***Ссылки сайтов для работы с одаренными детьми***

<http://mon.gov.ru/> - документы

<http://www.educaltai.ru/> - ГИА , аттестация

<http://www:akipkro.ru/> - сайт Акипкро

<http://math-congress-2010.msu.ru/>

<http://fipi.ru/-ЕГЭ>, ГИА

<http://standart.edu.ru/> - стандарты 5-9 кл., прим. программы.

<http://mnemozina.ru/> - решение текстовых задач

<http://www.ars.-edu.ru/> - курсы, олимпиады.

<http://ziimag.narod.ru/> - Зубарева, Мордкович.

<http://geometry2006.narod.ru/> - по Смирновой все метод. материалы с 7 по 11 класс.

<http://cdoosh.ru/> - олимпиады Эйлера

<http://talant.perm.ru/> - олимпиады

<http://www.mccme.ru/> - одаренные дети

<http://karusel.desc.ru/> -карусель

<http://alexlarin.narod.ru/> - ЕГЭ, олимпиады

<http://s42.asu.ru>,

**Требования к проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2012/2013 учебном году**

В требования обязательно включение следующих позиций:

1. Классы, для которых проводится школьный этап Олимпиады (для учащихся 5-11 классов).

2. Сроки проведения (с 1октября).

3. Продолжительность олимпиады (рекомендуемое время проведения олимпиады: для 5-6 классов – 1,5 астрономических часа, для 7-8 классов – 2 астрономических часа, для 9-11 классов 2,5 астрономических часа).

4. Порядок формирования жюри Олимпиады (из ведущих учителей школы, возможно приглашение представителей других школ, методистов муниципальных органов управления образования).

**Требования к проверке работ:**

А) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

Б) объективность и непринятие к учету школьных оценок по математике (возможны случаи, когда потенциально, с точки зрения математических способностей, более способный учащийся хуже успевает на уроках математики).

**Требования к порядку проведения Олимпиады:**

А) задания каждой возрастной параллели составляются в одном варианте, поэтому участники должны сидеть по одному за столом (партой);

Б) участники выполняют задания на стандартных двойных листах в клетку, либо в ученических тетрадях в клетку;

В) во время туров участникам запрещается пользоваться справочной литературой, электронными вычислительными средствами или средствами связи;

Г) задания Олимпиады записываются перед ее началом на доску, либо тиражируются в количестве, соответствующем количеству участников Олимпиады.

**5 класс**

1. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

2. Перед вами замок "с секретом" (см. рисунок).



Если вы поставите стрелки на нужные буквы, то получите ключевое слово и замок откроется. Какое это слово?

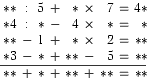
3 .В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья — четвёрки, половина — тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?

4. Когда отцу было 27 лет, сыну было только три года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

**6 класс**

1. Для нумерации страниц учебника потребовалось 2007 цифры. Сколько страниц в этом учебнике?

2. Морская вода содержит 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы соли в ней было 2%?

3.В ребусе, изображённом на рисунке, действия в каждой строке производятся подряд слева направо, хотя скобки не расставлены. Каждое число последней строки равняется сумме чисел столбца, под которым оно расположено. Результат каждой строки равен сумме чисел столбца с тем же номером. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулём, однако на нуль числа могут оканчиваться. Расшифруйте ребус. 

4. Буратино и Пьеро бежали наперегонки. Пьеро весь путь бежал с одной и той же скоростью, а Буратино первую половину пути бежал вдвое быстрее, чем Пьеро, а вторую половину — вдвое медленней, чем Пьеро. Кто победил?

5.На вопрос о возрасте его детей математик ответил: "У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок — 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей — 14 лет". Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

**7 класс**

1.На Солнечном острове живет 20 белых и 25 черных хамелеонов (хамелеоны — это животные, умеющие менять свой цвет). При встрече оба хамелеона меняют свой цвет на противоположный. Могут ли все хамелеоны окраситься в один цвет?

2.На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как 8 белых облетели, а 2 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?

3. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел не делилась на 3.

4. Расшифровать пример на вычитание

КРЫСЫ –СЫРЫ =СЫТЫ

Одним и тем же буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

5. За весну Обломов похудел на 25%, за тем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился Обломов за год?

**8 класс**

1.Постройте график функции y = 3x + |5x − 10|.

2. В хороводе по кругу стоят 30 детей. Правый сосед каждой девочки – мальчик. У половины мальчиков правый сосед тоже мальчик, а у всех остальных мальчиков справа стоит девочка. Сколько мальчиков и девочек в хороводе?

3. На сторонах AB, BC, CA треугольника АВС взяты соответственно точкиС1, А1, В1. Оказалось, что угол С1В1А1 равен углу А1В1С, угол В1А1С1 равен углу С1А1В, угол А1С1В1 равен углу В1С1А, В1А1 = А1С, А1С1 = С1В, С1В1 = В1А. Найдите углы треугольника АВС.

4. На классной доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Петя и Вася по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется одно число. Если оставшееся число составное - выиграл Петя. Может ли Вася помешать Пете выиграть? 5. На острове О живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев - А и Б. Туземец А произнес фразу: «По крайней мере, один из нас (А и Б ) - лжец». Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?

**9 класс**

1.Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

2. В выражении 1:2:3:4:5:6:7:8:9 расставить скобки так, чтобы результат был: а) минимальным; б) максимальным.

3. Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель - на 10. Может ли увеличиться при этом дробь?

4.(Старинная задача). За 25 бубликов заплатили столько рублей, сколько бубликов можно купить на рубль. Сколько стоит один бублик?

5. Вершину А прямоугольника АВСD соединили отрезками с серединами сторон ВС и СD. Мог ли один из этих отрезков оказаться вдовое длиннее другого?

**10 класс**

1.Жук ползет по ребрам куба. Сможет ли он последовательно ребра, проходя по каждому ребру ровно один раз?

2.Решить уравнение в целых числах:

(x – y)3 + (y – z)3 + (z – x)3 = 30.

3.Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 10. Может ли увеличиться при этом дробь?

4.Подряд написаны числа 1,2,3,4,5,...,2000. Первое, третье, пятое и т.д. по порядку вычеркивают. Из оставшихся 1000 чисел снова вычеркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?

5.Существует ли выпуклый 2000-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

**11 класс**

1. Найдите три последние цифры суммы

1! + 2! + 3! + ... + 1998!

2. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение

х2 - 7nх + 150 = 0

имеет два целых корня.

3. Точки A2 , B2 и C2 – середины высот AA1 , BB1 и CC1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов B2A1C2 , C2B1A2 и A2C1B2 .

4.Квадратный трехчлен *ах2+вх+с* имеет корни. Верно ли, что трехчлен *а3х2+в3х+с3* также имеет корни?

5.Решите уравнение



**Критерии оценивания**

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| 7 | Полное верное решение |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. | |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако решение содержит влияющие существенные ошибки либо пропущены случаи, не на логику рассуждений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев + пример), или в задаче типа «оценка верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. | |
| 0-1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

**Решения:**

**5 класс**

1. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

Решение:

Можно поступить, например, так: поставим на одну чашку весов гирю весом 1 кг и уравновесим весы крупой из мешка. Теперь снимем с весов эту гирю и вместо неё насыпем крупу. Когда этой крупы станет ровно 1 кг, весы окажутся в равновесии.

Ответ:

Нужно уравновесить чашку, на которой стоит килограммовая гиря, затем заменить эту гирю крупой

2. Перед вами замок "с секретом" (см. рисунок).



Если вы поставите стрелки на нужные буквы, то получите ключевое слово и замок откроется. Какое это слово?

Решение:

В первом кружке стрелку надо, безусловно, поставить на букву Б — ибо на остальные буквы (Ъ и Ь) ни одно слово не начинается.

Во втором кружке стрелку надо поставить на букву А, так как из всех букв всех кружков это единственная гласная, а слов без гласных в русском языке не бывает.

Таким образом, найдены первые две буквы слова — БА. Для подбора двух последних букв существует 9 возможностей: каждой из трех букв на 3е место соответствуют три возможные буквы на 4е место. Перебрав все эти возможности, получим единственное осмысленное слово — БАНК.

3 .В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья — четвёрки, половина — тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?

Решение:

Поскольку число школьников, получивших ту или иную оценку, всегда целое, то для решения задачи нам надо найти целое число, меньшее 50, одновременно делящееся на 7, 3, 2. Единственным возможным ответом является число 42. Это значит, что всего в классе 42 ученика; 6 из них получили пятёрки; 14 — четвёрки; 21 — тройки. Следовательно, двойку получил 1 ученик.

Ответ: 1 работа.

4. Когда отцу было 27 лет, сыну было только три года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

Решение:

Из условия следует, что отец старше сына на 24 года. Если сейчас сыну x лет, то отцу — 24 + x. Можно составить уравнение 3x = 24 + x. Решив его, получим x = 12. Значит, сыну сейчас 12 лет, а отцу — 36.

Ответ:Сыну 12 лет, отцу 36 лет.

**6 класс**

Решение:

1. Для нумерации первых девяти страниц потребуется 9 цифр. Еще 90 страниц прономеруются номерами от 10 до 99, для этого потребуется

90 · 2 = 180 цифр.

Оставшиеся 2007 – 189 = 1818 страниц будут нумероваться трехзначными номерами и будет еще 1818 : 3 = 606 страниц. Всего, таким образом, в учебнике 606 + 189 = 795 страниц.

Ответ. 795 страниц.

2. В 40 кг морской воды содержится 40 : 100 · 5 = 2 кг соли. Эти 2 кг соли должны составить 2 % разбавленной воды. Значит, разбавленной воды должно получиться 2 : 2 · 100 = 100 кг. Следовательно, нужно добавить

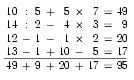
100 – 40 = 60 кг пресной воды.

Ответ. 60 кг.

3. В ребусе, изображённом на рисунке, действия в каждой строке производятся подряд слева направо, хотя скобки не расставлены. Каждое число последней строки равняется сумме чисел столбца, под которым оно расположено. Результат каждой строки равен сумме чисел столбца с тем же номером. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулём, однако на нуль числа могут оканчиваться. Расшифруйте ребус.

Решение:

Для удобства дальнейших рассуждений заменим все звёздочки различными буквами, имея при этом в виду, что разным буквам может соответствовать одна и та же цифра. Буквы З, Э и О не будем при этом употреблять, чтобы не путать их с тройкой и нулём. Наш ребус примет следующий вид, значения некоторых букв можно сразу определить.

Ц= 4 (результаты в строках и столбцах с одинаковыми номерами равны между собой). А=Д=К=Р= 1 (четыре двузначных числа в первом столбце в сумме дают 4Ч, это возможно только, если все эти четыре числа начинаются с 1). Б=0 или 5 (1Б делится на 5), но 5 оно равно быть не может, поскольку в этом случае сумма чисел первого столбца будет больше 50, следовательно, Б=0. Г= 2 или 9 (4Г — результат умножения на 7), но результат первого столбца явно больше 42, значит, Г= 9. Отсюда Ч= 9, Л= 2, В= 5. Перепишем ребус, заменив цифрами расшифрованные значения букв

4. Буратино и Пьеро бежали наперегонки. Пьеро весь путь бежал с одной и той же скоростью, а Буратино первую половину пути бежал вдвое быстрее, чем Пьеро, а вторую половину — вдвое медленней, чем Пьеро. Кто победил?

Решение:

На вторую половину пути Буратино потратил ровно столько времени, сколько Пьеро на весь путь. А ведь сколько то времени у Буратино ушло и на первую половину пути. Так что победил Пьеро.

Ответ: Пьеро

5.На вопрос о возрасте его детей математик ответил: "У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок — 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей — 14 лет". Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

Решение:

Из условия задачи следует, что третьему ребенку 1 год. Пусть год назад первому и второму ребенку было x и y лет соответственно. В это же время суммарный возраст родителей был равен 45 + 2x. По условию, суммарный возраст семьи в это время равняется 70 годам, следовательно, 70 - 45 = 3x + y. Сейчас суммарный возраст детей — 14 лет, поэтому (x + 1) + (y + 1) + 1 = 14. Решая систему уравнений, получим x = 7, y = 4. Следовательно, первому ребенку сейчас 8 лет, второму — 5 лет.

Ответ:8 лет, 5 лет, 1 год.

**7 класс**

1.На Солнечном острове живет 20 белых и 25 черных хамелеонов (хамелеоны — это животные, умеющие менять свой цвет). При встрече оба хамелеона меняют свой цвет на противоположный. Могут ли все хамелеоны окраситься в один цвет?

Решение:

Да, могут. Например, если десять раз встретятся по парам белые хамелеоны и перекрасятся в черный цвет, тогда будет 45 черных хамелеонов.

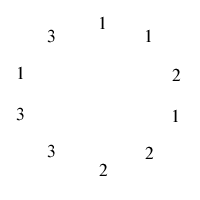
2.На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как 8 белых облетели, а 2 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?

Решение:

Когда 8 белых одуванчиков облетели, на лужайке осталось 27 одуванчиков — 18 жёлтых и 9 белых. Значит, вначале на лужайке росли 18 + 2 = 20 жёлтых и 9 + 8 - 2 = 15 белых одуванчиков.

3. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел не делилась на 3.

Решение:

. 

4. Расшифровать пример на вычитание

КРЫСЫ –СЫРЫ =СЫТЫ

Одним и тем же буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Решение:

Легко видеть, что Ы = О, К = 1, С ≥ 5.

Проведем перебор.

Если С=5, то СЫРЫ < 5100, СЫТЫ < 5100, откуда КРЫСЫ < 10200 и Р =О, что невозможно (так как Р не может совпадать с Ы).

Если С=6, то Р=2, Т=4 и имеем равенство 12060-6020=6040.

Если с=7, то Р=4, Т=3 и получаем 14070-7040=7030.

Если С=8, то Р=6, Т=2 и тогда 16080 - 8060=8020.

Если С=9, то Р=8, Т=1, что невозможно (так как Т не может совпадать с К).

Ответ: 12060-6020+6040,14070-7040=7030,16080-8060=8020.

5. За весну Обломов похудел на 25%, за тем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился Обломов за год? Решение:

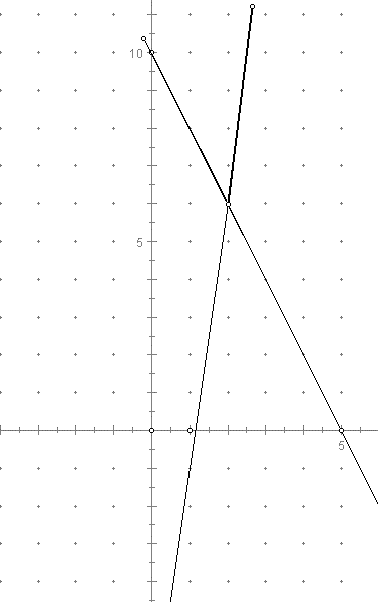
Пусть *х* кг – первоначальный вес Обломова. К концу весны он стал 0,75х кг, к концу лета - (0,75х⋅1,2) кг, к концу осени - (0,9⋅1,2⋅0,75х) кг, а в конце года (1,2⋅0,9⋅1,2⋅0,75х) = 0,972х кг. Ответ. Похудел.

**8 класс**

1.Постройте график функции y = 3x + |5x − 10|.

Решение:

Находим корень уравнения 5x−10 = 0 — это x = 2. Используя определение абсолютной величины, имеем



1) При x < 2, получим y = 3x − 5x + 10; y = −2x + 10.

2) При x ≥ 2, получим y = 3x + 5x − 10; y = 8x − 10.

2. В хороводе по кругу стоят 30 детей. Правый сосед каждой девочки – мальчик. У половины мальчиков правый сосед тоже мальчик, а у всех остальных мальчиков справа стоит девочка. Сколько мальчиков и девочек в хороводе?

Решение:

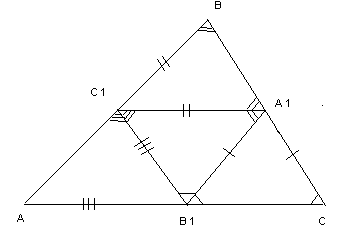
Пусть в хороводе х мальчиков имеют соседа справа мальчика, тогда х мальчиков имеют соседа справа – девочку. Значит, в хороводе х девочек. А всего х+х+х=30, т.е. х = 10. Значит, в хороводе 10 девочек и 20 мальчиков.

3. На сторонах AB, BC, CA треугольника АВС взяты соответственно точкиС1, А1, В1. Оказалось, что угол С1В1А1 равен углу А1В1С, угол В1А1С1 равен углу С1А1В, угол А1С1В1 равен углу В1С1А, В1А1 = А1С, А1С1 = С1В, С1В1 = В1А. Найдите углы треугольника АВС.

Решение: Пусть в треугольнике АВС , , . Так как, В1А1 = А1С, то в равнобедренном треугольнике А1В1С углы при основании равны, то есть . Аналогично доказывается, что  и угол .

Так как , то угол В1А1В = 2β. В то же время угол  внешний угол треугольника , поэтому γ.Таким образом,

2γ = 2β, или γ = β. Аналогично, α = β. Следовательно, α = β = γ = 60º.

Ответ. Все углы по 60º. 

4. На классной доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Петя и Вася по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется одно число. Если оставшееся число составное - выиграл Петя. Может ли Вася помешать Пете выиграть?

Решение: Каждый игрок сделает ровно по 6 ходов. Среди данных только 6 составных чисел (4, 6, 8, 9, 10, 12). Вася должен стирать на своем ходу составное число, а если таких чисел не осталось, то любое. Так как их 6, то после его последнего хода не останется ни одного составного числа.

Следовательно, Вася может помешать Пете выиграть.

Ответ. Вася может помешать Пете выиграть.

5.На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев – А и Б. Туземец А произнес фразу: «По крайней мере, один из нас (А и Б) – лжец». Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?

Решение

Если А – лжец, то его утверждение неверно, т.е. оба должны быть рыцарями. Противоречие. Значит, А – рыцарь. Тогда его утверждение верно и, следовательно, Б – лжец.

**9 класс**

1.Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

Решение

Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9 . Поэтому одна из возможных стратегий для Пети — дополнять на каждом ходу Васину цифру до 9. То есть, если Вася пишет "0", то Петя пишет "9", если Вася пишет "1", то Петя пишет "8" и т.д. Таким образом, после каждой пары ходов Васи и Пети сумма цифр будет увеличиваться на 9. К моменту написания всего числа она станет равной .

Заметим, что указанная стратегия не единственна. Попробуйте доказать, что независимо от того, какие цифры будут стоять перед последним ходом Пети в одиннадцати разрядах, своим последним ходом Петя сможет добиться, чтобы число делилось на 9. То есть все цифры кроме последней Петя может ставить произвольно!

2. В выражении 1:2:3:4:5:6:7:8:9 расставить скобки так, чтобы результат был: а) минимальным; б) максимальным.

Решение:

Для получения минимального результата скобки в выражении расставлять не надо, поскольку деление на любое число вида к:(к+1) будет заменено умножением на дробь (к+1)/к - неправильную.

И получаем:

1:2:3:4:5:6:7:8:9= 1/(2\*3\*4\*5\*6\*7\*8\*9),

действительно, произведение в знаменателе дает наибольшее из всех возможных значений.

Поэтому наибольшее значение выражения будет

1/(2:3:4:5:6:7:8:9)=1/(2/(3\*4\*5\*6\*7\*8\*9))=

=1\*3\*4\*5\*6\*7\*8\*9/2=9!/22.

3. Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель - на 10. Может ли увеличиться при этом дробь?

Решение:Пусть дана дробь а/в ; где а в, во. Увеличивая числитель дроби на 1, а знаменатель - на 10, получаем (а+1)/(в+10).

Проверим условие задачи, полагая а/в(а+1)/(в+10).

Откуда (ав+10а-ав-в)/(в(в+10)).

Последнее неравенство равносильно неравенству

в(10а-в) (в+10)0.

Учитывая, что в 0, а следовательно, в+100, получаем 10а-в0, т.е. 10ав.

Значит, условию задачи соответствуют дроби, у которых числитель и знаменатель находятся в соотношении 10ав.

Например, дробь 1/11, из которой после указанных преобразований получаем дробь 2/21, причём 1/112/21.

4. (Старинная задача). За 25 бубликов заплатили столько рублей, сколько бубликов можно купить на рубль. Сколько стоит один бублик?

Решение:

Пусть *х* рублей - цена 1 бублика, *у* бубликов можно купить за рубль. Тогда по условию задачи

25 *х=у,*

*ху =1*

Из второго уравнения следует *.* Умножая первое уравнение на *х,* получаем 25*х2=ху, т.е. 25х2=1.*

Откуда .

Поскольку условию задачи соответствует только положительное значение *х,* получаем:

*х=*1/5.

Значит, один бублик стоит 1/5 руб.

5. Вершину А прямоугольника АБСD соединили отрезками с серединами сторон ВС и СD. Мог ли один из этих отрезков оказаться вдвое длиннее другого?

Решение:

Обозначим середину стороны ВС через Е, а середину стороны СD –через F. Нетрудно показать, что ЕFАЕ (например, заметив, что в треугольнике DЕF сторона DЕ, равная отрезку АЕ, лежит против тупого угла). Из треугольника АЕ получаем теперь ААЕ+Е2АЕ, откуда вытекает, что ответ на вопрос задачи отрицателен.

Можно решать эту задачу и с помощью теоремы Пифагора. Обозначим длины сторон АВ и А через *х* и *у* соответственно. Тогда

АЕ2=*х2+у2/4*

Если А=2АЕ, то А2=4АЕ2, то есть *х2/4+у2=4х2+у2,*

откуда *х2=0,* что невозможно*.*

**10 класс**

1.Жук ползет по ребрам куба. Сможет ли он последовательно ребра, проходя по каждому ребру ровно один раз?

Решение:

Задумаемся над вопросом: сколько раз жук может побывать в каждой вершине? Жук входит в вершину и выходит из нее, только одна вершина обладает свойством: жук может выйти, войти и опять выйти из нее, т.е. только три ребра, выходящие из одной вершины жук может пройти по одному разу. Мы же имеем восемь вершин, из которых выходит по три ребра. Ответ: не может.1.

2.Решить уравнение в целых числах:

(x – y)3 + (y – z)3 + (z – x)3 = 30.

Решение: Преобразовав данное уравнение, получим:

3(x – y)(y – z)(z – x) = 30 или (x – y)(y – z)(z – x) = 10.

Значит, целые числа (x – y), (y – z), (z – x) — делители числа 10, сумма этих делителей равна нулю. Не трудно убедиться, что таких делителей у числа 10 нет.

3.Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 10. Может ли увеличиться при этом дробь?

Решение:

Пусть дана дробь а/в ; где а в, во. Увеличивая числитель дроби на 1, а знаменатель - на 10, получаем (а+1)/(в+10).

Проверим условие задачи, полагая а/в(а+1)/(в+10).

Откуда (ав+10а-ав-в)/(в(в+10)).

Последнее неравенство равносильно неравенству

в(10а-в) (в+10)0.

Учитывая, что в 0, а следовательно, в+100, получаем 10а-в0, т.е. 10ав.

Значит, условию задачи соответствуют дроби, у которых числитель и знаменатель находятся в соотношении 10ав.

Например, дробь 1/11, из которой после указанных преобразований получаем дробь 2/21, причём 1/112/21.

4.Подряд написаны числа 1,2,3,4,5,...,2000. Первое, третье, пятое и т.д. по порядку вычеркивают. Из оставшихся 1000 чисел снова вычеркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?

Решение:

После первого вычеркивания останется 1000 четных чисел: 2,4,6,8,10,12,..., 2000.

После второго – числа кратные 4. Таких чисел 500: 4,8,12, ..., 2000.

После третьего – останутся числа, кратные 8. Таких 250.

После четвертого зачеркивания останется 125 чисел, кратных 16.

Пятое зачеркивание оставит числа последнего ряда, стоящие на нечетных местах, после чего останется 62 числа, кратных 32.

Шестое зачеркивание оставит 31 число, кратное 64.

Седьмое – 15 чисел, кратных 128.

Восьмое – 7 чисел, кратных 256.

Девятое – 3 числа, кратные 512.

Последним будет десятое зачеркивание, после которого останется число 1024.

5.Существует ли выпуклый 2000-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

Решение:

Сумма внешних углов любого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине равна 360°. Поэтому внешние углы 2000-угольника не могут быть выражены целым числом, а следовательно, не могут быть выражены целым числом и градусные меры внутренних углов.

Примечание: Аналогичные рассуждения можно провести, вычислив сумму внутренних углов: наибольшие, выраженные целым числом внутренние углы могут быть равны 179°. Тогда их наибольшая «целая» сумма

179°2000=358000°.

Но сумма углов выпуклого 2000-угольника равна

180°(2000-2)=359640°.

Таким образом, выпуклый 2000-угольник должен иметь внутренние углы и большие 179°.

**11 класс**

1. Найдите три последние цифры суммы

1! + 2! + 3! + ... + 1998!

Решение:

Простыми рассуждениями нетрудно убедиться, что 15! и все последующие слагаемые данной суммы в разложении на простые множители содержат не менее трех 5 и не менее трех 2, а поэтому каждое заканчивается как минимум тремя нулями. Поскольку три последние цифры произведения и суммы зависят только от трех последних цифр сомножителей и слагаемых, то при решении задачи следует обращать внимание только на эти три цифры. В следующей таблице приведены три последние цифры первых четырнадцати слагаемых:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1! | 2! | 3! | 4! | 5! | 6! | 7! | 8! | 9! | 10! | 11! | 12! | 13! | 14! |
| 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 720 | 040 | 320 | 880 | 800 | 600 | 800 | 200 |

Теперь нетрудно определить, что три последние цифры данной суммы 313.

2. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение

х2 - 7nх + 150 = 0

имеет два целых корня.

Решение:

Предположим, что уравнение имеет два целых корня. Тогда по формулам теоремы Виета имеем равенства:

a b = 150, a + b = 7n.

Поскольку n натуральное, то a b и a + b - положительные, а, следовательно, оба корня уравнения положительны. Полагая для определенности a ≥ b, получаем несколько возможностей:

1. a = 150, b = 1;
2. a = 75, b = 2;
3. a = 50, b = 3;
4. a = 30, b = 5;
5. a = 25, b = 6;
6. a = 15, b = 10.

Простым перебором убеждаемся, что только в случаях 2 и 4 сумма a + b делится на 7. Следовательно, a + b = 77, или a + b = 35. В первом случае n = 11, во втором n = 5.

Обратно, в случае, когда n = 11 уравнение имеет два целых корня 30 и 5, и, если n = 5, уравнение имеет два целых корня 75 и 2.

3. Точки A2 , B2 и C2 – середины высот AA1 , BB1 и CC1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов B2A1C2 , C2B1A2 и A2C1B2 .

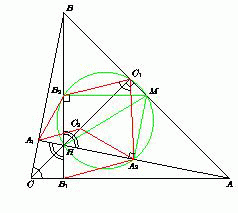
Решение:

Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC , M – середина стороны AB . Поскольку MB2 и MA2 – средние линии прямоугольных треугольников AB1B и AA1B , то

MB2H = AB1B= 90o, MA2H = BA1A= 90o,

поэтому из точек B2 , A2 и C1 отрезок MH виден под прямым углом. Значит, эти точки лежат на окружности с диаметром MH . Черырёхугольник A2C1B2H – вписанный, поэтому

A2C1B2 = 180o- A2HB2 = 180o- A1HB1 = ACB.

Аналогично докажем, что B2A1C2 = BAC, C2B1A2 = ABC. Следовательно, A2C1B2+ B2A1C2+ C2B1A2= ACB + BAC + ABC = 180o. 

4.Квадратный трехчлен *ах2+вх+с* имеет корни. Верно ли, что трехчлен *а3х2+в3х+с3* также имеет корни?

Решение:

Так как *ах2+вх+с* имеет корни, то *в2≥4ас,* откуда *в6≥64а3с3.* Если *ас≥0,* то 64*а3с3≥4а3с3,*  а если *ас0*, то *в6≥04а3с3.*  В обоих случаях *в6≥4а3с3.* Именно это и нужно, чтобы трехчлен *а3х2+в3х+с3* имел корни. Итак, ответ на вопрос задачи положительный

5.Решите уравнение



Решение:

Прежде всего обратим внимание, что *х0.*

Преобразовывая в этих условиях уравнение, получаем:

2=х;

аналогично, преобразовывая последовательно, получаем:

2=х,

=х,

откуда,

*2(х+1)=х*

*2х+2=х*

*х=-2,*

что противоречит условию *х0.*

Значит, уравнение не имеет решения.