Система базовых задач по теории чисел

1. Содержание любого раздела школьного курса математики можно представить в виде системы базовых задач.
2. Рассмотрим базовые задачи по теории чисел

3. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №1.</u>

Определить простое или составное данное натуральное число. Необходимо:

А) проверить известные признаки делимости;

Б) если число n не делится ни на одно из простых p, таких, что $p \le \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, то оно простое.

<u>ПРИМЕР:</u> Рассмотрим число 2003.

А) Признаки делимости не работают.

Б) $\sqrt{2003} \approx 44;$

Простые делители: $p \in \{7,13,17,19,23,29,31,37,43\}.$

Теорема: *Если p – простое число, p>3, то оно имеет вид* $6k \pm 1.$

Доказательство: Рассуждаем по модулю 6. Остатки при делении натурального числа на 6: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

Структура числа $6k; 6k+1; 6k+2; 6k+3; 6k+4; 6k+5.$

$6k \vdots 6; \quad 6k+2 \vdots 2; \quad 6k+3 \vdots 3; \quad 6k+4 \vdots 2.$

$6k+5$ дает такой же остаток, что $6k-1.$

Вывод: $p = 6k \pm 1,$ обратное неверно.

<u>Задача С6:</u> Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2 - 1,$ где p – простое число, большее 3, но меньшее 2010.

Решение:

p – простое число, $p \in \{5;7;11;2003\}.$

$$p^2 - 1 = (p-1)\cdot(p+1).$$

Так как p – простое, большее 3, то оно имеет вид $6k \pm 1.$

$p = 6k + 1.$

$$p^2 - 1 = (p-1)\cdot(p+1) = 6k\cdot(6k+2) = 12k(3k+1). \quad 12k\cdot(3k+1) \vdots 12.$$

1) если k – четное, то $12k\cdot(3k+1) \vdots 24.$

2) если k – нечетное, то $k = 2m \pm 1, \quad 12\cdot(2m+1)\cdot(6m+4) \vdots 24.$

Аналогично рассмотрим случай, когда $p = 6k - 1.$

Вывод: p>3 – простое, то $p^2 - 1 \vdots 24.$

Если p=5, то $p^2 - 1 = 24 \vdots 24.$

Все остальные простые числа $p \in \{5;7;11;2003\}$ будут больше 24. Самое маленькое число 24 и оно не может $\vdots$ на большее.

Вывод: Н.О.Д.=24.

4. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №2.</u>

Задача приведения натурального числа к каноническому виду.

<u>Основная теорема арифметики:</u> *Любое натуральное число n единственным образом раскладывается на произведение степеней простых множителей*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$ *- это канонический вид числа.*

<u>ПРИМЕР:</u>
А) $72=2^3\cdot 3^2$.
Б) $10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$.

Запишем канонический вид числа 2009!

$$2009! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdots 2003.$$

$$a = \left[\frac{2009}{2}\right] + \left[\frac{2009}{2^2}\right] + \left[\frac{2009}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{2009}{2^{10}}\right] = 1004+502+251+125+62+31+15+7+1 = 2001.$$ Аналогично находим все остальные показатели степеней.

$$2009! = 2^{2001}\cdot 3^{1000}\cdot 5^{500}\cdot 7^{333}\cdot 11^{199}\cdot 13^{165}\cdot 17^{124}\cdot 19^{110}\cdot 23^{90}\cdot 29^{71}\cdot 31^{66}\cdot 37^{55}\cdot 41^{50}\cdot 43^{47}\cdot 47^{42}\cdots 2003.$$

5. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №3.</u>

О делении чисел с остатком. $a = b\cdot c + r, \quad 0 \le r < b.$

Теорема: Натуральные числа n и n^5 заканчиваются одной и той же цифрой.

$2^1=2$	$3^1=3$	$4^1=4$
$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$
$2^5=32$	$3^5=243$	$4^5=1024$

Имеет место период 4.

Все числа вида n^{1+4k} оканчиваются одной и той же цифрой.

Все числа вида n^{2+4k} оканчиваются одной и той же цифрой.

Все числа вида n^{m+4k} оканчиваются на одну и ту же цифру.

<u>ПРИМЕР:</u>
Найдите последнюю цифру числа $1334568597\underline{3}^{14151617\underline{19}}$.
19:4=4(3); $3^{19}=3^{16+3}$; $3^3=2\underline{7}$
Ответ: 7.

6. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №4.</u>

Задача нахождения НОК и НОД двух и более чисел.
Разложим числа a и b в канонический вид, тогда

$$НОД(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \ldots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}.$$

$$НОД(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \ldots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

Произведение НОД и НОК равно произведению самих чисел.

7. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №5.</u>

Нахождение числа делителей произвольного натурального числа n.

<u>ПРИМЕР:</u>
Сколько делителей имеет число 72?

$72=2^3\cdot3^2$.

Делитель: $d=2^a\cdot3^b$, $a\in\{0;1;2;3\}4;\quad b\in\{0;1;2\}3;\quad 4\cdot3=12;\quad 12\textit{делителей}$

Правило умножения: Пусть нужно выполнить сложное действие, состоящее из k элементарных действий, причем 1-ое действие можно выполнить n_1 способами, 2-ое действие – n_2 способами, k-ое действие – n_k способами.

Тогда общее количество способов, которыми может быть выполнено все это сложное действие равно $n_1\cdot n_2\cdots n_k$.

<u>ПРИМЕР:</u>

А) Сколько делителей имеет число 10!

$10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$.

$d=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$ – любой делитель числа 10!

$a\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}-9;\quad b\in-5;\quad c\in-3;\quad d\in-2;\quad 9\cdot5\cdot3\cdot2=270\textit{делителей}$

Ответ: 270 делителей.

Б) Запишем канонический вид любого числа n.

$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, тогда число делителей числа n можно найти по формуле $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_k+1)$.

Число p^3 – простое, имеет 4 делителя,

P^5 – 6 делителей.

Если p – простое число, то структура числа, имеющая k делителей может быть p^{k-1}.

8. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №6.</u>

Решение линейных диофантовых уравнений.

$ax+by=c\,(1);\quad a,b,c\in Z;\quad x,y\in Z;\quad x,y-?$

<u>ПРИМЕР:</u>

2x+3y=5; 2x=5-3y; $x=\dfrac{5-3y}{2}=2-y+\dfrac{1-y}{2}$.

$\dfrac{1-y}{2}$ - целое число.

$\dfrac{1-y}{2}=n$.

y=1-2n, где n – целое число.

$x=\dfrac{5-3+6n}{2}=\dfrac{2+6n}{2}=1+3n.$

$$\begin{cases}x=1+3n;\\ y=1-2n,\end{cases}\quad \textit{где}\quad n-\textit{целое}\quad \textit{числа}$$

9. <u>БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №7.</u>

Задача решения диофантовых уравнений 2-ой степени с двумя переменными.

10. **БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №8.**

Приемы суммирования различных числовых последовательностей. Обращение периодической дроби в обыкновенную.

Задача С6 (Вариант 1):

Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$.

Квадрат любого числа может оканчиваться на цифры 0; 1; 4; 5; 6; 9, не может оканчиваться на цифры 2; 3; 7; 8.

Составим таблицу

n	n!+5n+13		k
1	1+5+13	19	$\neq k^2$
2	2+10+13	25	$k^2=25$, $k=5$
3	6+15+13	34	$\neq k^2$
4	24+20+13	57	$\neq k^2$
5	120+25+13	158	$\neq k^2$

Если n>5, то 1 слагаемое оканчивается на 0, 5n оканчивается либо 5, либо 0.
Все выражение оканчивается либо на 3, либо на 8.
Решение единственное n=2, k=5.

Задача С6 (Вариант 2):

Решите в натуральных числах уравнение $m > n$.

$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25},\quad 25m+25n=mn,\quad 25m=n(m-25).$

$n=\frac{25m}{m-25}$ - дробь неправильная, алгебраическая.

Выделим целую часть

$n=\frac{25m-625+625}{m-25}=\frac{25(m-25)+625}{m-25}=25+\frac{625}{m-25}.$

$\frac{625}{m-25}$ - целое число.

Выпишем все делители числа 625.

$625=5^n$ натуральных делителей 5.

Число 625 имеет 10 целых делителей.

$m-25\in\{\pm1;\pm5;\pm25;\pm125;\pm625\}.$

m-25=1;   m-25=-1;   m-25=5;   m-25=-5.

m=26;   m=24;   m=30;   m=20.

Путем решения каждого уравнения получим, что

m=150, n=30;

m=650, n=26.

11. **БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №9.**

Математическое моделирование с помощью уравнений и систем уравнений.

12. **БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №10.**

Задача о принадлежности данного числа данному числовому множеству.