.

# Арифметическая и геометрическая прогрессии

Ход урока:

I .Организационный момент.

Класс заранее разбивается на две группы для учебной работы, каждая группа выполняет задание для одной из прогрессий. Вся информация записывается в таблицу. (рис. 1)
название определение
формула n -го члена
характеристическое свойство
формула суммы n первых членов
арифметическая
геометрическая

Рис. 1

I I . Работа с карточками.

Группы получают карточки с задачей, а также вопросы и задания к ней.

Карточка №1. Вертикальные стержни фермы имеют такую длину: наименьший 5 дм, а каждый следующий на 2 дм длиннее. Найдите длину семи стержней.

Задания:
Запишите последовательность в соответствии с условием задачи.
Постройте график заданной прогрессии по данным задачи, если 1 <= n <= 7.
Сформулировать вывод о графике.

Карточка № 2. В благоприятных условиях бактерии размножаются так, что на протяжении одной минуты одна из них делится на две.

Задания:
Запишите последовательность в соответствии с условием задачи.
Постройте график заданной прогрессии по данным задачи, если 1 <= n <= 7.
Сделайте вывод о графике.

В процессе работы учащиеся следят за ответами товарищей, делают записи в тетради и готовятся ответить на предложенные вопросы.

I I I . Сообщение учащихся

1. Прочитав подряд определения арифметической и геометрической прогрессий можно обратить внимание на то, что они похожи. Надо лишь заменить сложение умножением или наоборот. А зная формулу n-го члена арифметической прогрессии, можно получить формулу для геометрической прогрессии, если заменить сложение умножением и умножение - возведением в степень (рис.2)

an = a1 + (n -1)d,  bn = b1*qn-1 .

Рис. 2

2. “Родство” прогрессий становится еще более заметным, если вспомнить их характеристические свойства( рис.3)

an = ,  bn = .

Рис. 3

Здесь тоже достаточно заменить сложение умножением, а деление на 2- извлечением корня второй степени, и из характеристического свойства арифметической прогрессии получится характеристическое свойство геометрической прогрессии.

3.  С формулой (рис.4) связан один из эпизодов биографии К.Ф.Гаусса. Однажды на уроке, чтобы занять первоклассников, пока он будет заниматься с учениками третьего класса, учитель велел сложить все числа от 1 до 100, надеясь, что это займет много времени, но маленький Гаусс сразу сообразил, что 1+100=101, 2+99=101 и т.д. И таких чисел будет 50. Осталось умножить 101 • 50. Это маленький мальчик сделал в уме. Едва учитель закончил чтение условия, он предъявил ответ, записанный на грифельной доске, Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике. В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий. Его даже называли “царем математики”.

S =  • n

Рис. 4

4. О том, как давно была известна геометрическая прогрессия, свидетельствуют папирусы Ахмеса. Некоторые задачи имеют отвлеченный характер. Например:

 “В доме было 7 кошек.

Каждая кошка съедает 7 мышей.

Каждая мышь съедает 7 колосьев.

Каждый колос дает 7 растений.

На каждом растении вырастает 7 мер зерна.

Сколько всех вместе?”.

Автора задачи не интересует о каких вещах идет речь, важно только их общее количество.

И на Руси решались похожие задачи. Еще в XIX веке в деревнях загадывали:

“Шли 7 старцев.

У каждого старца по 7 костылей.

На каждом костыле по 7 сучков.

На каждом сучке по 7 кошелей.

В каждом кошеле по 7 пирогов.

В каждом кошеле по 7 воробьев.

Сколько всего?”

А ведь это та же задача Ахмеса. Прожившая тысячелетия она сохранилась почти неизменной.

5. В IX веке стало известна задача об изобретении шахматной игры. В награду за свое изобретение автор потребовал от индийского царя пшеницу. Ее должно быть столько, чтобы на первую клетку доски можно положить одно зерно, на вторую – два, на третью- четыре, т.е. чтобы число зерен все время удваивалось. Сначала индийский царь обрадовался, что дешево отделался, и лишь потом выяснил, что такого количества пшеницы нельзя собрать со всех полей Земли в течение десятков лет.Чтобы разместить это зерно в амбаре, то его размеры будут: высота 4 м, ширина 10м, длина будет 30 000 000км- вдвое больше, чем расстояние от Земли до Солнца. А чтобы его получить, то надо засеять пшеницей площадь всей Земли, считая моря, океаны, горы, пустыни, Арктику с Антарктидой и получать средний урожай.

IV. Решение задач.
Курс воздушных ванн начинает с 15 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1ч 45 мин?
Вкладчик 1 января 2003 г внес в сберегательный банк 3000руб. Какова

будет сумма его вклада на 1 января 2005г если сбербанк начисляет ежегодно 8% годовых?
Представьте, что вы – учетчик на стройке. Привезли и вывезли большое количество бревен строевого леса. Нужно быстро определить, сколько бревен привезли, чтобы закрыть наряд шоферу.

В данном случае, чтобы подсчет бревен осуществлялся по простым формулам, один из способов – использовать естественное расположение бревен так, чтобы в каждом верхнем ряду их оказалось на единицу меньше, чем в нижнем. Тогда число бревен ряда образует арифметическую прогрессию и общее количество легко подчитывается по формуле суммы арифметической прогрессии с разностью, равной единице. (рис.5)

Рис. 5
Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму одиннадцати первых членов.
Найдите четыре числа образующих геометрическую прогрессию, у которых сумма крайних членов равна 49, а сумма средних членов равна 14.
Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –5,5; -4,8;…

V. Сообщение ученика.

На связь между прогрессиями первым, по – видимому, обратил внимание Архимед. В 1544г вышла книга немецкого математика М.Штифеля “Общая арифметика”. Штифель составил таблицу: (рис.6)–4 –3
–2
–1
0
1 2 3 4 5 6 7

1 2 4
8
16
32
64
128

Рис. 6

В верхней строке – арифметическая прогрессия с разностью 1.В нижней строке – геометрическая прогрессия со знаменателем 2.

Расположены они так, что нулю арифметической прогрессии соответствует единица геометрической прогрессии. Это очень важный факт.

А теперь представьте себе, что мы не умеем умножать и делить. Но нам понадобилось умножить, например, 1/2 на 128. В таблице над 1/2 написано –1,а над 128 написано 7. Сложим эти числа. Получилось 6. под шестеркой читаем 64. Это и есть искомое произведение.

Другой пример. Разделим 32 на 8. Поступаем аналогично:

32 –> 5 8 –> 3 5 - 3 = 2

2 –> 4 32 : 8 = 4

Если вспомнить тождество: (рис.7)

То нижнюю строчку таблицы Штифеля можно переписать так:

2 –4 ;2 –3 ; 2 –2 ; 2 –1 ; 2 0 ; 2 1 ; 2 2 ; 2 3 ; 2 4 ; 2 5 ; 2 6 ; 2 7 .

Нетрудно сообразить:

2-1 ·27 = 26 2 5 :2 3 = 22 .

Теперь можно сказать, что если показатели составляют арифметическую прогрессию, то сами степени составляют геометрическую прогрессию.

Сообщения ученика.

Древнейшая задача о делении хлеба.

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвёртый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трёх остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение:

$y$- разность арифметической прогрессии

Доля первого – $x$

доля второго – $x + y$

доля третьего – $x + 2y$

доля четвертого – $x + 3y$

доля пятого – $x + 4y$

На основании условий задачи составим следующие два уравнения:

$x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100$

$7((x + (x + y)) = (x+2y) + (x+3y) + (x+4y)$

После упрощений

$x+2y = 20$

$11x = 2y$

Решив систему, получаем:

$x = 1$

$y = 9$

Следовательно, хлеб должен быть разделен на следующие части:

1, 10, 20, 29, 38.

VI. Решите задачу

Сумма трёх первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25,27 и 1, то получатся три члена, образующие арифметическую прогрессию. Найдите четвертый член геометрической прогрессии и первый член арифметической прогрессии.

VII. Задание на дом

1. Найдите первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен 3,а сумма шести первых членов равна 1820.

2. Найдите три первых члена арифметической пргрессии, если известно, что сумма первого, третьего, пятого равна 12, а их произведение 80.

3. Заполнить таблицу для другой прогрессии.

VIII. Подведение итогов урока.

Оценить деятельность учащихся в целом и отдельных учащихся индивидуально