**Формирование познавательных способностей на основе овладения методами решения иррациональных уравнений при личностно-ориентированном развивающем обучении**

[Смышляева Наталья Петровна](http://festival.1september.ru/authors/101-908-611/), учитель математики

Важнейшим видом учебной деятельности в школе, в процессе которой усваивается содержание математического образования, является решение уравнений. Основные методы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций. Методы решения иррациональных уравнений подразделяются на стандартные (возведение в степень, использование свойств функций) и нестандартные (применение других разделов математики). Рассмотрим некоторые методы решения иррациональных уравнений.

***Метод, основанный на применении области определения иррационального выражения***

*Пример 1.* Решите уравнение  = - 8.

Решение. Рассмотрим функцию f(х) = . По определению арифметического квадратного корня, её значения неотрицательны. Следовательно, равенство f(х) = - 8 невозможно ни при каких значениях х. Значит, уравнение не имеет корней.

Ответ: Ø.

*Пример 2.* Решите уравнение  -  = 

Решение. Найдем область допустимых значений переменной. Для этого решим систему неравенств

 Откуда, х = 3

Область допустимых значений этого уравнения состоит из одного числа. Проверка показывает, что оно является решением исходного уравнения.

Ответ: 3.

***Метод, основанный на использовании ограниченности функций***

*Пример 3.* Решите уравнение  + = 0

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух функций, каждая из которых принимает неотрицательные значения. Значит, равенство возможно, только если обе эти функции равны нулю одновременно. Таких значений х нет, следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: Ø.

***Метод, основанный на использовании монотонности функций***

*Пример 4.* Решите уравнение  +  + = 9

Решение. Рассмотрим функцию f(х) = +  +. Она возрастает на промежутке [0;∞), как сумма трех возрастающих функций. Значит, каждое свое значение принимает ровно один раз. Подбором находим, что х = 4 корень уравнения, и он единственный в силу монотонности функции.

Ответ: 4.

***Тригонометрическая подстановка***

При решении некоторых иррациональных уравнений применяют тригонометрическую подстановку, суть которой состоит в замене неизвестной переменной х тригонометрической функцией, например, х = cos ω или х = tg ω. При использовании данного метода решение исходного уравнения сводится к решению тригонометрического уравнения. Следует отметить, что тригонометрическое уравнение имеет, как правило, бесконечное множество решений, а исходное уравнение – конечное их число.

*Пример 5.* Решите уравнение

х +  = (2 - 1).

Решение. Так как областью допустимых значений уравнения являются

- 1 ≤ х ≤ 1, то можно сделать замену х = cos ω, где

0 ≤ ω ≤ π.

 + = (2 - 1) (\*)

Поскольку 0 ≤ ω ≤ π , то  ≥ 0 и  = . В этой связи из (\*) получаем

 + =  ,

 + = ( +)( - ),

( +)( +  - 1) = 0.

Пусть  + = 0, тогда tg ω = -1 и ω = -  + π*n,* где *n* – целое число. Однако, 0 ≤ ω ≤ π , поэтому ω1 =  .

Пусть ( +  - 1) = 0. Тогда

 -   = - ,

 -   = - ,

 = - ,

ω -  = (-1)k + 1  + πk и тогда получаем

ω =  + (-1)k + 1  + πk , где *k*  – целое число.

Однако, 0 ≤ ω ≤ π , поэтому ω2 =  . Но х = cos ω, следовательно, х1= cos  = -  ,

х2 = cos.

Ответ: -  , cos.

***Метод выделения полного квадрата***

*Пример 6.* Решите уравнение

 +  = 7

Решение. Попробуем отметить какие – либо особенности заданного уравнения, которые могли бы указать путь к решению. Такие особенности есть, а именно:



Найдем ОДЗ исходного уравнения



Решая первые два неравенства



получаем, что х принадлежит отрезку



На промежутке [-1;4] третье и четвертое неравенства системы истинны.

Значит, ОДЗ х ∈ [-1;4].

Перепишем заданное уравнение так:2+ 2= 7

Откуда |  | + | | = 7 ,

но  и , поэтому получаем:

 +  = 7

или:  = 3 - 

В ОДЗ правая часть неравенства всегда положительна, поэтому возведем в квадрат обе части неравенства  = 6 – х

решения этого уравнения х = 0, х = 3. Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: 0; 3.

***Метод функциональных уравнений.*** Уравнения вида

 = x (1) или f(g(x)) = f(h(x)), (2)

*п* раз

где f(x), g(x), h(x) -некоторые функции и *п ≥* 2.

называются функциональными уравнениями.

Методы решения уравнений (1) и (2) основаны на четырех следующих утверждениях.

**Утверждение 1.** Если f(x) - строго монотонная функция на отрезке [*а;в*], то уравнение (1) равносильно уравнению f(x) = x для х, принадлежащих отрезку [*а;в*].

**Утверждение 2.** Если f(x) - строго монотонная функция, то уравнение (2) равносильно уравнению g(x) = h(x) на области допустимых значений уравнения (2).

**Утверждение 3.** Если f(x) - строго монотонная функция и при этом является четной, то уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений g(x) = h(x) и g(x) = - h(x) на области допустимых значений уравнения (2).

**Утверждение 4.** Если функция f(x) нечетная, то решение уравнения f(g(x)) + f(h(x)) = 0 сводится к решению уравнения f(g(x)) = f(-h(x)).

Анализ функции у = f(x) на строгую монотонность можно осуществлять с помощью производной, т.е. если f`(x) > 0 (f`(x) < 0) на отрезке [*а;в*], то функция у = f(x) является строго возрастающей (убывающей) для х, принадлежащих отрезку [*а;в*].

*Пример 7.* Решите уравнение

х =  , (\*)

где квадратный корень берется *п* раз (*п ≥* 1).

Решение. Из условия задачи следует, что х > 0. Пусть f(x) = , тогда уравнение (\*) примет вид  = х (\*\*).

*п* раз

Поскольку f`(x) =   0 при х > 0, то уравнение (\*\*) равносильно уравнению

f(x) = х, т.е.  = х, положительным корнем которого является 

Ответ:  .

***Метод введения векторов, использование неравенства треугольника при решении иррациональных уравнений***

Применение векторов для решения различных уравнений и неравенств в общеобразовательной школе практически не рассматривается. Однако освоение этого метода имеет большое значение, т.к. позволяет показать взаимосвязь тем при изучении математики, а при итоговом повторении перейти к теории развития числа.

Вектор  в трехмерном пространстве характеризуется тремя координатами (а1,а2,а3) и модуль (длина) вектора вычисляется по формуле ||=(а12+а22+а32)1/2

Суммой (разностью) двух векторов (а1,а2,а3) и (в1,в2,в3) называется вектор (с1,с2,с3), координаты которого вычисляются как суммы (разности) соответствующих координат векторов  и .

Скалярным произведением векторов  и  называют

 = а1 в1 + а2 в2 + а3 в3 ,

Но с другой стороны, = || .

Два отличных от нуля вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. Верно и обратное утверждение: если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарные.

Для векторов (а1,а2,а3) и (в1,в2,в3) имеет место неравенство

||+|| ≥ ||,

т.е. (а12+а22+а32)1/2 + (в12+в22+в32)1/2 ≥ (а1 ± в1)2+(а2 ±в2)2+(а3 ± в3)2)1/2 .

Данная формула обобщается на случай векторов, заданных в *п*-мерном пространстве, а также на случай суммы (или разности) более двух векторов. Геометрический смысл формулы состоит в том, что длина ломанной линии, соединяющей две точки в пространстве, больше или равна длине отрезка прямой, проведенной между этими точками. Следует особо помнить, что равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы  и  коллинеарные. В частности, из равенства в формуле следует, что

 =  = .

Иначе эту формулу называют неравенством треугольника [16].

Рассмотрим пример, в котором при решении иррационального уравнения применяется понятие вектора.

*Пример 8.* Решите уравнение

 (1)

Решение. Перепишем уравнение (1) в виде:

 = 2+(х+2) (2)

Введем векторы (;1) и (х+2;2).

Найдем их модули

 = ,  =  , а косинус угла между векторами  и 

равен:

 = 

 ,

но согласно уравнению (2), числитель и знаменатель дроби равны, следовательно,  = 1, откуда делаем вывод, что векторы  и  коллинеарные, а их соответствующие координаты пропорциональны

= , = ,

по свойству пропорции, при условии х ≠ -2, получаем 2 = х + 2,

Остается решить, используя метод возведения в соответствующую степень, х=±4.

Проверкой устанавливаем, что х = -4 – посторонний корень.

Ответ: 4 .

***Метод решения симметрических систем***

К симметрическим системам относятся системы вида

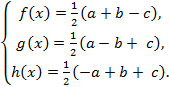


(1) и (2)

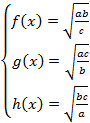
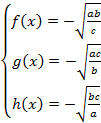
В ряде случаев в симметрических системах слагаемые или множители представлены в виде иррациональных выражений. Метод решения системы (1) состоит в сложении левых и правых частей уравнения. Тогда

(+,

затем из полученного уравнения поочередно вычитаются третье, второе и первое уравнения системы (1), в результате чего получаем систему

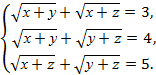


При решении системы (2) необходимо перемножить левые и правые части уравнений, получим и .

Здесь необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие  Если затем полученное уравнение поочередно на третье, второе, первое уравнения системы (2), то получаем две системы уравнений относительно  вида  и 

Следует отметить, что данный метод обобщается на случай произвольного числа уравнений, содержащихся в симметрических системах.

*Пример 9.*Решите систему уравнений

 (\*)

Решение.После сложения уравнений системы (\*) получаем Если из полученного уравнения поочередно вычесть уравнения системы (\*), то получаем систему уравнений

  Отсюда следует х + у +  = 7 и 

Ответ: (-2; 3; 6).

При изучении различных методов решения иррациональных уравнений происходит активное участие ученика в образовательной деятельности, обеспечивающее возможность самообразования, саморазвития в ходе овладения знаниями.

Использованная литература:

1. Марчевская Е.В, Марчевский И.К. Элементарная алгебра. Методы решения уравнений и неравенств: Учебное пособие. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007 г.
2. Супрун В.Н. Нестандартные методы решения задач по математике: - Минск: Полымя, 2000г.