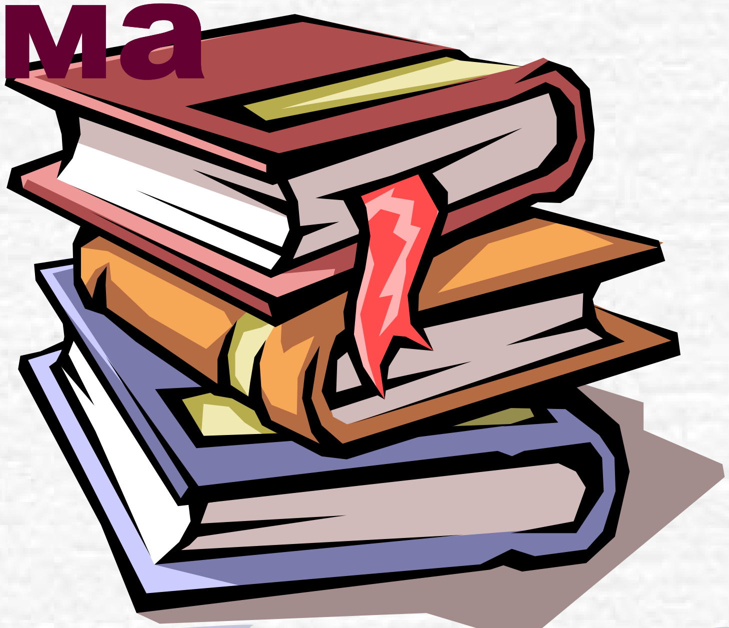
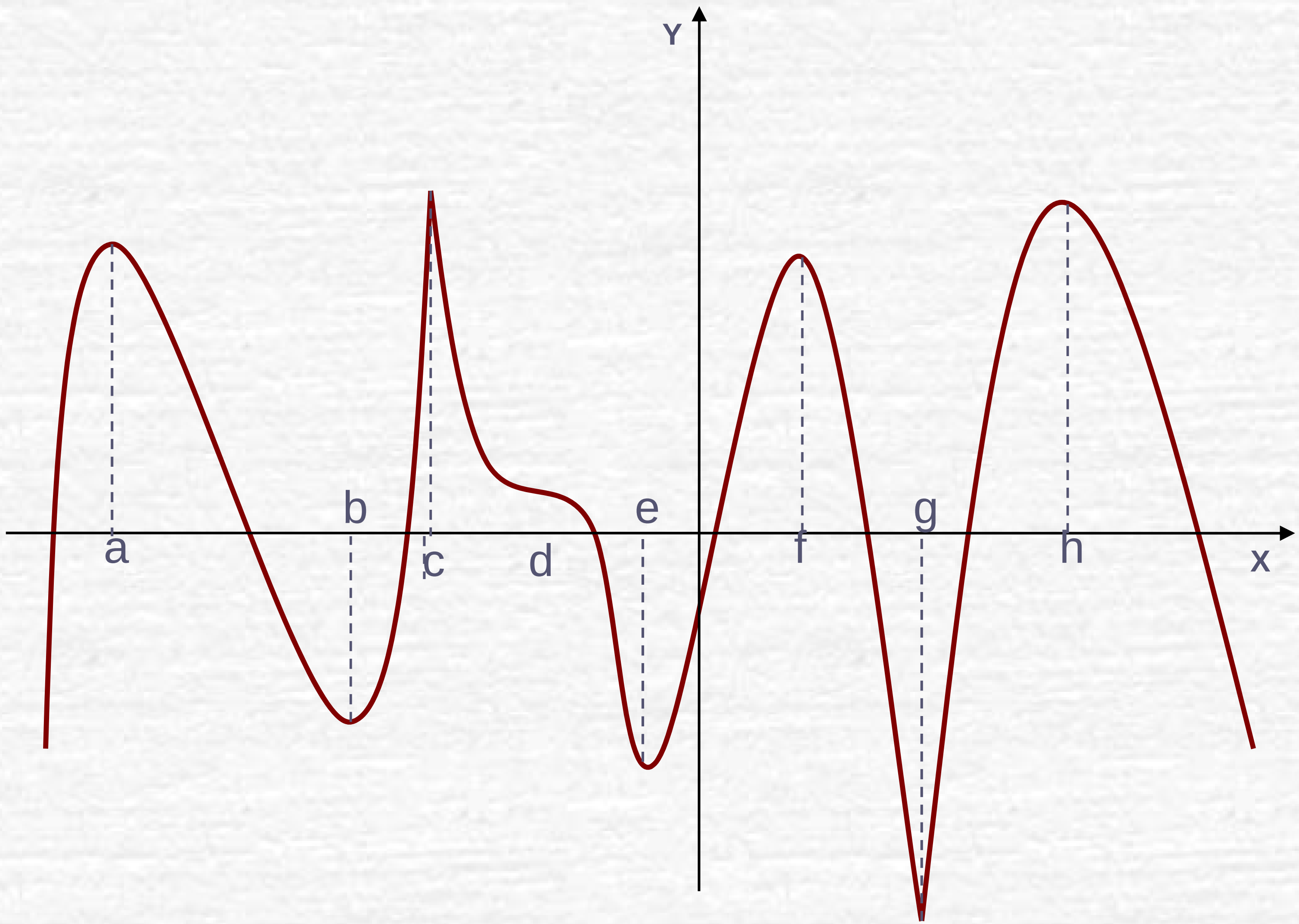
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1 ЧАСТЬ

Особые точки и необходимые условия экстремума



Особые точки функции



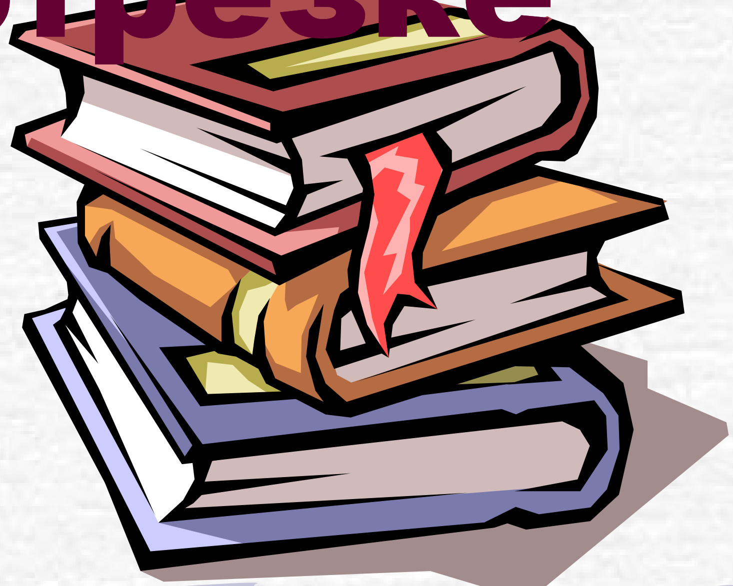
a, b, c, d, e, f, g, h – точки, подозрительные на экстремум (критические точки), a, b, d, e, f, h – точки, где производная равна 0, c, g – точки, где производная не существует, d – точка перегиба

Необходимое условие экстремума функции

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю

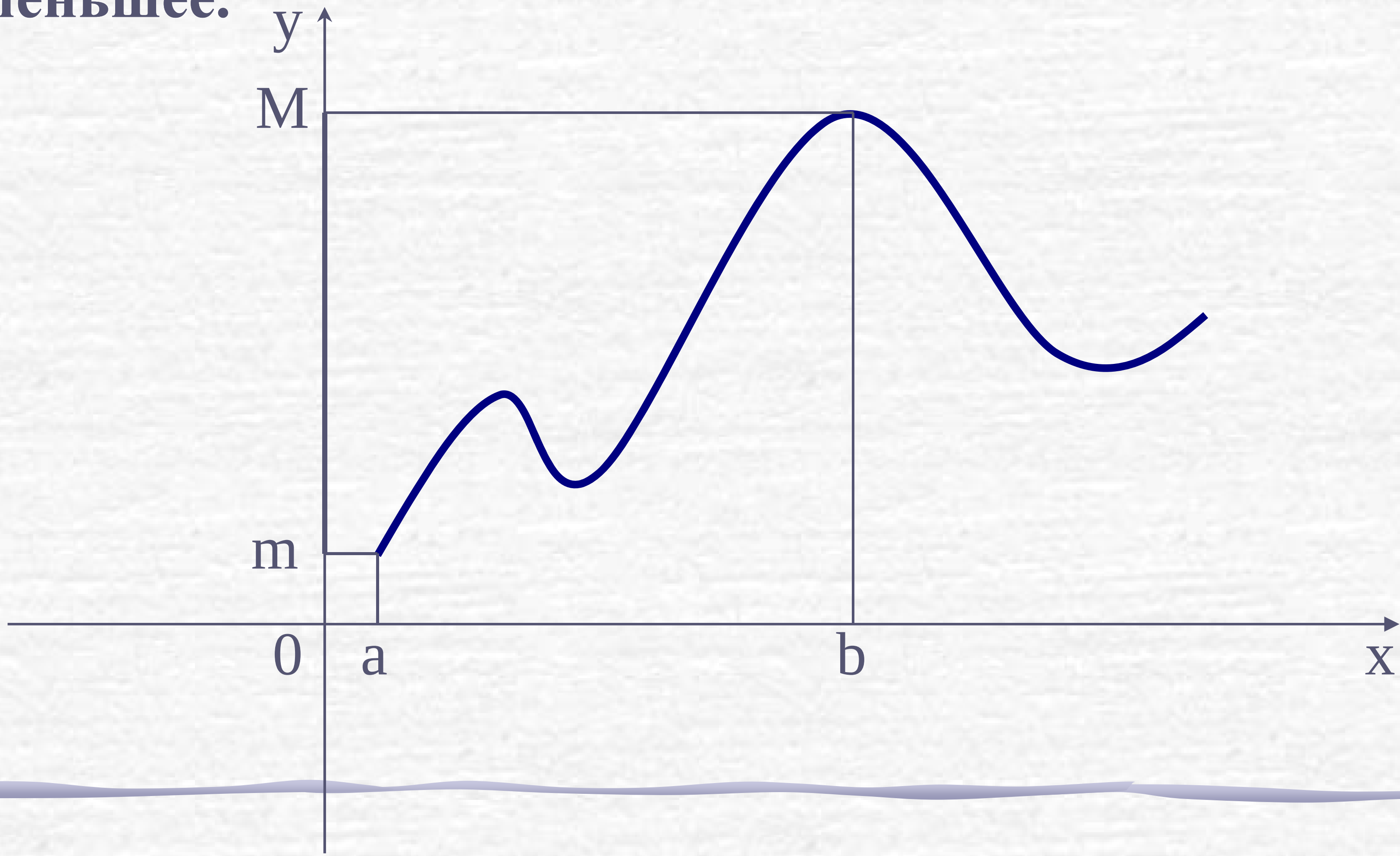
$f'(x_0)=0.$

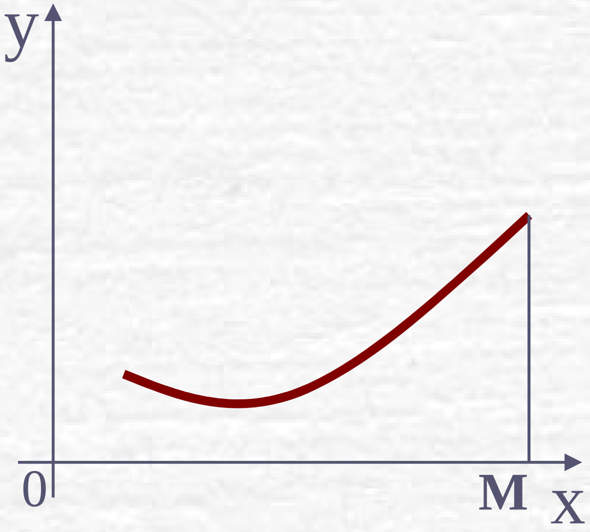
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке



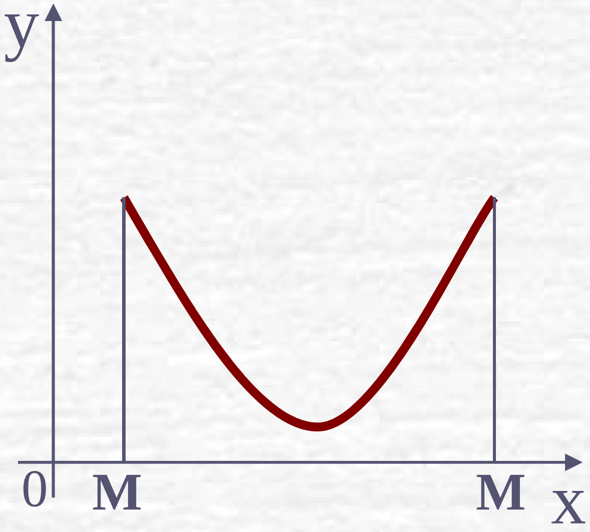
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Теорема: Если функция непрерывна на отрезке [a;b], то среди ее значений на этом отрезке есть наибольшее и наименьшее.

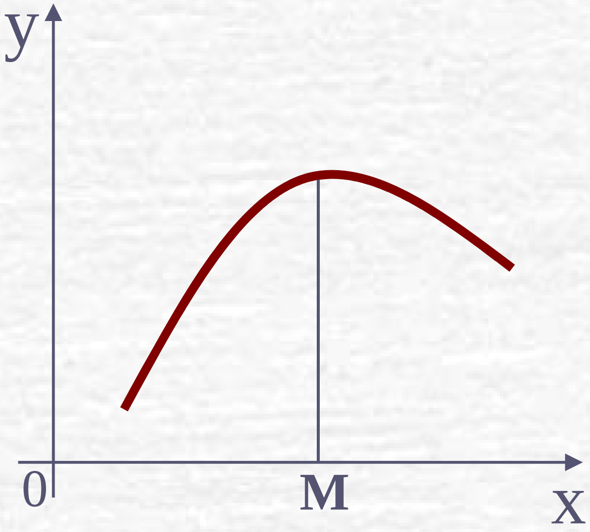




Максимальное значение на одном из концов отрезка.



Максимальное значение на обоих концах отрезка



Максимальное значение достигается во внутренней точке этого отрезка

Чтобы найти наименьшее и наибольшее значение непрерывной функции f на отрезке [a;b], надо:

1) Найти ее значение на концах этого отрезка;
2) Найти ее значение в точках, где производная равна нулю;
3) Найти ее значение в точках, где функция не имеет производной;
4) Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее;

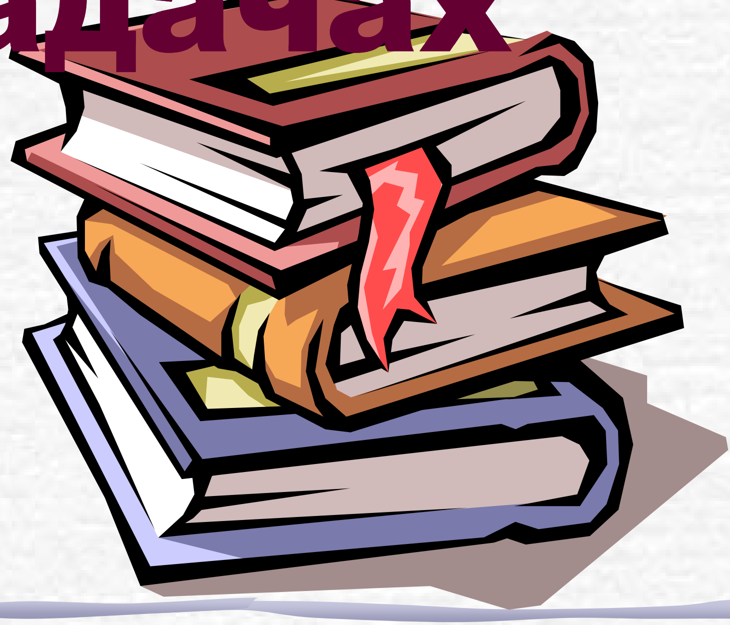
ПРИМЕР:

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ на отрезке [-2;2].

1. **Эта функция непрерывна на отрезке.**
2. **Ее производная равна:** $\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$
3. **Производная равна нулю в точках –1 и 1**
4. **Производная определена при всех х**
5. **f(-2)=7/3; f(-1)=3; f(1)=1/3; f(2)=3/7.**
6. **Min 1/3; max 3**

Ответ: max y(x)=y(-1)=3 на отрезке [-2;2]
min y(x)=y(1)=1/3 на отрезке [-2;2]

Наибольшее и наименьшее значение функции в задачах

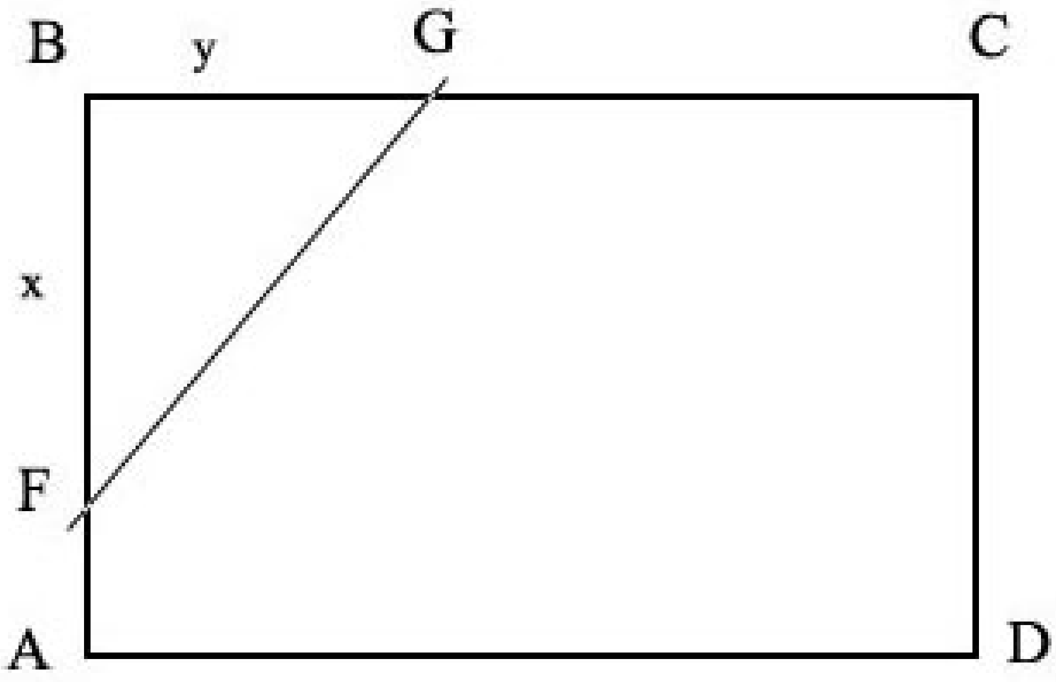


Алгоритм решения задач при помощи производной

1. Выбрать независимую переменную и выразить через неё ту переменную, для которой ищется наибольшее или наименьшее значение.
2. Найти промежуток изменения независимой переменной.
3. Найти производную полученной в п.1 функции.
4. Приравнять производную нулю и найти корни получившегося уравнения.
5. Найти точки, в которых функция не имеет производной.
6. Вычислить значения функции на концах промежутка изменения независимой переменной и в точках, найденных в п.4 и п.5, а потом выбрать из них наибольшее (соответственно наименьшее) значение.

Задача

Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.



Дано:

ABCD – прямоугольник;

$BC = 5$;

$AB = 2$;

$P_{FGB} = 8$;

Найти:

Наименьшую площадь оставшейся части.

S - ?

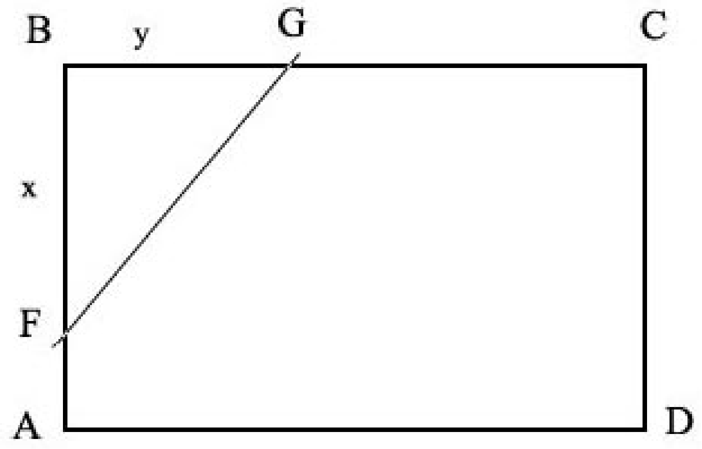
1) Пусть FB = x; $x \in (0; 2]$;

2) Рассмотрим треугольник FBG

По теореме Пифагора:

$FG^2 = x^2 + y^2$; где

BG = y, $y \in (0;5]$;



3) $P_{FGB} = 8 = x + y + FG \Rightarrow FG = 8 - (x + y)$;

$x^2 + y^2 = 64 + x^2 + y^2 + 2xy - 16x - 16y$;

$16y - 2xy = 64 - 16x$;

$y(8-x) = 32 - 8x$;

$y = (32 - 8x)/(8 - x)$;

4) Составим S(x), для нахождения S_{GCDAF}:

S(x) = BC*AB – ½*FB*BG;

$S(x) = 10 - ½*(32x - 8x^2)/(8 - x) = 10 - (16x - 4x^2)/(8 - x)$;

5) $S'(x) = -((8 - x)(16x - 4x^2)' - (16x - 4x^2)(8 - x)')/(8 - x)^2 =$

$= -((8 - x)(16 - 8x) - (16x - 4x^2)(-1))/(8 - x)^2;$

6) $S'(x) = 0;$

$S'(x) = (8 - x)(16 - 8x) + (16x - 4x^2) = x^2 - 16x + 32 = 0;$

$D = 128;$

$x_1 = 8 + 4\sqrt{2};$

$x_2 = 8 - 4\sqrt{2};$

$x_1, x_2 \notin (0;2];$

7) Найдём значение функции на концах отрезка (0;2]:

$S(0) = 10 - 0 = 10;$

$S(2) = 10 - 16/6 = 22/3.$

$S(0) > S(2) \Rightarrow$ наименьшая $S = S(2) = 22/3.$

Ответ: 22/3.

ТЕСТ 1

I ВАРИАНТ

1) Б
2) Б
3) 1. В

   2. Б

   3. А

II ВАРИАНТ

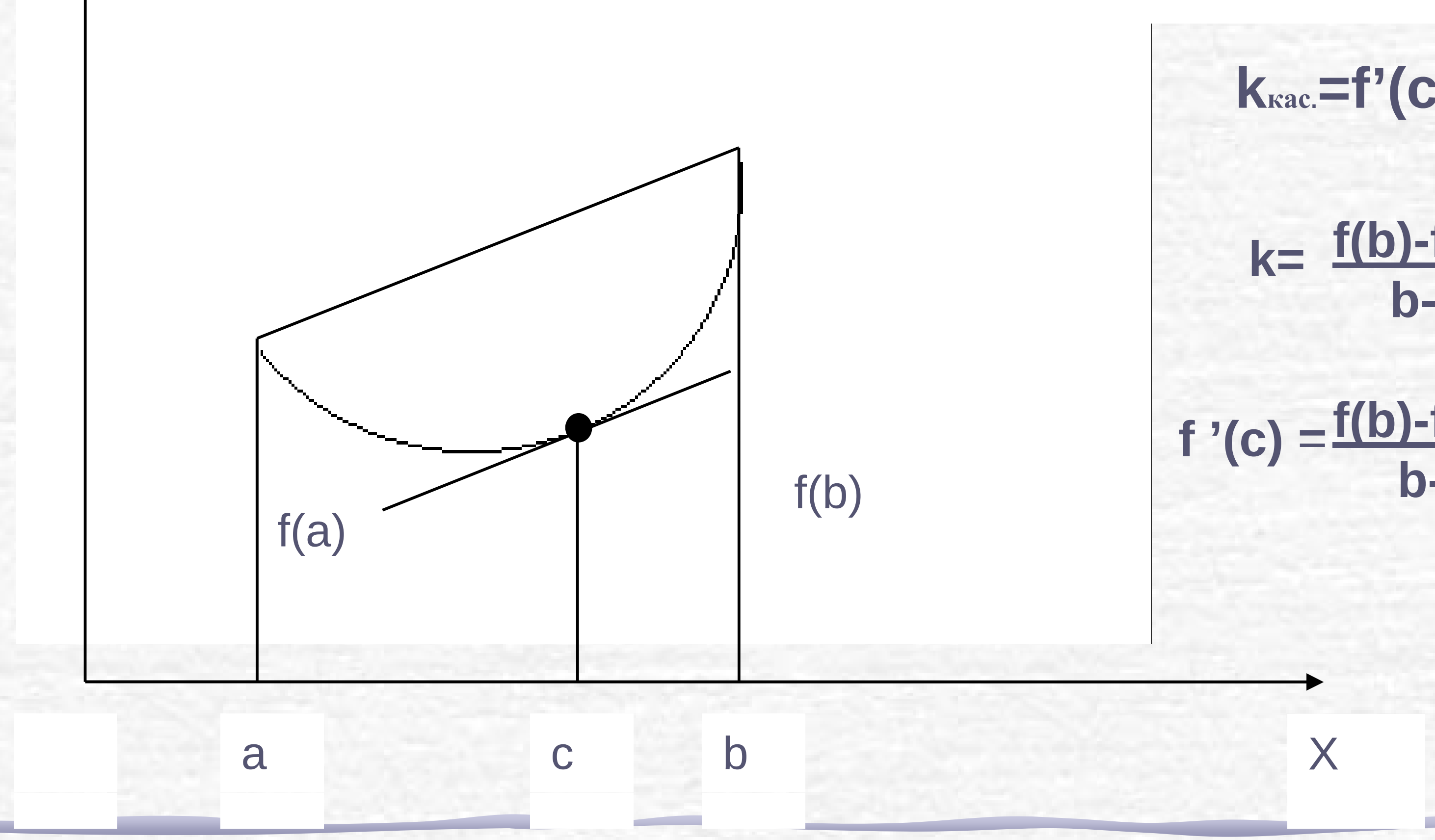
1) А
2) Г
3) 1. В

   2. Б

   3. А

Теорема Лагранжа и ее следствия

Пусть f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Тогда существует внутренняя точка c этого отрезка, такая, что касательная к графику функции, проведенная в точке с абциссой C, параллельна хорде AB, где A(a;f(a)) и B(b;f(b)).



$$k_{кас.} = f'(c)$$

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теорема 1’. Пусть функция f непрерывна на отрезке [a;b] и дифференциру-

ема во внутренних точках с этого отрезка. Тогда существует внутрення точ-
ка с этого отрезка, такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Это равенство можно также записать в виде $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Следствие 1. Если функция непрерывна на отрезке [a;b], а ее производная равна нулю внутри этого отрезка, то функция f постоянна на [a;b].

Следствие 2. Если две функции непрерывны на отрезке [a;b] и имеют одинаковые производные внутри этого отрезка, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.

Пример. Найти значение С для функции $f(x)=(x^2+1)(x^2+4)$ на отр.[-5;5]

$f'(x)=(x^2+1)'(x^2+4)+(x^2+1)(x^2+4)'=2x^3+8x+2x^3+2x=4x^3+10x$

$$f'(c)=\frac{f(-5)-f(5)}{5-(-5)}=0$$

$4c^3+10c=0$

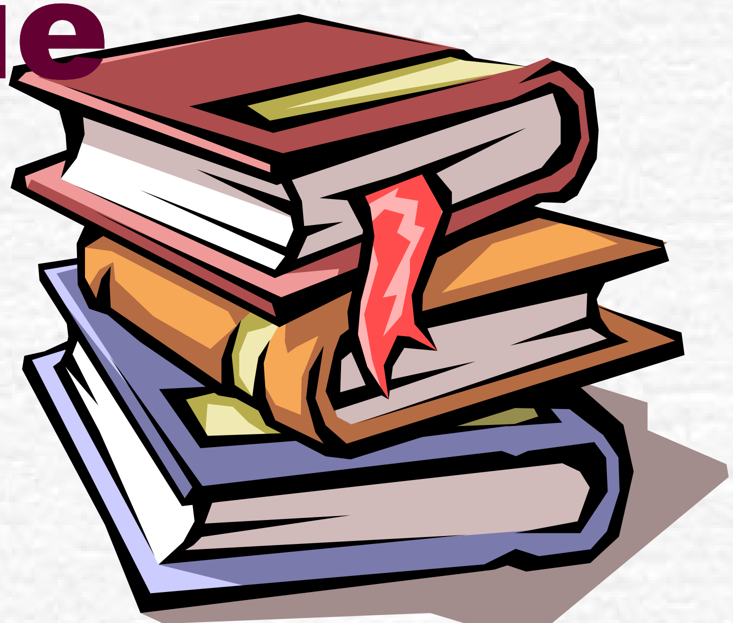
$2c(2c^2+5)=0$

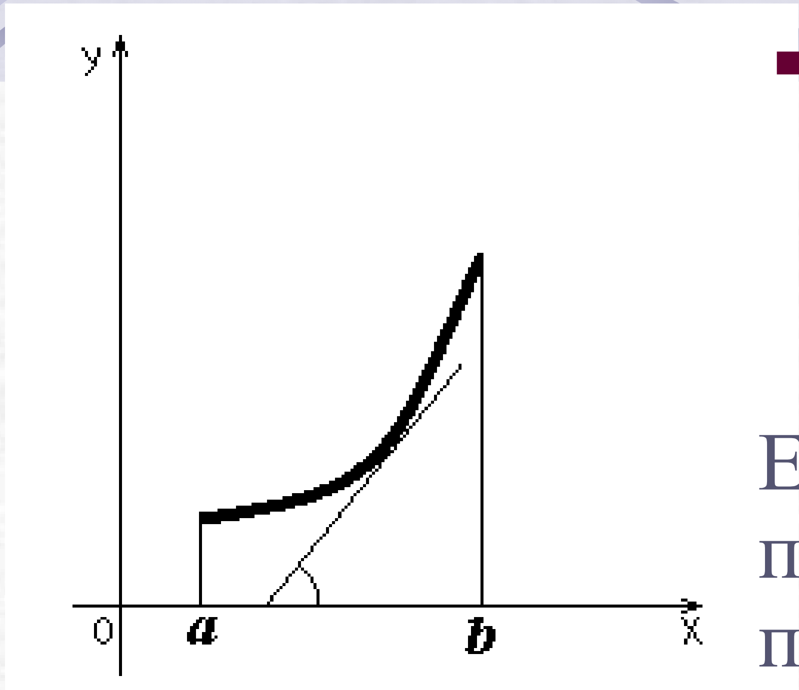
$c=0$

Ответ: $c=0$.

2 ЧАСТЬ

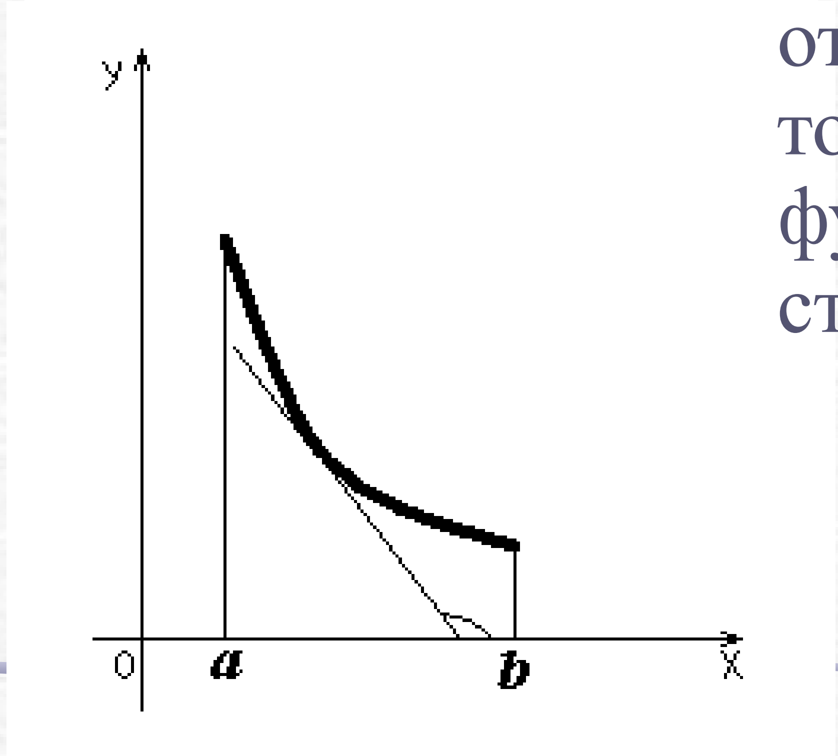
Исследования функции на возрастание и убывание



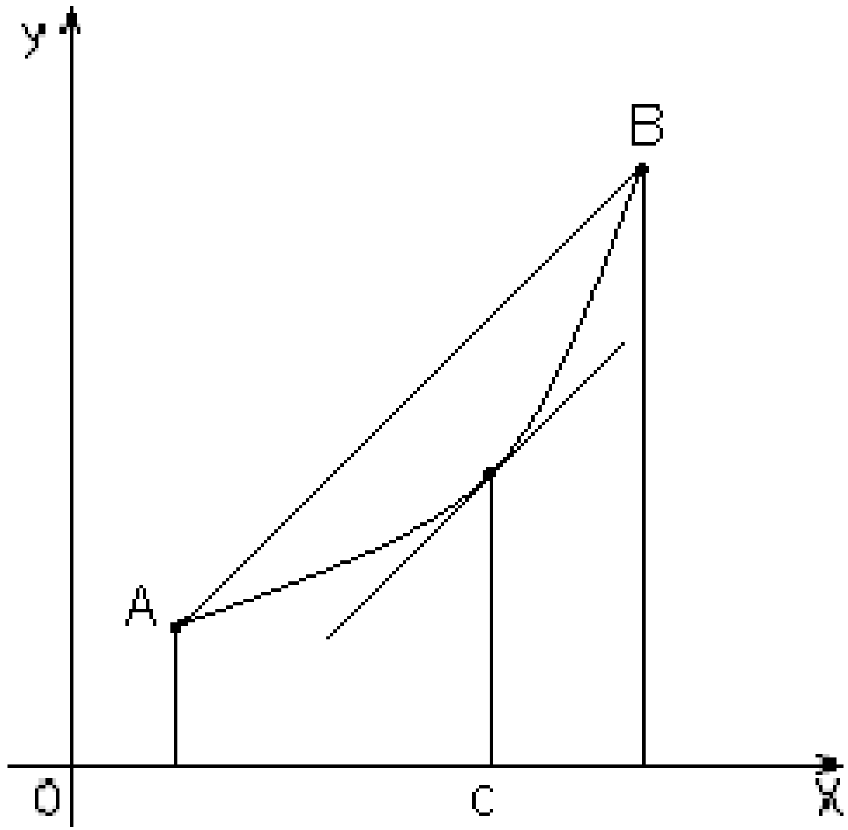


Теорема 1.

Если функция f непрерывна на промежутке I и её производная положительна (соответственно отрицательна) во внутренних точках этого промежутка, то функция f возрастает (соответственно убывает) на I.



Доказательство



Пусть x_1 и x_2 – точки промежутка I, причем $x_1 < x_2$, и пусть $f'(x_0)>0$ внутри I. По теореме Лагранжа имеем :

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0$,

т.к. $x_2-x_1> 0$(по условию), и $f'(c)>0$, поскольку $c\in(x_1;x_2)$, и потому с внутри I.

Так что $f(x_1)< f(x_2)$, т.е.

функция возрастает на I.

Теорема 1 (усиление)

Если функция f непрерывна на промежутке I, а её производная неотрицательна (соответственно неполо - жительна) внутри I и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция f возрастает (соответственно убывает) на I.

Задание

При каком наибольшем целом значении m функция

$$f(x) = -x^3 + {}^1/_2 m x^2 - 5x + 2,$$

убывает на всей числовой прямой ?

Решение

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = -3x^2 + mx - 5,$$

$$f'(x) = 0,$$

$$-3x^2 + mx - 5 = 0,$$

$$D = m^2 - 4 \times (-3) \times (-5) = m^2 - 60,$$

$$D \le 0,\ m^2 - 60 \le 0,$$

Но $m \in Z \Rightarrow m_{max} = 7$ (7 =).

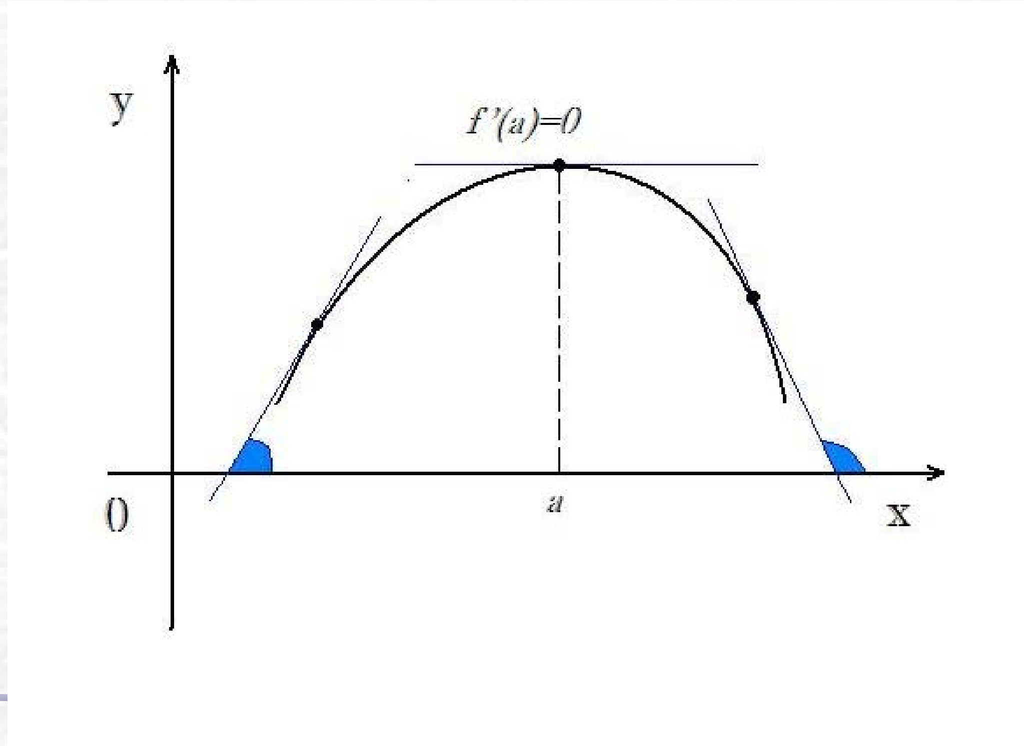
Ответ: $m_{max} = 7$.

Достаточные условия экстремума функции

Признак 1 (достаточное условие экстремума функции)

Пусть f(x) определена и непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема на промежутке (a;b), и f `(c)=0, где

c $\in$ (a;b). Тогда, если при переходе через точку x=c, производная меняет знак с + на - (с - на +), то x=c – точка максимума (точка минимума) и функция f(x) принимает в точке x=c наибольшее (наименьшее) значение.



Признак 2

Если точка x=c точка подозрительная на экстремум, то есть первая производная в этой точке равна нулю, тогда если

а) f ``(c)<0, значит x=c - точка максимума;

б) f ``(c)>0, значит x=c - точка минимума;

в) f ``(c)=0, воспользуемся Признаком 1.

Задача 1.

Дано: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x;$

Исследовать на экстремум с помощью второй производной.

Решение:

D(y)=R;

1) $y' = x^2 - 5x + 6;$ D(y`)=R;

2) Приравниваем производную к нулю.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$ - Критические точки.

3) $y'' = 2x - 5;$

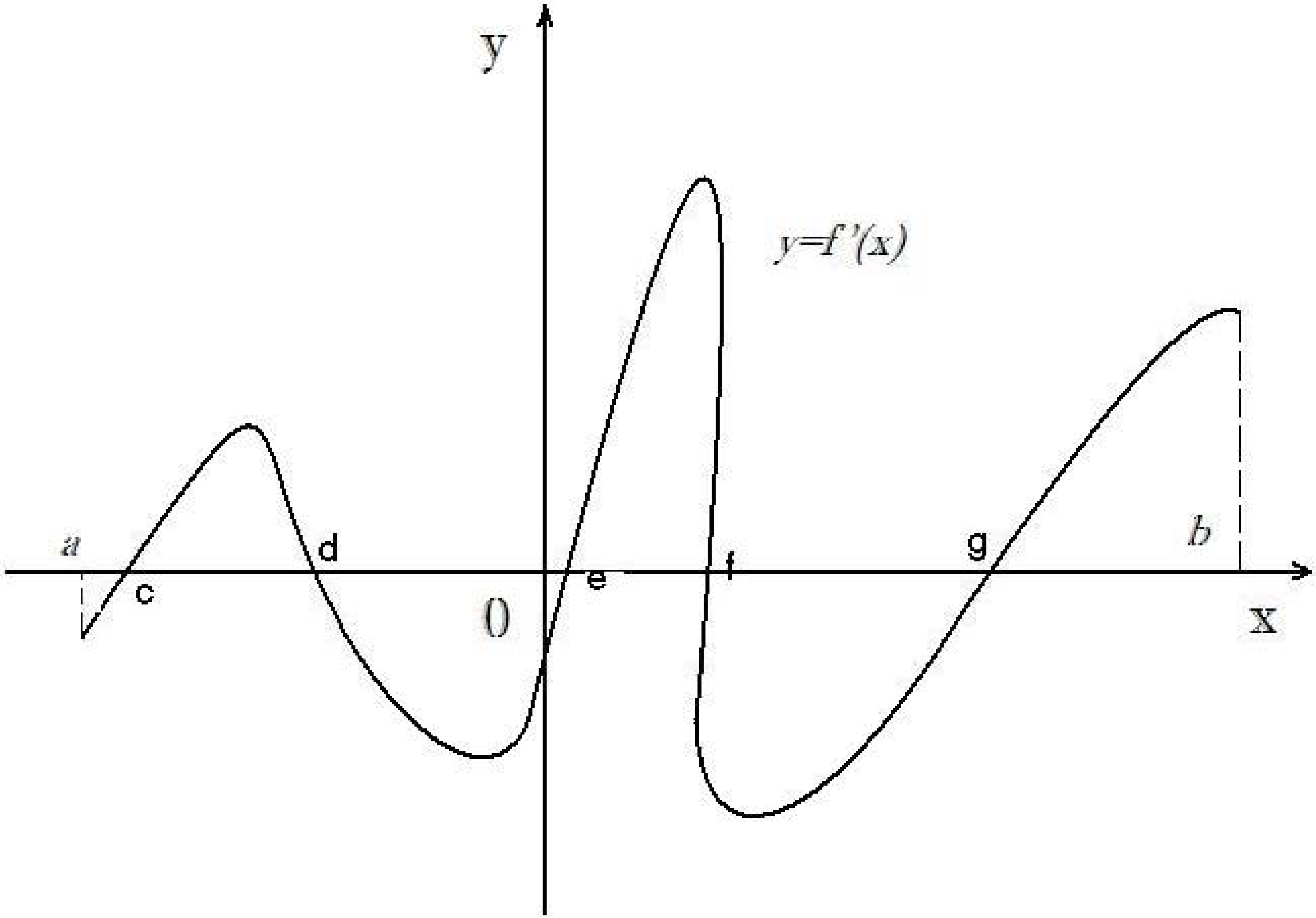
4) Так как $y''(2) = 2*2 - 5 = -1 < 0 \Rightarrow x_1 = 2$ - точка максимума

$y_{max} = 3/4$

а так как $y''(3) = 2*3 - 5 = 1 > 0 \Rightarrow \quad x_2 = 3$ точка минимума

$y_{min} = 9/2$

Ответ: $y_{max} = 3/4$; $y_{min} = 9/2$

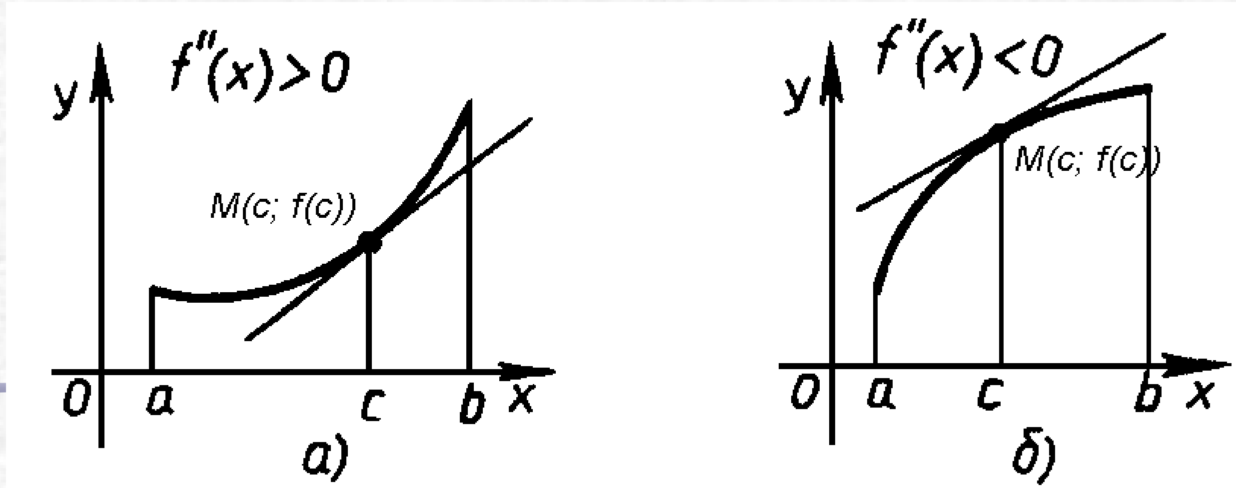

y
y=f'(x)
a
c
d
0
e
f
g
b
x

2 ЧАСТЬ

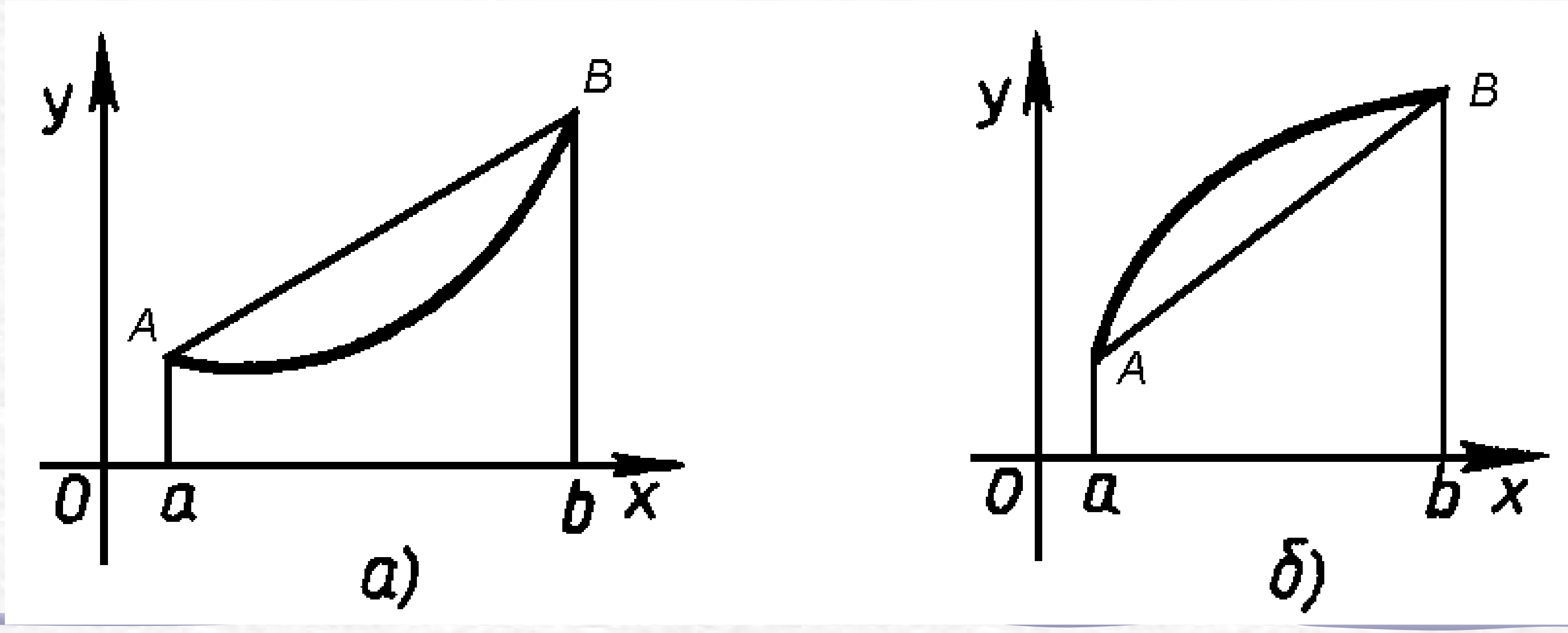
Исследование графиков на выпуклость, точки перегиба

Исследование графиков функций на выпуклость

- Теорема 1. пусть на отрезке [a; b] функция f непрерывна и внутри этого отрезка $f''(x)>0$ (соответственно $f''(x)<0$). Тогда график функции f обращен выпуклостью вниз (соответственно вверх).

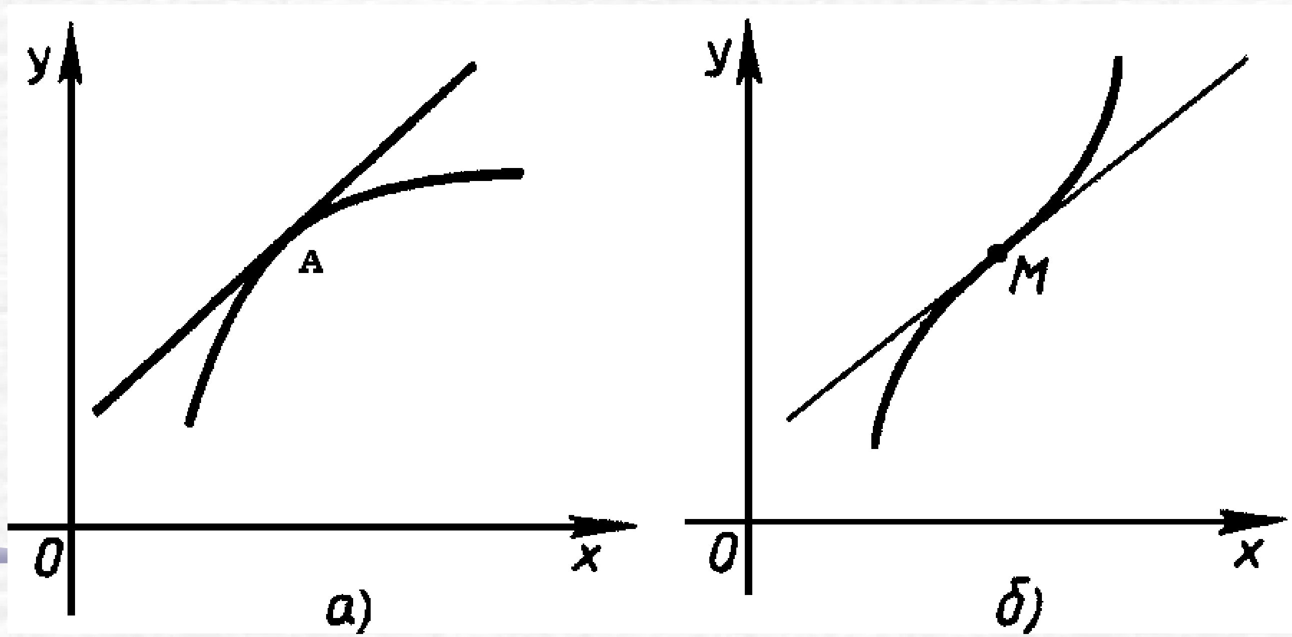


Теорема 2. Если график функции f обращен на отрезке [a; b] выпуклостью вниз (соответственно вверх), то внутри отрезка [a; b] этот график расположен под (соответственно над) хордой AB, где A(a; f(a)), B(b; f(b)).



Точки перегиба.

- Определение. Точка М некоторой кривой называется точкой перегиба, если кривая расположена по разные стороны от касательной в этой точке.

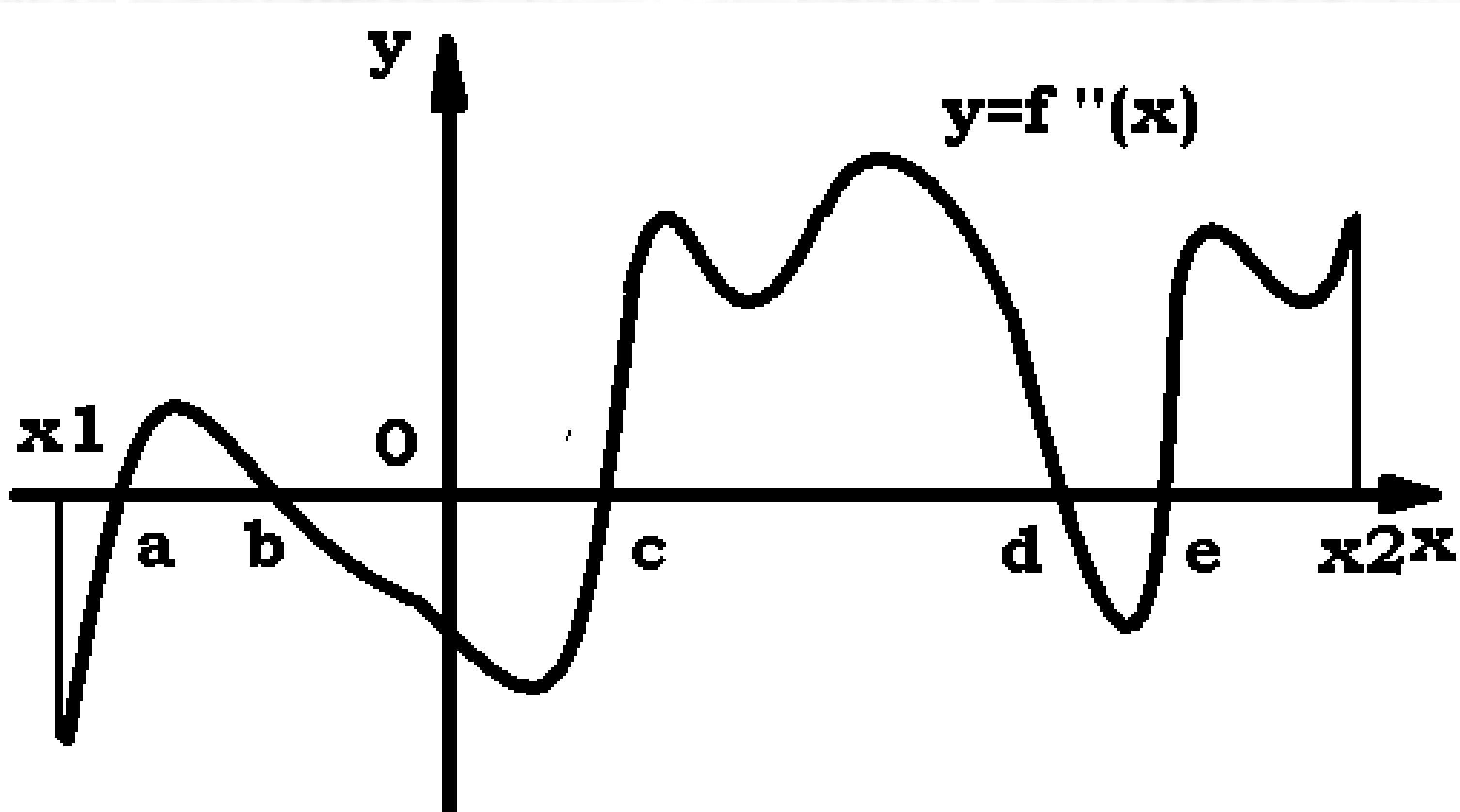


- **Теорема 1.** Если в точке c вторая производная функции f непрерывна и отлична от нуля, то M(c; f(c)) не является точкой перегиба графика функции f.
- Следствие. Для того чтобы график функции f имел перегиб в точке M(c; f(c)), необходимо:

1. Вторая производная обращалась в нуль в этой точке c,
2. Точка c – точка разрыва для f’’,
3. f’’ не существует в точке c.

- **Теорема 2.** пусть функция f имеет вторую производную в проколотой окрестности радиуса h точки c и дифференцируема в этой точке. Если при переходе через точку c вторая производная функции f меняет знак, то M(c; f(c)) является точкой перегиба графика функции f.

- Указать сколько точек перегиба имеет график функции y=f(x).
Назвать промежутки , в которых график функции обращён выпуклостью вверх.
Сколько промежутков , в которых график функции обращен выпуклостью вниз.

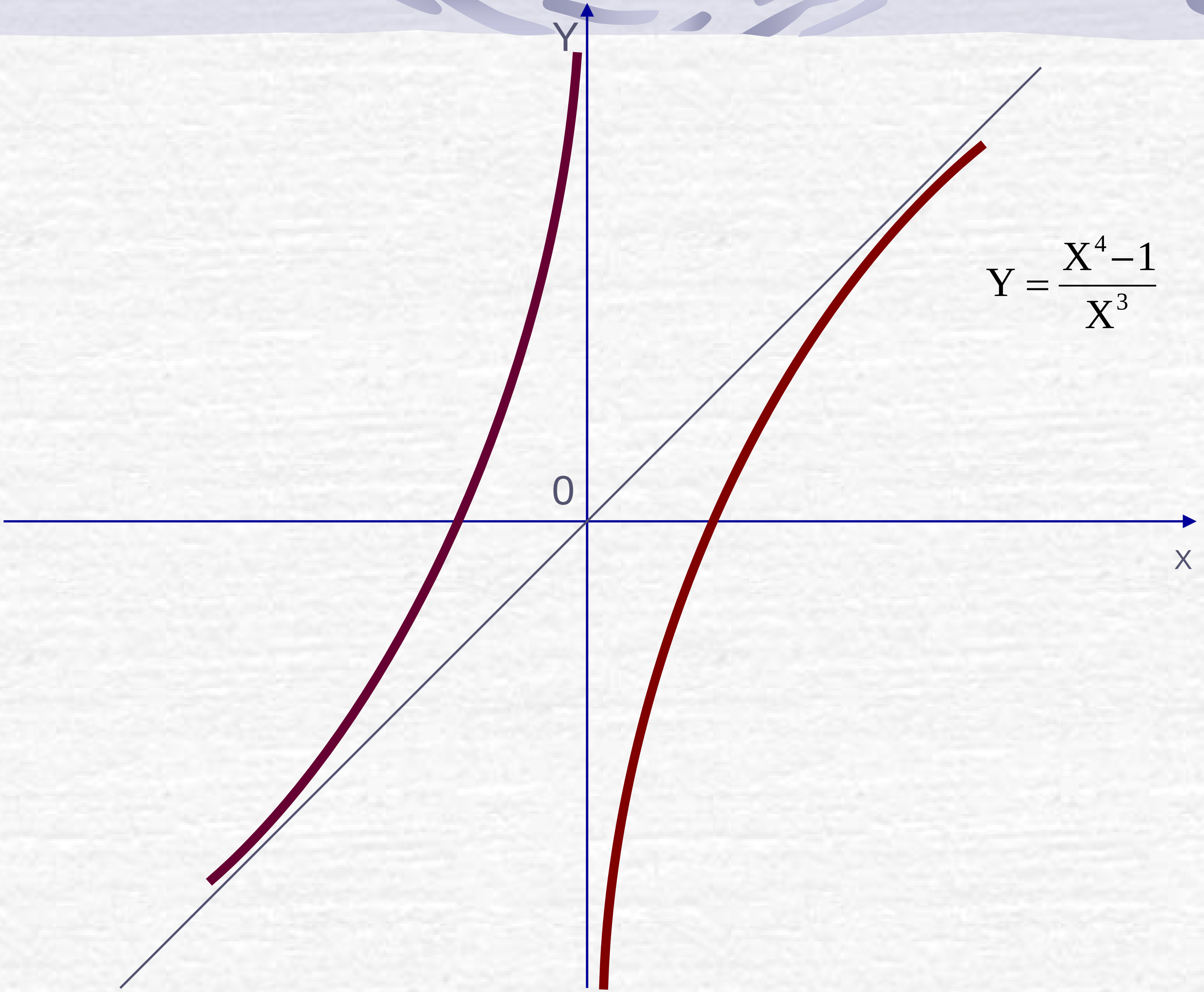


2 ЧАСТЬ

Построение графиков функций

Алгоритм

1. Найти область определения функции f(x).
2. Исследовать функцию на четность или нечетность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осью абсцисс (для этого решают уравнение f(x)).
4. Найти точки разрыва функции.
5. Точки, найденные в п.3 и 4 разбивают ось абсцисс на несколько промежутков – это промежутки знакопостоянства функции f(x), найти знак на каждом из этих промежутков.
6. Изучить поведение функции около точек разрыва и на бесконечности и найти её асимптоты.
7. Исследовать функцию на возрастание и убывание.
8. Найти точки максимума и минимума функции.
9. Исследовать график на выпуклость и найти точки перегиба.
10. Учитывая исследования, построить график.


Y
0
X
$Y = \dfrac{X^4 - 1}{X^3}$

ТЕСТ 2

I ВАРИАНТ

1) 1.Д

   2.Г

2) Г

3) 1)А

   2)Б

4) Г

II ВАРИАНТ

1) 1.В

   2.Б

2) Б

3) 1.В

   2.Б

4) Б