(*p* - 3)] = 1/(*p* - 3)

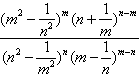
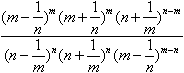
Потому исходное выражение будет иметь вид *z* 1 / (*p* - 3)

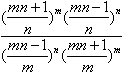
Ответ: *z* 1 / (*p* - 3)

Упростить выражение .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Пользуясь свойствами степеней и формулами сокращенного умножения делаем следующие преобразования:

= = =

= http://easymath.com.ua/pic/formulas/sq/sq_sol5.gif= http://easymath.com.ua/pic/formulas/sq/sq_sol6.gif.

Ответ: http://easymath.com.ua/pic/formulas/sq/sq_sol6.gif.

Упростить выражение √7 - 2√12.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Чтобы упростить данное выражение попробуем выделить под корнем полный квадрат:

√7 - 2√12 = √7 - 4√3 = √4 - 4√3 + 3 = √(2 - √3)2 = |2 - √3| = 2 - √3

Ответ: 2 - √3

Решить уравнение cos2*x* = 1/2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем метод решения простейших тригонометрических уравнений и получаем:

2*x* = ±arccos(1/2) + 2π*n* = ±π/3 + 2π*n* (здесь и далее, n ∈ *Z*).

Откуда *x* = ±π/6 + π*n*.

Ответ: *x* = ±π/6 + π*n*.

Решить уравнение sin(3 - 2*x*) = -1/2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем формулу из методов решений, имеем:

3 - 2*x* = (-1)*n*(arcsin(-1/2)) + π*n* = (-1)*n*(-π/6) + π*n* (здесь и далее *n* ∈ *Z*).

Делаем преобразование и получаем *x* = 3/2 + π/12(-1)*n* - π*n*/2.

Ответ: *x* = 3/2 + π/12(-1)*n* - π*n*/2.

Решить уравнение sin3*x* = π/3.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отметим, что π/3 > 1, а потому указанное уравнение решение не имеет.

Ответ: решений нет.

Найти решения уравнения sinπ(*x* - 3) = 0 на промежутке (-2; 6).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Пользуясь соответствующей формулой, находим:

π(*x* - 3) = π*n* (здесь и далее *n* ∈ *Z*).

*x* = *n* + 3.

Таким образом *x* ∈ *Z* и, из условия, *x* ∈ (-2; 6), поэтому *x* ∈ {-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}.

Ответ: *x* ∈ {-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}.

Решить уравнение cos(cos*x*) = 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем методом решения и получаем:

cos*x* = ±arccos1 + 2π*n* = 2π*n* (*n* ∈ *Z*).

Так как при целом *n* выражение |2π*n*| ≤ 1 лишь в том случае, когда *n* = 0, то это единственное значение *n*, при котором имеет смысл верхнее неравенство. Тогда

cos*x* = 0, откуда

*x* = ±π/2 + 2π*k*, *k* ∈ *Z*

Ответ: *x* = ±π/2 + 2π*k*.

Решить уравнение cos2*x* - 3sin*x* = 2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся формулой удвоенного угла косинуса (cos2*a* = 1 - 2sin2*a*) и получим:

1 - 2sin2*x* - 3sin*x* = 2.

Воспользуемся методом замены, обозначим sin*x* = *y*. Уравнение примет вид:

2*y*2 + 3*y* + 1 = 0.

Находим его корни: *y*1 = -1, *y*2 = -1/2.

Возвращаемся к исходной переменной и получаем совокупность sin*x* = -1 и sin*x* = -1/2.

Из первого получаем решение - *x* = -π/2 + 2π*n*, из второго - *x* = (-1)*m*(-π/6) + π*m* (*m*, *n* ∈ *Z*).

Ответ: *x* = -π/2 + 2π*n* или *x* = (-1)*m*(-π/6) + π*m*.

Решить уравнение 2tg*x* - 3ctg*x* = 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Так как ctg*x* = 1/tg*x* при *x* ≠ π*n*/2 (*n* ∈ *Z*) получаем уравнение

2tg*x* - 3/tg*x* = 1 или 2tg2*x* - tg*x* - 3 = 0.

Вводим новую переменную tg*x* = *y* и решаем квадратное уравнение 2*y*2 - *y* - 3 = 0 относительно *y*.

Оно имеет два решения *y*1 = 3/2, *y*2 = -1.

Возвращаемся к исходной переменной и решаем два уравнения:

tg*x* = 3/2, откуда *x* = arctg(3/2) + π*n*, *n* ∈ *Z*.

tg*x* = -1, откуда *x* = arctg(-1) + π*m* = -π/4 + π*m*, *m* ∈ *Z*.

Ответ: *x* = arctg(3/2) + π*n* или *x* = -π/4 + π*m*.

Решить уравнение 3cos*x* - sin2*x* = 1 - sin3*x*.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Сделаем следующее преобразование 3(cos*x* + sin*x*) = 1 + sin2*x*.

Замена cos*x* + sin*x* = *t* приведет к уравнению 3*t* = *t*2. Оно имеет корни *t*1 = 0, *t*2 = 3.

Берем первый корень, возвращаем замену и получаем cos*x* + sin*x* = 0, делим на cos*x* ≠ 0, откуда tg*x* = -1, *x* = -π/4 + π*n* (*n* ∈ *Z*).

Второй корень *t*2 дает уравнение cos*x* + sin*x* = 3. Это уравнение не имеет решений, т.к. и cos*x*, и cos*x* меньше равны 1, в сумме меньше равны 2.

Ответ: *x* = -π/4 + π*n*.

Решить уравнение sin3*x* cos8*x* = 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем формулу произведения синуса и косинуса:

(sin(3*x* + 8*x*) + sin(3*x* - 8*x*))/2 = 1;

sin11*x* - sin5*x* = 2.

Отметим, что |sin11*x*| ≤ 1 и |sin5*x*| ≤ 1, а потому левая часть может равняться 2 лишь в случае, когда sin11*x* = 1 и sin5*x* = -1.

Решая первое уравнение sin11*x* = 1 приходим к ответу *x* = π/22 + 2π*n*/11 (*n* ∈ *Z*).

Решая второе уравнение sin5*x* = -1 приходим к ответу *x* = -π/10 + 2π*m*/5 (*m* ∈ *Z*).

Найдем те случаи, когда оба условия выполняются, т.е.

π/22 + 2π*n*/11 = -π/10 + 2π*m*/5;

(4*n* + 1)π/22 = (4*m* - 1)π/10;

20*n* = 44*m* - 16;

5*n* = 11*m* - 4 (*n*, *m* ∈ *Z*).

Данное уравнение называется диофантовым и имеет следующие решения: *m* = 4 + 5*t*, *n* = 8 + 11*t* (*n*, *t*, *m* ∈ *Z*).

Откуда *x* = -π/10 + 2π*m*/5 = -π/10 + 2π(4 + 5*t*)/5 = 3π/2 + 2π*t* (*t* ∈ *Z*).

Ответ: *x* = 3π/2 + 2π*t*.

Решить уравнение ctg2*x* = cos22*x* - 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Сделаем преобразование cos22*x* - 1 = -sin22*x* и получим:

ctg2*x* = -sin22*x*.

Отметим, что ctg2*x* ≥ 0, а -sin22*x* ≤ 0. Равенство выполняется, когда ctg2*x* = 0 и sin22*x* = 0.

Первое уравнение ctg2*x* = 0 имеет решение *x* = π/2 + π*n* (*n* ∈ *Z*).

Второе уравнение sin22*x* = 0 имеет решение *x* = π*m*/2 (*m* ∈ *Z*).

Найдем общее решение:

π/2 + π*n* = π*m*/2;

*n* - 2*m* = 1.

*n* = 3 + 2*t*, *m* = 1 + *t* (*m*, *n*, *t* ∈ *Z*).

Откуда *x* = π*m*/2 = (1 + *t*)π/2 = 3π/2 + π*t* (*t* ∈ *Z*).

Ответ: *x* = 3π/2 + π*t*.

Решить уравнение sin3*x* cos5*x* = 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем формулу произведения синуса и косинуса:

(sin8*x* - sin2*x*)/2 = 1;

sin8*x* - sin2*x* = 2.

Уравнение будет иметь решения лишь тогда, когда sin8*x* = 1, а sin2*x* = -1.

Первое уравнение sin8*x* = 1 имеет решения *x* = π/16 + π*n*/4 (*n* ∈ *Z*) **(\*)**.

Второе уравнение sin2*x* = -1 имеет решения *x* = -π/4 + π*m* (*m* ∈ *Z*) **(\*\*)**.

Найдем решения, удовлетворяющие оба случая:

π/16 + π*n*/4 = -π/4 + π*m*;

16*m* - 4*n* = 5.

Левая часть уравнения делится на 4, правая - нет. Потому данное уравнение не имеет решения в целых числах. А значит и общих решений у **(\*)** и **(\*\*)** нет.

Ответ: Решений нет.

Найти log69, если известно, что log62 = *k*.

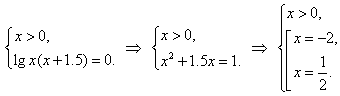
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Имеем, log69 = log632 = 2·log63 = 2·log66/2 = 2(log66 - log62) = 2(1 - *k*).

Ответ: 2(1 - *k*).

Решить уравнение lg(*x* + 1.5) = -lg*x*.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Имеем lg(*x* + 1.5) + lg*x* = 0. Если мы сделаем переход к уравнению lg*x*(*x* + 1.5) = 0, мы расширим область определения исходного уравнения. Однако следующая система равносильна исходному уравнению:  


Откуда и получаем ответ: *x* = ½.

Ответ: *x* = ½.

Решить уравнение log2(9 - 2*x*)/(3 - *x*) = 1.  
    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Сразу укажем, что *x* ≠ 3 и проделаем следующие превращения:

log2(9 - 2*x*) = 3 - *x*; Далее используем определение логаримфа:

9 - 2*x* = 23 - *x*;

2*x* + 8/2*x* - 9 = 0;

(2*x*)2 - 9·2*x* + 8 = 0; Решения этого квадратного уравнения следующие:

2*x* = 1 или 2*x* = 8. Т.е. *x* = 0 или *x* = 3. Но так как решение *x* = 3 не попадает в ОДЗ исходного уравнения (мы записали это в самом начале), то ответ единственный: *x* = 0.

Ответ: *x* = 0.

Решить уравнение log5(*x* - 2) + log√5(*x*3 - 2) + log0.2(*x* - 2) = 4.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Укажем, что *x* > 2 (ОДЗ). Далее, сводим все логаримфы к единому основанию 5:

log5(*x* - 2) + 2·log5(*x*3 - 2) - log5(*x* - 2) = 4.

2·log5(*x*3 - 2) = 4.

log5(*x*3 - 2) = log525.

*x*3 - 2 = 25.

*x*3 = 27.

*x* = 3. Ответ подходит под ОДЗ.

Ответ: *x* = 3.

Решить уравнение log0.524*x* + log2(*x*2/8) = 8.  
    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Укажем, что *x* > 0.

Так как log0.524*x* = log2-124*x* = log224*x* и используя свойства логаримфа пишем:

log224*x* + log2*x*2 - log28 = 8.

(log24 + log2*x*)2 + 2log2|*x*| - 11 = 0.

Так как *x* > 0, то мы получаем:

4 + 4log2*x* + log22*x* + 2log2*x* - 11 = 0.

Сделаем замену log2*x* = *a*, тогда

*a*2 + 6*a* - 7 = 0.

*a* = -7 или *a* = 1.

Возвращаемся к старой переменной:

log2*x* = -7 или log2*x* = 1.

Отсюда и решение: *x* = 2-7 или *x* = 2.

Ответ: *x* = 2-7 или *x* = 2.

Решить уравнение 3lg2(*x* - 1) - 10lg(*x* - 1) + 3 = 0.  
    \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Делаем замену переменной lg(*x* - 1) = *a*. Тогда

3*a*2 - 10*a* + 3 = 0.

*D* = 100 - 4·3·3 = 64.

*a*1 = (8 + 10) / 6 = 3.

*a*2 = (-8 + 10) / 6 = 1/3.

Возвращаемся к старой переменной:

lg(*x* - 1) = 3 или lg(*x* - 1) = 1/3.

Тогда *x* = 1001 или *x* = 3√10 + 1.

Ответ: *x* = 1001 или *x* = 3√10 + 1.

Сумма первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии равна 21. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 2, то полученные три члена составят геометрическую прогрессию. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Обозначим через *a*i - члены арифметической прогрессии c разностью *d*, через *b*i - геометрической, с знаменателем *q*.

Согласно формуле суммы арифметической прогрессии имеем *S*3 = (2*a*1 + 2*d*) · 3 / 2 = 21 или *a*1 + *d* = 7.

По условию *a*1 - 1, *a*1 + *d* - 1, *a*1 + 2*d* + 2 - три последовательных члена геометрической прогрессии. Используем свойство геометрической прогрессии:

(*a*1 + *d* - 1)2 = (*a*1 + 2*d* + 2)(*a*1 - 1).

После замены переменной *a*1 = 7 - *d* и открытия скобок получаем квадратное уравнение

*d*2 + 3*d* - 18 = 0, т.е. *d*1 = 3, *d*2 = -6.

Условию удовлетворяет лишь *d*1 = 3 (т.к. арифметическая прогрессия возрастающая). В этом случае *a*1 = 4. Находим *b*1 = *a*1 - 1 = 3. *b*2 = *a*1 + *d* - 1 = 6, откуда *q* = 2.

Наконец, согласно формуле суммы членов геометрической прогрессии получаем:

*S*8 = [*b*1(*q*8 - 1)] / (*q* - 1) = 765.

Ответ: *S*8 = 765.

Сумма трех чисел, которые составляют арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найти эти числа.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используя тот факт, что числа составляют арифметическую прогрессию, запишем их как *a*, *a* + *d*, *a* + 2*d*.

Согласно условию их сумма равна 2, т.е. 3*a* + 3*d* = 2, *a* = 2/3 - *d*.

Согласно второму условию *a*2 + (*a* + *d*)2 + (*a* + 2*d*)2 = 14/9.

После раскрытия скобок получаем 27*a*2 + 45*d*2 + 54*ad* = 14.

Делаем замену переменной *a* = 2/3 - *d*, раскрываем скобки и получаем:

*d*2 = 1/9.

*d* = ±1/3.

Теперь легко найти числа, составляющие арифметическую прогрессию. При любом из значений *d* = ±1/3 числа будут равны 1/3, 2/3, 1.

Ответ: 1/3, 2/3, 1.

Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, в которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используя тот факт, что числа составляют геометрическую прогрессию, запишем их как *b*, *bq*, *bq*2, *bq*3.

По условию:

1) *bq*2 = *b* + 9.

2) *bq* = *bq*3 + 18.

Домножаем первое уравнение на *q* и складываем со вторым:

9*q* + 18 = 0.

Откуда *q* = -2. Из первого уравнения находим *b*. *b* = 3.

Теперь легко найдем все числа: 3, -6, 12, -24.

Ответ: 3, -6, 12, -24.

Найти сумму всех трехзначных чисел, которые делятся на 7.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Сначала найдем минимальное и максимальное трехзначные числа, которые делятся на 7. Это числа 105 и 994 соотвественно. Запишем *a*1 = 105, *a*m = 994.

Найдем *m*, т.е. количество трехзначных чисел, которые делятся на 7. Используем свойство прогрессии и получаем:

994 = 105 + 7(*m* - 1).

Откуда *m* = 128.

А теперь воспользуемся формулой суммы *m* членов арифметической прогрессии *S*128 = (105 + 994) · 128 / 2 = 70336.

Ответ: 70336.

Известно, что *L*, *M*, *N* - соотвественно *l*-й, *m*-й, *n*-й члены геометрической прогрессии. Доказать, что *L**m*-*nM**n*-*lN**l*-*m* = 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Выразим *L*, *M*, *N* через первый член геометрической прогрессии *A* и знаменатель *q*:

*L* = *Aql* - 1.

*M* = *Aqm* - 1.

*N* = *Aqn* - 1.

Тогда *L**m*-*nM**n*-*lN**l*-*m* =

= *Amq*(*l* - 1) *m* / *Anq*(*l* - 1) *n* · *Anq*(*m* - 1) *n* / *Alq*(*m* - 1) *l* · *Alq*(*n* - 1) *l* / *Amq*(*n* - 1) *m* =

*qlm* / *qln* · *qmn* / *qml* · *qnl* / *qnm* = 1.

Что и требовалось доказать.

Три числа, третье из которых равно 12, составляют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то эти три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Согласно условию, запишем первые два числа как *a* и *aq*. Т.к. эти два числа и 12 составляют геометрическую прогрессию, то *a*2*q*2 = 12*a*.

Откуда *a* = 12 / *q*2.

Т.к. числа *a*, *aq*, 9 составляют арифметическую прогрессию, то 2*aq* = *a* + 9.

Или *a*(2*q* - 1) = 9.

Подставляем *a* из предыдущего суждения и получаем:

12(2*q* - 1) = 9*q*2.

3*q*2 - 8*q* + 4 = 0.

Решения данного квадратного уравнения *q*1 = 2, *q*2 = 2/3.

Зная знаменатель находим тройки чисел. При *q* = 2 это числа 3, 6, 12. При *q* = 2/3 это числа 27, 18, 12.

Ответ: 3, 6, 12 и 27, 18, 12.

Сумма третьего и девятого члена члена арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов этой прогрессии.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Согласно свойствам арифметической прогрессии *a*3 + *a*9 = *a*1 + *a*11 = 8.

По формуле суммы *S*11 = (*a*1 + *a*11) · 11 / 2 = (*a*3 + *a*9) · 11 / 2 = 44.

Ответ: *S*11 = 44.

Известно, что некоторая арифметическая прогрессия содержит члены *a*2*n* и *a*2*m* такие, что имеет место следующее соотношение *a*2*n* /*a*2*m* = -1. Существует ли член этой прогрессии, который равен нулю? Есть существует, какой номер этого члена?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Исходя из условия получаем:

*a*2*n* + *a*2*m* = 0;

Используя формулу, выражающий некий член прогрессии через первый член и разность, получаем:

*a*1 + (2*n* - 1)*d* + *a*1 + (2*m* - 1)*d* = 0;

2*a*1 + 2*nd* + 2*md* - 2*d* = 0;

*a*1 + (*n* + *m* - 1)*d* = 0.

А это и означает, что существует член арифметической прогрессии с первым элементом *a*1 и разностью *d*, который равен нулю. Т.е., используя ту же формулу, имеем *an* + *m* = 0.

Ответ: Существует, его номер *n* + *m*.

Разность арифметической прогрессии не равна нулю. Числа, которые равны произведению первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найти его знаменатель.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Обозначим через *a*, *b*, *c* члены арифметической прогрессии. Исходя из свойств арифметической прогрессии 2*b* = *a* + *c* **(\*)**.

По условию *ab*, *bc*, *ac* образуют геометрическую прогрессию. Найдем ее знаменатель *q*. Он равен отношению второго члена геометрической прогрессии на первой или третьего на второй. Запишем:

*q* = *bc*/*ab* = *ac*/*bc*.

Или *q* = *c*/*a* = *a*/*b*.

Из свойств геометрической прогрессии также получаем, что *b*2*c*2 = *ac*·*ab*, т.е. *bc* = *a*2. Или *b* = *a*2/*c*.

Подставляем это значение *b* в полученное ранее равенство **(\*)**:

2*a*2/ *c* = *a* + *с*;

2*a*/ *c* = 1 + *c*/ *a*;

Делаем замену *q* = *c*/*a* (которое нам и нужно найти, т.к. это отношение и является искомым знаменателем) и после преобразования получаем квадратное уравнение *q*2 + *q* - 2 = 0.

У него два решения *q* = 1 или *q* = -2. Но заметим, если *q* = 1, то *c*/ *a* = *a*/ *b* = 1, т.е. *a* = *b* = *c*, что не удовлетворяет условию, т.к. в данном случае разность арифметической прогрессии равна 0. Потому ответ один *q* = -2.

Ответ: -2.

Решить уравнение *Cx* + 1*x* - 2 + 2*Cx* - 13 = 7(*x* - 1).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся формулами, получим:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (*x* + 1)!  (*x* - 2)!·3! | + | 2(*x* - 1)!  (*x* - 4)!·3! | = 7(*x* - 1); |

Проводим сокращение, умножаем обе части на 3!, получим

(*x* + 1)*x*(*x* - 1) + 2(*x* - 1)(*x* - 2)(*x* - 3) = 3!·7(*x* - 1)

(*x* + 1)*x* + 2(*x* - 2)(*x* - 3) = 42

*x*2 + *x* + 2*x*2 - 10*x* + 12 = 42

*x*2 - 3*x* - 10 = 0

Решаем квадратное уравнение, получаем два решения: *x* = -2, *x* = 5. Но так как *x* согласно условию задачи может быть лишь положительным, то получаем *x* = 5.

Ответ: *x* = 5.

Решить уравнение *Ax*3 - 2*Cx*4 = 3*Ax*2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Применяем формулы, получим:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*!  (*x* - 3)! | - 2 | *x*!  (*x* - 4)!·4! | = 3 | *x*!  (*x* - 2)! |

Проводим сокращение дробей и умножаем обе части уравнения на 12:

12*x*(*x* - 1)(*x* - 2) - *x*(*x* - 1)(*x* - 2)(*x* - 3) = 36*x*(*x* - 1)

12(*x* - 2) - (*x* - 2)(*x* - 3) = 36

12*x* - 24 - *x*2 + 5*x* - 6 - 36 = 0

*x*2 - 17*x* + 66 = 0

Решаем квадратное уравнение и находим два решения: *x*1 = 11, *x*2 = 6.

Ответ: *x* = 11 или *x* = 6.

Решить уравнение *Axx* - 3 = *xPx* - 2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Применяем формулы, получим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x*!  3! | = *x*(*x* - 2)! |

*x*(*x* - 1)(*x* - 2)! = 6*x*(*x* - 2)!

*x* - 1 = 6

*x* = 7

Ответ: *x* = 7.

Доказать тождество *Pn* = (*n* - 1)(*Pn* - 1 + *Pn* - 2).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Применяем формулы, получаем:

*n*! = (*n* - 1)((*n* - 1)! + (*n* - 2)!)

Сокращаем на *n* - 1:

*n*(*n* - 2)! = ((*n* - 1)((*n* - 2)! + (*n* - 2)!)

*n*(*n* - 2)! = (*n* - 2)!(*n* - 1 + 1)

*n*(*n* - 2)! = *n*(*n* - 2)!

0 = 0.

Что и требовалось доказать.

Доказать тождество *An* - 1*m* = *Anm* - *mAn* - 1*m* - 1.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Используем формулы, получаем:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (*n* - 1)!  (*n* - *m* - 1)! | = | *n*!  (*n* - *m*)! | - *m* | (*n* - 1)!  (*n* - *m*)! |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (*n* - 1)!  (*n* - *m* - 1)! | = | *n*! - *m*(*n* - 1)!  (*n* - *m*)! |

Умножаем обе части на (*n* - *m*)!

(*n* - *m*)(*n* - 1)! = *n*(*n* - 1)! - *m*(*n* - 1)!

(*n* - *m*)(*n* - 1)! = (*n* - *m*)(*n* - 1)!

0 = 0.

Что и требовалось доказать.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Определить *An*2, если пятое слагаемое разложения (3√*x* + | 1  *x* | )*n* не зависит от *x*. |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для начала найдем *n*. Пятое слагаемое указанного в условии разложения будет равно *Сn*4(3√*x*)(*n* - 4) · (1/*x*)4.

Сказано, что данный член разложения не зависит от *x*. То есть степень *x* должна равняться 0. Найдем степень *x* в данном члене разложения:

(3√*x*)(*n* - 4) · (1/*x*)4 = *x*(*n* - 4)/3*x*- 4 = *x*(*n* - 16)/3.

Значит (*n* - 16) / 3 = 0. Откуда *n* = 16.

Найдя *n* мы можем легко подсчитать *An*2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *A*162 = | 16!  14! | = 16·15 = 240. |

Ответ: *An*2 = 240.

Третье слагаемое разложения (2*x* + 1/*x*2)*m* не содержит *x*. При каких значениях *x* это слагаемое равно второму слагаемому разложения (1 + *x*3)30?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для начала запишем третье слагаемое первого разложения и найдем *m*, исходя из того, что степень *x* должна равняться нулю.

Третий член равен *Cm*2(2*x*)*m* - 2 · (1/*x*2)2.

Далее работаем лишь с *x* и его степенью:

*xm* - 2 · (1/*x*4) = *xm* - 6. Степень *x* равна нулю, а потому *m* = 6.

Тогда третье слагаемое первого разложения равняется *C*62(2*x*)4 · (1/*x*2)2.

Запишем второй слагаемое второго разложения. Он будет равен *C*301·*x*3.

Теперь приравняем их и найдем *x*:

*C*301·*x*3 = *C*62(2*x*)4 · (1/*x*2)2

30*x*3 = 15·24*x*4 · (1/*x*4)

*x*3 = 8

*x* = 2.

Ответ: *x* = 2.

Исследовать на монотонность последовательность (*an*) = 5*n*2 - 2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Для решения сравним между собой два подряд идущих элемента последовательности *ak* и *ak*+1. Ввиду того, что мы не знаем как соотносятся эти два числа, будем вместо знака сравнения использовать (?):

5*k*2 - 2 (?) 5(*k* + 1)2 - 2;

5*k*2 - 2 (?) 5(*k*2 + 2*k* + 1) - 2;

5*k*2 - 2 (?) 5*k*2 + 10*k* +3;

0 (?) 10*k* + 5;

Ввиду того, что *k* ≥ 1, то указанное выше выражение больше 0 для любых *k*. Значит *ak*+1 > *ak* для любых *k*, потому последовательность возрастает, а, значит, является монотонной.

Ответ: Последовательность возрастает, потому является монотонной.

Исследовать на монотонность последовательность (*an*) = *n*2 + 3*n* + 2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отметим, что *n*2 + 3*n* + 2 = (*n* + 1)(*n* + 2). Сравним между собой элементы *ak*, *ak*+1 данной последовательности:

(*k* + 1)(*k* + 2) (?) (*k* + 2)(*k* + 3);

0 (?) (*k* + 2)(*k* + 3) - (*k* + 1)(*k* + 2);

0 (?) 2(*k* + 2);

0 (?) *k* + 2.

Видим, что *ak*+1 ≥ *ak* при *k* ≥ -2 (а значит и при натуральных значениях) - последовательность возрастающая, потому и монотонна.

Ответ: Последовательность возрастает, потому является монотонной.

Исследовать на монотонность последовательность (*an*) = *n*2 - 11*n* + 30.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отметим, что *n*2 - 11*n* + 30 = (*n* - 5)(*n* - 6). Теперь сравним подряд идущие элементы последовательности *ak* и *ak*+1:

(*k* - 5)(*k* - 6) (?) (*k* - 4)(*k* - 5);

0 (?) (*k* - 4)(*k* - 5) - (*k* - 5)(*k* - 6);

0 (?) 2(*k* - 5);

5 (?) *k*.

*ak*+1 ≥ *ak* при *k* ≥ 5, но *ak*+1 < *ak* при *k* < 5. Потому последовательность не является монотонной.

Ответ: Последовательность не монотонна

Доказать, что http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol1.gif.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся методом математической индукции.

1. База индукции.

При *k* = 1, http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol2.gif= 2cosπ/4. Утверждение верно.

2. Переход индукции.

Допустим при неком *k* = *n* (n ∈ *N*) выражение

http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol1.gif

истинно. Докажем, что оно верно и при *k* = *n* + 1, т.е.

http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol2_1.gif

Но так как (исходя из истинности перехода индукции)

http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol5.gif

то нам нужно доказать следующее утверждение:

http://easymath.com.ua/pic/formulas/contest/contest_sol4.gif= 2cosπ/2n+2.

Делаем преобразования:

2 + 2cosπ/2n+1 = 4cos2 π/2n+2.

Для доказательства этого равенства воспользуемся формулой понижения степени косинуса 2cos2*x* = cos2*x* + 1. Тогда

4cos2 π/2n+2 = 2(cosπ/2n+1 + 1) = 2cosπ/2n+1 + 2. Что и требовалось доказать.

Переход доказан, а потому исходное утверждение верно при любом *n* ∈ *N*.

Найти все положительные корни уравнения *nx*n+1 - (*n*+1)*x*n + 1 = 0.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Запишем уравнение в следующем виде:

*nx*n+1 - (*n*+1)*x*n + 1 = *nx*n(*x* - 1) - (*x*n - 1) = (*x* - 1)(*nx*n - *x*n-1 - *x*n-2 - ... - 1) = 0.

Очевидно, что *x* = 1 - корень уравнения. Докажем, что других положительных корней нет.

Действительно, если *x* > 1, то *x*n > *x*i, где *i* < *n*, а потому

*nx*n - *x*n-1 - *x*n-2 - ... - 1 > *nx*n - *nx*n-1 > 0.

Если же 0 < *x* < 1, то *x*n < *x*i, где *i* < *n*, а потому

*nx*n - *x*n-1 - *x*n-2 - ... - 1 < *nx*n - *nx*n-1 < 0.

Что и требовалось доказать.

Ответ: *x* = 1.

Целые числа *x*, *y*, *z* удовлетворяют уравнению *x*3 + *y*3 = *z*3. Доказать, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Докажем от обратного. Допустим все три числа *x*, *y*, *z* не делятся на 3. Тогда их можно представить в виде *x* = 3*a* ± 1, *y* = 3*b* ± 1, *z* = 3*c* ± 1. Наше уравнение будет иметь вид:

(3*a* ± 1)3 + (3*b* ± 1)3 = (3*c* ± 1)3;

27*a*3 ± 27*a*2 + 9*a* ± 1 + 27*b*3 ± 27*b*2 + 9*b* ± 1 = 27*c*3 ± 27*c*2 + 9*c* ± 1;

9(3*a*3 ± 3*a*2 + *a* + 3*b*3 ± 3*b*2 + *b* - 3*c*3 -+3*a*2 - c) = -+1 ± 1 -+1.

Левая часть равенства делится на 9. Правая часть не делится при любов из вариантов знака ±. Мы пришли к противоречию. А значит одно из чисел делится на 3.

Что и требовалось доказать.

Вычислить сумму 1/1·2 + 1/2·3 + ... + 1/*n*·(*n* + 1),  где *n* ∈ *N*.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся следующим равенством:

1/*k* - 1/(*k* + 1) = 1/*k*·(*k* + 1).

Тогда нашу сумму можно переписать в следующем виде:

1/1·2 + 1/2·3 + ... + 1/*n*·(*n* + 1) = 1/1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + ... + 1/*n* - 1/(*n* + 1) = 1 - 1/(*n* + 1).

Ответ: 1 - 1/(*n* + 1).

Доказать, что уравнение *x*3 - *px* + 1 = 0 не имеет рациональных корней при *p* ∈ *Z*, *p* > 2.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Докажем сначала, что даное уравнение не имеет целых корней.

Докажем от обратного.

Пусть существует некое *x*1 ∈ *Z*, так что *x*13 - *px*1 + 1 = 0, при *p* ∈ *Z*, *p* > 2.

Тогда *x*1(*x*12 - *p*) = -1.

Единственные решения в целых числах следующие:

*x*1 = 1, (*x*12 - *p*) = -1; Но тогда 1 - *p* = -1, откуда *p* = 2, что противоречит условию.

*x*1 = -1, (*x*12 - *p*) = 1; Тогда 1 - *p* = 1, *p* = 0, что опять же противоречит условию.

Значит целых решений нет. Покажем, что и дробных рациональных решений не существует при данном условии.

Снова докажем от обратного. Пусть существует некое *x*1 ∈ *Q* \ *Z*, такое что *x*13 - *px*1 + 1 = 0, при *p* ∈ *Z*, *p* > 2.

В таком случае, по определению *x*1 можно представить в виде несократимой дроби *m*/*n*, *m* ∈ *N*, *n* ∈ *Z*. Отметим также, что если дробь *m*/*n* - несократима, то и дробь *m*3/*n*2 - несократима. Тогда уравнение будет иметь следующий вид:

(*m*/*n*)3 - *p*(*m*/*n*) + 1 = 0.

*m*3/*n*2 = *pm* - *n*.

Но справа у нас целое число, а значит и слева число целое. А это противоречит нашему предположению, что дробь *m*3/*n*2 - несократима.

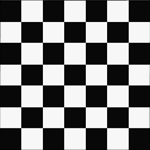
Значит уравнение не имеет рациональных решений.

Что и требовалось доказать.

В каждой клетке доски 7x7 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонатале или вертикале) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Воспользуемся методом раскрасок. Покрасим доску в два цвета с помощью шахматной расцветки:



Переползая на соседнюю клетку, жук становится на клетку другого цвета. Но у нас 24 белых и 25 черных клеток. А, значит, как минимум одна черная клетка будет пустой.

Ответ: Да, обязательно будет одна пустая клетка.