«Теоретико-множественные отношения между случайными событиями Диаграммы Эйлера»

Выполнила Жирнова Лариса Георгиевна учитель математики ГБОУ СОШ с. Мусорка

***«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»*** (основатель теории множеств – Георг Кантор).

(*КАНТОР (Cantor) Георг (1845—1918) — немецкий математик, логик, теолог, создатель теории трансфинитных (бесконечных) множеств, оказавшей определяющее влияние на развитие математических наук на рубеже 19— 20 вв.)*

И хотя это высказывание учёного не является в полном смысле логическим определением понятия множества, но оно верно поясняет, что когда говорят о множестве, то имеют в виду некоторое собрание объектов, причём само это собрание рассматривается как единое целое, как один (новый) объект.

Объекты, составляющие данное множество, называют его элементами. Множество - одно из основных понятий современной математики, используемое почти во всех её разделах. Оно не сводится к другим, более простым понятиям. Поэтому его нельзя определить, а можно лишь пояснить, указывая синонимы слова «множество» и приводя примеры множеств: множество – набор, совокупность, собрание каких-либо объектов (элементов), обладающих общим для всех их характеристическим свойством. Разумеется, можно сказать, что множество – это «совокупность», «собрание», «ансамбль», «коллекция», «семейство», «система», «класс» и т. д. однако всё это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Например, множество дней недели состоит из элементов: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье.

Множество месяцев – из элементов: январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь.

Множество арифметических действий - из элементов: сложение, вычитание, умножение, деление.

Например, если А означает множество всех натуральных чисел, то 6 принадлежит к А, а 3 не принадлежит к А.

Если А - множество всех месяцев в году, то май принадлежит к А, а среда не принадлежит к А.

Если множество содержит конечное число элементов, то его называют конечным, а если в нем бесконечно много элементов, то бесконечным. Так множество деревьев в лесу конечно, а множество точек на окружности бесконечно.

Пустым называется множество, не содержащее ни одного элемента

Для того чтобы определить какое – либо понятие, нужно, прежде всего, указать, частным случаем какого более общего понятия, оно является, для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Часто приходится говорить о нескольких вещах, объединенных некоторым признаком. Так, можно говорить о множестве всех стульев в комнате, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех картофелин в данном мешке, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех квадратов на плоскости, о множестве всех точек на данной окружности т. д.

Множество обычно обозначают большими латинскими буквами, а элементы множества − малыми латинскими буквам. Если элемент, а принадлежит множеству А, то пишут: а Множества. Операции над множествамиА, а если а не принадлежит А, то пишут: а Множества. Операции над множествамиА.Например, пусть N–множество натуральных чисел. Тогда 5Множества. Операции над множествамиN , но Множества. Операции над множествамиМножества. Операции над множествамиN, Множества. Операции над множествамиМножества. Операции над множествамиN. Если А - множество корней уравнения х2-5х+6=0, то 3 Множества. Операции над множествами А, а 4Множества. Операции над множествамиА.

В математике часто исследуются так называемые числовые множества, т.е. множества, элементами которых являются числа. Для самых основных числовых множеств утвердились следующие обозначения:

N- множество всех натуральных чисел;

Z- множество всех целых чисел;

Q- множество всех рациональных чисел;

R- множество всех действительных чисел.

Приняты также обозначения Z+ , Q+, R+ соответственно для множеств всех неотрицательных целых, рациональных и действительных чисел, и ZЇ, QЇ, RЇ -для множеств всех отрицательных целых, рациональных и действительных чисел.

Множество А считается заданным, если относительно любого объекта а можно установить, принадлежит этот объект множеству А или не принадлежит; другими словами, если можно определить, является ли а элементом множества А или не является. Существуют два основных способа задания множества:

перечисление элементов множества;

указание характеристического свойства элементов множества, т.е. такого свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они.

Первым способом особенно часто задаются конечные множества. Например, множество студентов учебной группы задаётся их списком. Множество, состоящее из элементов a, b, c, … ,d ,обозначают с помощью фигурных скобок: А={a; b; c; …;d} . Множество корней уравнения х2-5х+6=0 состоит из двух чисел 2 и 3: А={2; 3}. Множество В целых решений неравенства -2 < х < 3 состоит из чисел –1, 0, 1, 2, поэтому В={–1; 0; 1; 2}.

Второй способ задания множества является более универсальным. Множество элементов х, обладающих данным характеристическим свойством Р(х), также записывают с помощью фигурных скобок: Х={х | Р (х)}, и читают: множество Х состоит из элементов х, таких, что выполняется свойство Р(х). Например, А={х | х2-5х+6=0}. Решив уравнение х2-5х+6=0, мы можем записать множество А первым способом: А={2; 3}.

Другой пример: Х={х | -1 ≤ х < 4, х Множества. Операции над множествами Z}, т.е. Х есть множество целых чисел х, таких, что –1 ≤ х < 4, значит, по-другому: Х={-1; 0; 1; 2; 3}.

Рассмотрим и такой пример: F={f | │fґ(x)│≤ 1 , 1 < x < 2}, т.е. F- множество функций f, производная которых в интервале (1; 2) не превосходит по абсолютной величине числа 1.

Может случиться, что характеристическим свойством, определяющим множество А, не обладает ни один объект. Тогда говорят, что множество А - пустое (не содержит ни одного элемента) и пишут: А= Ш.

Например, А={х | хІ+9=0, хМножества. Операции над множествамиR} –множество действительных чисел х, таких, что хІ+9=0- пустое множество, т.к. таких действительных чисел нет.

**Парадокс в логике** — это противоречие, имеющее статус логически корректного вывода и, вместе с тем, представляющее собой рассуждение, приводящее к взаимно исключающим заключениям.

Как уже упоминалось, понятие множества лежит в основе математики. Используя простейшие множества и различные математические конструкции, можно построить практически любой математический объект. Идею построения всей математики на основе теории множеств активно пропагандировал Г.Кантор. Однако, при всей своей простоте, понятие множества таит в себе опасность появления противоречий или, как ещё говорят, парадоксов. Появление парадоксов связано с тем, что далеко не всякие конструкции и не всякие множества можно рассматривать.

Самый простой из парадоксов - это "**парадокс брадобрея**".

Одному солдату было приказано брить тех и только тех солдат его взвода, которые сами себя не бреют. Неисполнение приказа в армии, как известно, тягчайшее преступление. Однако возник вопрос, брить ли этому солдату самого себя. Если он побреется, то его следует отнести к множеству солдат, которые сами себя бреют, а таких брить он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то попадёт во множество солдат, которые сами себя не бреют, а таких солдат согласно приказу он обязан брить. **Парадокс.**

**Теоретико-множественная трактовка основных понятий и аксиоматическое построение теории вероятности.**

Теория вероятности есть математическая наука, изучающая закономерность в случайных явлениях.

Случайное явление – явление, которое при  неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает несколько по-иному.

Ех. Стрельба из орудия, игральная кость

Величины,  которые  могут  принимать различные значения в зависимости от внешних по отношению к ним  условий, принято называть ***случайными****(стохастичными*по природе). Дискретные, непрерывные СВ.

Определения:

В природе, да и в обыденной жизни часто приходится иметь дело с явлениями случайными, т.е. с ситуациями, исход которых нельзя точно предвидеть. Вы покупаете лотерейный билет - можете выиграть, а можете и не выиграть; на выборах может победить один кандидат, а может и другой.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти.

События бывают: равновозможными (равновероятными); маловероятными; более вероятными; достоверными; невозможными.

Определите вид следующих событий:

1. Выпадение «орла» или «решки» при подбрасывании монеты.

2. Зашли в темную комнату, включили свет, загорелась лампочка.

3. Если опрокинуть стакан с водой, вода выльется.

4. В жаркий летний день пошел снег.

Важно знать, можно ли найти закономерности в мире случайного? Можно ли какими-либо способами оценить шансы наступления интересующего нас случайного события? Ответ на эти вопросы дает наука, которая так и называется - теория вероятностей. Это наука о вычислении вероятностей случайных событий.

Практическая часть.

Сейчас мы с вами проведем некоторые испытания.

1-й ряд: ученики подбрасывают по 25 раз спичечный коробок (таб. 2).

2-й ряд: по 25 раз подбрасывают монету (таблица 3). 3-й ряд: по 25 раз - игральный кубик (таблица 4).

Дается формула для подсчета частоты

Частота =Число появления событий/Число экспериментов

Подсчитываем частоту наступления вышеперечисленных событий. На доске заполняется таблица 5.

По частоте события определяют вероятность случайного события. Чем больше испытаний, тем точнее определяется вероятность.

Вероятность события обозначается большой латинской буквой P (от французского probabilite, что в переводе - возможность, вероятность).

Например, P(A) =0,5(вероятность выпадения «орла»).

В XVII в. Эксперименты с монетой проводил француз Жорж Луи де Бюффон, у которого «орел» выпал 2048 раз при 4040 испытаниях.

2048/4040=0,51

В начале XX в. Английский математик Карл Пирсон провел 24000 экспериментов. «Орел» выпал 12012 раз. 12012/24000 0,50 P(A)= 50%.

Задача 3. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Какие из следующих событий невозможные, какие - случайные, а какие - достоверные:

А = {все вынутые шары одного цвета};

В = {все вынутые шары разных цветов};

С = {среди вынутых шаров есть шары разных цветов};

D = {среди вынутых есть шары всех трех цветов}.

Решение:

Событие А - невозможное: нельзя вынуть из коробки четыре шара одного цвета, так как в ней только по три шара каждого цвета.

Событие В - тоже невозможное: шары в коробке трех цветов, а вынимаем четыре.

Событие С - достоверное: ведь все четыре шара, как мы уже выяснили не могут быть одного цвета, поэтому среди них обязательно есть шары хотя бы двух цветов.

Событие D - случайное.

Прикладное значение.

Вероятностные оценки широко используются в физике, биологии, социологии, в экономике и политике, в спорте и повседневной жизни человека. Если в прогнозе погоды сообщают, что завтра будет дождь с вероятностью 70%, то это значит, что не обязательно будет дождь, но шансы велики и стоит взять зонтик, выходя из дома. Умение оценивать вероятность наступления событий очень полезно, например, при решении вопроса, стоит ли участвовать в лотерее или вступать в игру.

Мини-сценка.

Руслан предлагает сыграть Саше с ним в игру. Каждый по очереди бросает кубик, на противоположных гранях которого написаны числа 1, 2, 3. Если выпадает нечетное число, то 1 очко получает Руслан; если четное - очко Саше. Выигрывает тот, кто первый наберет 30 очков. Бросают несколько раз.

Саша: Эта игра несправедливая, потому что на 4 гранях написаны нечетные числа, а на 2 - четные.

Частота = 4/6 = 2/3; частота =2/6 = 1/3.

- Руслан, у тебя больше шансов, т.к. вероятность больше.

Рассмотрим другой пример из жизни.

У киоска встречаются Оля и Андрей. Ольга выбирает, какую из 3 видов лотереи купить: «Спортлото», «Поле чудес», «Русское лото».  
Андрей: Что хочешь купить? Книгу какую-нибудь с задачами?  
Оля: Нет, родители разрешили что-нибудь купить. Вот выбираю, билет какой лотереи купить. Возьму «Спортлото».

Андрей: Математик, прежде чем купить билеты той или другой лотереи, подсчитает шансы получить выигрыш. Смотри: 49\*48\*46\*47\*45\*44=10.068.347.520, т.к. порядок нам не важен, то разделим на 6•120=720 и получим 13.983.816 способов зачеркивания. Это твой шанс.

Оля: Ладно, билеты этой лотереи брать не буду, возьму «Поле чудес». Якубович обещает полный ящик денег, если угадаешь победителя в каждой тройке игроков в играх месяца. Это просто.

Андрей: А ты подсчитай, что в течение месяца проходит 4 передачи, в каждой передаче 3 тройки, да еще 4-я из победителей первых 3. Таким образом, надо угадать победителя в 16 тройках. В каждой тройке, естественно, 3 варианта выбрать победителя, а всего 316 вариантов, а это 43.046.721 вариант. Шанс еще меньше.

Оля: Ну а «Русское лото?» Самая популярная лотерея в стране.

Андрей: Да, это надо, чтобы ты закрыла 30 номеров из 90 возможных. Это 19-значное число. За счет того, что в этой игре несколько кругов, то шансы увеличиваются до 56 млн.

Оля: Да, Андрей, и как я до этого раньше не додумалась? Скажи, а как ты так быстро считаешь шансы?

Андрей: Недавно прочитал учебник по теории вероятностей, вот и научился.

Оля: Вот и я такой куплю. Спасибо за совет.

Подведение итогов.

Итак, ребята, сегодня вы познакомились с элементами комбинаторики и теории вероятностей. Вероятность - это ожидаемая частота того, что какое-то событие произойдет.

Определите, глядя на таблицу 1 к какому виду можно отнести каждое из следующих событий:

а) выигрыш 3 млн. в лотерее;

б) камень, брошенный в воду, поплыл по реке;

в) выходишь на улицу, а навстречу идет слон;

г) летом у школьников будут каникулы;

д) на этой неделе выпадет снег.

Задание.

1. Возьмите две пуговицы - «с ножкой» и без нее. Оцените вероятность выпадения на каждую из сторон пуговиц, проведя 100 экспериментов с каждой пуговицей.

2. На 100 батареек попадают 3 бракованные. Какова вероятность купить бракованную батарейку?

Инсценированная задача.

Ребята, представьте, что мы с вами оказались в конце XIX в. на постоялом дворе.

Пассажир ходит, ожидая кучера. Затем появляется кучер и пассажир спрашивает:  
- Не пора ли запрягать?

- Что вы! - ответил кучер. - Еще полчаса до отъезда. За это время я успею 20 раз и запрячь, и отпрячь, и опять запрячь. Нам не впервой…

- А сколько в карету впрягается лошадей?

- Пять.

- Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

- Да минуты 2, не более.

- Ой, ли? - усомнился пассажир. - Пять лошадей запрячь в две минуты… Что-то уж очень скоро!

- И очень просто, - отвечал кучер. - Выведут лошадей в сбруе, постромках с вальками, в вожжах. Остается только накинуть кольца вальков на крюки, приструнить двоих средних лошадей к дышлу, взять вожжи в руки, сесть на козлы и готово… Поезжай!

- Ну, хорошо! - заметил пассажир. - Допустим, что таким образом можно запрячь и отпрячь лошадей хоть 20 раз в полчаса. Но если их придется перепрягать одну на место другой, да еще всех, то уж этого не сделать не только в полчаса, но и в два часа.

- Тоже пустячное дело! - расхвастался кучер. - Разве нам не приходится перепрягать! Да какими угодно способами я их всех перепрягу в час, а то и меньше - одну лошадь на место другой поставил, и готово! Минутное дело!  
- Нет, ты перепряги их не теми способами, которые мне угодны, - сказал пассажир, - а всеми способами, какими только можно перепрячь 5 лошадей, считая на перепряжку одну минуту, как ты хвастаешь.  
Самолюбие кучера было задето.

- Конечно, всех лошадей и всеми способами я перепрягу не более как за час.

- Я дал бы 100 рублей, чтобы посмотреть, как ты сделаешь это за час! - сказал пассажир.

- А я при всей своей бедности заплачу за ваш проезд в карете, если я этого не сделаю, - ответил кучер.

Так и условились.

Итак, ребята, кучер с пассажиром задали нам задачу: «Сколькими способами можно перепрячь пять лошадей?»

Решают сами. 5 \* 4 \* 3 \* 2 \* 1 = 5! = 120 (способов), значит, за один час кучер не успеет справиться с заданием.

**Виды событий**

События несовместны – если появление одного из них исключает появление другого.

События равновозможны – если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным чем другое.

Достоверные  -вероятность =1

Невозможные – вероятность=0

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появиться хотя бы одно из них

**Классическое определение**

Существуют различные определения вероятности: классическое, геометрическое, философское, интуитивное, статистическое, аксиоматическое и пр.

Математическая вероятность – это числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного явления при определенных, могущих повторятся неограниченное количество раз условий.

Представим, что у нас проводится эксперимент с пространством из **n** элементарных исходов, которые **равновероятны**. Элементарные исходы являются **несовместными** событиями поэтому вероятность каждого из них равна 1/n. Допустим, нас интересует событие А, которое наступает только при реализации**благоприятных** элементарных исходов, количество последних**m**(m<n).

***Вероятностью события А***называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

**Р(А)=m/n.**

Здесь предполагается что элементарные исходы n несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Свойства:

1. Вероятность достоверного события =1. (m=n)
2. вероятность невозможного события =0. (m=0)
3. вероятность случайного события есть положительное число, заключенной между 0 и 1.

**0 < P(A) <1**.

Соотношения между случайными событиями.

Пусть в результате проведения эксперимента наступило или не наступило

некоторое случайное событие A. Совокупность ℑ всех случайных событий, связанных с данным экспериментом E, играет основную роль в нашем дальнейшем рассмотрении основ этого курса. Понятие случайного события уже имеет абстрактный характер, так как конкретная природа события не имеет значения. Существенно лишь то, что случайный исход A эксперимента E представляется в виде некоторой совокупности из описаний ω тех элементарных событий, которые могут одновременно наступать (не наступать) с исходом A, и что случайное событие A ⊂ Ω происходит или нет при осуществлении комплекса условий Σ. Поэтому между событиями множества ℑ если и могут существовать соотношения, то только, в первую очередь, логического и теоретико-множественного характера. Если выбранное описание ω некоторого элементарного события {ω} принадлежит случайному событию A, то будем писать ω ∈ A. Запись A ∈ ℑ означает, что случайное событие A принадлежит совокупности ℑ. Противоположные утверждения, состоящие в том, что описание ω элементарного события {ω} не принадлежит случайному событию A и подмножество A не принадлежит семейству ℑ, записываются в следующем виде: ω ∉ A и A ∉ ℑ. Примем следующие определения.

Определение 3. Если A является случайным событием и каждое описание

ω ∈ A принадлежит случайному событию B, то этот факт записывается симво

лической записью A ⊂ B или B ⊃ A. В этом случае будем говорить, что случайное событие A есть часть B или B включает A.

Из определения отношения включения вида A ⊂ B непосредственно сле-

дует, что при каждом осуществлении комплекса условий Σ вместе с событием A обязательно наступает и событие B, т. е. событие A влечет за собой событие B или B следует за A. Однако обратное утверждение может и не иметь место, например, когда существуют элементарные исходы, которые никогда не наступают при проведении эксперимента E, и их описания являются элементами A и не являются элементами B. Можно сказать, что условие A ⊂ B является более жёстким, так как все элементы множества A входят во множество B. Однако если ℑ′ является регулярным и при каждом осуществлении комплекса условий Σ вместе с событием A появляется и событие B, то A ⊂ B.

Определение 4. Если A ⊂ B и A ⊃ B, то мы будем говорить, что события

A и B равносильны, и обозначать это через A = B.

Из определений 5 и 6 следует, что при A = B случайные события A, B со-

стоят из одних и тех же элементов (описаний элементарных исходов). Следовательно, если A = B, то при каждом проведении эксперимента E событие A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A, т. е. события A и B оба наступают или оба не наступают. Обратное утверждение справедливо не всегда.

Проиллюстрируем определения 5 и 6 на следующих простых примерах.

Пример Производится бросание игральной кости. Событие A — по-

явление цифры 2, событие B — появление чётной цифры. Легко видеть, что для этого опыта появление события A влечет за собой появление события B, т. е. A ⊂ B.

Пример Производится шесть выстрелов по мишени. Событие A —

попадание тремя пулями в мишень. Событие B — три промаха при шести вы-

стрелах. При каждом проведении эксперимента E событие A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A. Здесь A ⊂ B и одновременно B ⊂ A, следовательно, A = B.

Определение 5. Два события A и B называются несовместными (попарно

несовместными), если они не содержат общих описаний элементарных исхо-

дов. В противном случае события A и B называются совместными, т. е. они содержат хотя бы одно общее описание ω ∈ Ω.

Если A и B являются несовместными (несовместимыми), то появление

одного из них исключает появление другого (необходимое условие). Обратное утверждение может не выполняться. Можно сказать, что событие, состоящее в одновременном наступлении двух несовместных событий A и B, является невозможным. Разным элементарным исходам соответствует различные описания. Поэтому любые два элементарных события {ωi} и {ωk} являются несовместными при i ≠ k. Значит, появление одного из элементарных исходов исключает появление другого. Этот факт естественно согласуется со второй аксиомой выбора элементарных исходов.

Определение 6. Событие B, которое содержит все такие описания эле-

ментарных исходов из Ω, которые не принадлежат некоторому событию A, называется противоположным по отношению к событию A и обозначается через символ A .

Теоретико-множественные операции над событиями.

Пусть дано произвольное множество {A, B, ...} событий из ℑ. Каждое та-

кое случайное событие из ℑ есть некоторое множество из описаний вида ω. Тогда над случайными событиями A, B, ... можно ввести известные теоретико-множественные операции, например, объединение ( U ), пересечение ( I ), разность (\), симметрическая разность (∆) и т. д.

Определение 7. Объединением случайных событий A и B, обозначаемым

через A U B, называется такое случайное событие C = A U B, которое содержит все описания события A и все те описания события B, которые не входят в A.

Если событие Ai ∈ ℑ при каждом i = 1, 2, …, то их объединение есть такое случайное событие C = U Ai , каждое описание которого принадлежит хотя бы одному из событий A1, A2, …

Следовательно, если C = A1 U A2 U …, то случайное событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит, по крайней мере, одно из случайных событий A1, A2, … Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным.

Определение операции объединения в терминах случайных событий (ис-

ходов эксперимента Е) можно проинтерпретировать в терминах теории мно-

жеств. Например, описание ω ∈ A U B означает или ω ∈ A, или ω ∈ B, другими словами, объединение A U B реализуется известным логическим высказыванием «или». Приведём теперь примеры, в которых используется операция объединения случайных событий.

Пример. В Нижнем Новгороде имеется четыре транспортных моста

через реку Ока. Рассматривается ежедневная возможность переезда наземного транспорта через реку. Обозначим через A1 событие, которое заключается в исправности первого моста; через A2  событие, которое заключается в исправности второго моста; через A3  событие, которое заключается в исправности третьего моста; и, наконец, через A4  событие исправности четвертого моста. Если A есть событие, означающее возможность переезда через реку, то A = A1 U A2 U A3 U A4 = U Ai .

i =1

Определение 8. Пересечением двух случайных событий A и B, обозна-

чаемым через A I B, называется такое случайное событие D = A I B, которое содержит только те описания, которые принадлежат как A, так и B. Если событие Ai ∈ ℑ при каждом i = 1, 2, …, то их пересечение есть такое случайное событие D = I Ai , каждое описание которого принадлежит одновременно всем случайным событиям A1, A2, …

Пусть случайное событие D = I Ai . Отсюда следует, что событие D про-

исходит тогда и только тогда, когда происходят все случайные события A1, A2, одновременно. Обратное утверждение имеет место, если множество элементарных исходов является регулярным.

Определение операции пересечения в терминах случайных событий (ис-

ходов эксперимента Е) можно проинтерпретировать на языке теории множеств.

Например, описание ω ∈ A I B означает ω ∈A и ω ∈ B, другими словами, пересечение A I B реализуется логическим высказыванием «и».

Так как событие, состоящее в одновременном наступлении несовместных

событий A и B, является невозможным, то A I B = ∅. Для различных элемен-

тарных событий {ωi} и {ωk} имеем равенство {ωi} I {ωk} = ∅. Наоборот, совместность событий A и B означает, что пересечение этих событий не является невозможным, т. е. A I B ≠ ∅. Приведём примеры, в которых используется операция пересечения случайных событий.

Пример Узел ЭВМ состоит из трех последовательных элементов.

Производится его испытание (рис. 1.6). Пусть A1 — исправен первый элемент, A2 — исправен второй элемент, A3 — исправен третий элемент, A — исправен узел ЭВМ. Для этого опыта A = A1 I A2 I A3 = I Ai i =1,2,3

Пример Производится три выстрела по мишени. Пусть A1 — попа-

дание в мишень при первом выстреле, A2 — попадание в мишень при втором

выстреле, A3 — попадание в мишень при третьем выстреле, A — ровно три попадания. В этом случае событие A = A1 I A2 I A3 = I Ai . События A1 и A2 совместны, так как попадание в мишень при первом выстреле не исключает по падания в мишень при втором выстреле, т. е. A1 I A2 ≠ ∅. Если B означает

промах по мишени при трёх выстрелах, то A и B являются несовместными

событиями, следовательно, A I B = ∅.

С помощью операций объединения и пересечения можно формализовать

определение 6 для противоположных событий. В самом деле, если случайное

событие A есть совокупность всех тех описаний из Ω, которые не входят в со

вокупность A, то A U A = Ω, A I A = ∅. Имеет место и обратное утверждение,

т. е. если A U B = Ω и A I B = ∅, то события A и B будут противоположными.

Определение 9. Разностью случайных событий A и B называется такое

случайное событие C, которое содержит описания из A и не содержит описа-

ния из B. Разность событий A и B обозначается символом A \ B.

Определение операции разности A \ B событий A и B в терминах случай-

ных событий (исходов эксперимента Е) можно проинтерпретировать в терми-

нах теории множеств. Например, описание ω ∈ A \ B означает ω ∈ A и ω ∉ B.

Так как разность двух множеств A и B содержит только те описания из A, которые не принадлежат B, то выполняются соотношения вида A \ B = A I B . Если C = A \ B, то случайное событие C состоит в том, что A произошло, а B нет. Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным.

Пусть в примере 23 событие A1 означает попадание при первом выстреле. То-

гда в этом примере разность событий A и A1 представляет собой событие A \ A1,

которое заключается в попадании тремя пулями в мишень при шести выстре-

лах и промахе при первом выстреле.

Определение 10 Симметрической разностью случайных событий A и B,

которая обозначается символом A ∆ B, называется случайное событие A ∆ B == A \ B) U (B \ A).

Если C = (A \ B) U (B \ A), то происходит только одно из событий A, B. Обратное утверждение имеет место, если множество ℑ′ элементарных исходов является регулярным. Заметим, что с помощью основных операций объединения, пересечения и разности по аналогии с определением 10 можно определять новые теоретико-множественные операции над случайными событиями. Например, из определения разности случайных событий получаем, что случайное событие Ω \ A содержит описания из Ω и не содержит описания из A. Вспоминая определение противоположных или дополнительных событий, получаем равенство A = Ω \ A.

Определение 11. События A1, A2, ... образуют полную группу несовмес-

тимых событий, если их объединение U Ai равно достоверному событию Ω, и они попарно являются несовместными.

Например, множество случайных элементарных событий образуют пол-

ную группу несовместимых событий. Противоположные события A и A образуют также полную группу несовместных событий. Если случайные события A1, A2, ..., An образуют полную группу ( U Ai = Ω), то в результате осуществления комплекса условий Σ обязательно произойдёт хотя бы одно из них. Обратное утверждение не всегда имеет место.

Рассмотренные теоретико-множественные операции над случайными со-

бытиями из ℑ удовлетворяют следующим основным законам:

• переместительный (коммутативный) закон для объединения и пересе-

чения, т. е. A U B = B U A, A I B = B I A, где A ∈ ℑ, B ∈ ℑ;

• сочетательный (ассоциативный) закон для объединения и пересечения

вида: A U B U C = (A U B) U C = A U (B U C), A I B I C = (A I B) I C = A I (B I C),

где A ∈ ℑ, B ∈ ℑ, C ∈ ℑ;

• законы Де Моргана: A U B = A I B , A I B = A U B , где A, B ∈ ℑ;

• распределительный (дистрибутивный) закон для объединения и пересе-

чения случайных событий A ∈ ℑ, B ∈ ℑ, C ∈ ℑ в двух формах: (A U B) I C =

= (A I C) U (B I C), (A I B) U C = (A U C) I (B U C).

Кроме того, из определения объединения и пересечения событий непо-

средственно вытекает, что A U A = A, A U Ω = Ω, A U ∅ = A, A I A = A, A I ∅ = ∅,

A I Ω = A. Из определения противоположного события получаем, что A = A,

Ω = ∅ , ∅ = Ω.

Все эти равенства доказываются одним и тем же способом. Докажем для

примера равенство A I B = A U B . При этом будет предложен метод, которым

доказывается равенство двух произвольных случайных событий. Итак, пусть

ω ∈ A I B. Тогда последовательно имеем: ω ∈ A и ω ∈ B. Отсюда следует, что

ω ∉ A и ω ∉ B . Значит, ω ∉ A U B . В итоге, описание ω ∈ A U B и, следова-

тельно, A I B ⊂ A U B . Докажем обратное утверждение. Пусть ω ∈ A U B . Тогда ω ∉ A U B . Отсюда получаем, что ω ∉ A и ω ∉ B . Теперь находим ω ∈ A и ω ∈ B и, значит, ω ∈ A I B или A U B ⊂ A I B. И окончательно получаем, что A I B = = A U B . Точно так же можно показать справедливость ранее приведенного равенства A \ B = A I B и основных законов в случае, когда теоретико- множественных операций над событиями берутся в счётном числе. Например,

∞ ∞ ∞ ∞

имеем равенства ( U Ai ) I B = U ( Ai I B), U Ai = I Ai .

i =1 i =1 i =1 i =1

Легко видеть, что закон Де Моргана и соотношение A \ B = A I B позво-

ляют получить все теоретико-множественные операции над случайными событиями с помощью только действий объединения и дополнения. Проиллюстрируем теперь введенные теоретико-множественные операции над случайными

событиями на следующем простом эксперименте.

Пример На прямоугольный участок земли за некоторый фиксиро-

ванный промежуток времени из космоса падает частица. В этом опыте будем

интересоваться исходами, которые заключаются в попадании частицы в некоторые области прямоугольника. Ради простоты естественно предположить, что эти области имеют площадь

Итак, в этом эксперименте достоверное событие, которое означает попа-

дание частицы в прямоугольник, можно представить в виде множества Ω = {ω = (x, y): 0 ≤ x ≤ a , 0 ≤ y ≤ b}. Например, элементарное событие {ω = (x, y)} означает прохождение частицы через точку с абсциссой x и ординатой y, а случайное элементарное событие {ω0 = (x0, y0)} – прохождение частицы через точку с абсциссой x0 и ординатой y0 и т. д. Событие A – попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена вертикально. Событие B – попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена горизонтально. Событие C –попадание частицы в круг с большим диаметром. Событие D – попадание частицы в круг с маленьким диаметром. Тогда событие A U B соответствует попаданию частицы в область прямоугольника, которая получается наложением двух эллипсов без их перемещения. Событие A I B соответствует попаданию частицы в светлую область любого из эллипсов. Событие A \ B соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована вертикальными линиями. Случайное событие B \ A соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными линиями. Случайное событие

A ∆ B = B ∆ A соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными или вертикальными линиями. Случайное событие C соответствует попаданию частицы в прямоугольник и обязательно её непопаданию в большой круг. Заметим, что при наблюдении элементарного события ω0 = (x0, y0)}, например, произойдут события A, B, A U B, A I B, C , D и не произойдут события A \ B , B \ A, A ∆ B. Наконец случайные события A и B являются совместными (A I B ≠ ∅), события A и C – несовместными (A I C = ∅) и случайное событие D ⊂ C.

Наблюдаемые события реального эксперимента и его теоретико-множественная модель

Некоторые события из множества ℑ, которые когда-нибудь наступают

при проведении эксперимента E, по различным причинам могут быть не дос-

тупны или не наблюдаемы для экспериментатора. Поэтому целесообразно вы

делить класс всех наблюдаемых исходов (событий) статистически устойчивого эксперимента.

Определение 12. Любое непустое подмножество множества ℑ всех

случайных допустимых событий, которые связаны с некоторым статистически устойчивым экспериментом Е, будем называть σ-алгеброй, если справедливы следующие ограничения:

∗ введены теоретико-множественные операции над элементами из ;

∗ из A ∈ следует A ∈ ;

∗ из A1 ∈ , A2 ∈ , ... следует U Ai ∈ .

Если последнее ограничение имеет место для конечного числа случайных

событий, то называется алгеброй. Так как множество не является пустым,

то существует A ∈ . Следовательно, A ∈ . Теперь ясно, что A U A = Ω ∈ и

∅ = Ω \ Ω = Ω ∈ . Случайные события из называются наблюдаемыми. По-

этому будем называть множеством наблюдаемых исходов, хотя оно может

содержать исходы, которые никогда не происходят при проведении экспери-

мента E. Более того, оно всегда содержит невозможный исход ∅. Теперь стало окончательно ясно, насколько важно было введение с самого начала в рассмотрение невозможного исхода ∅. Легко показать, что σ-алгебра замкнута относительно остальных теоретико-множественных операций. Прежде всего покажем, что A I B ∈ , A \ B ∈ , А ∆ B ∈ при A ∈ , В ∈ . Действительно, все эти соотношения сразу следуют из представлений вида A I B = A U B , A \ B = A I B , A ∆ B = ( A \ B ) U (B \ A) и последних двух ограничений на . Аналогичным способом доказывается, что σ-алгебра замкнута относительно теоретико-множественных операций, взятых в счетном числе над случайными событиями.

Переход к множеству ⊂ ℑ вызван тем, что не над всеми допустимыми

исходами могут быть введены теоретико-множественные операций и, более

того, не все допустимые исходы эксперимента E могут происходить. Далее, могут существовать события из ℑ, которые когда-нибудь наступают при проведении эксперимента E и не доступны наблюдению для исследователя. Наконец, так как множество всех наблюдаемых исходов статистически устойчивого эксперимента Е является σ-алгеброй, то в результате теоретико-множественных операций над наблюдаемыми исходами мы получаем снова наблюдаемые исходы. Другими словами, мы будем иметь дело только с известными нам наблюдаемыми исходами (объектами).

Таким образом, каждому статистически устойчивому эксперименту Е мы

можем поставить в соответствие некоторую упорядоченную пару (Ω, ), кото-

рая называется его теоретико-множественной моделью. Приведенная ниже

табл. 1.1 позволяет зафиксировать основные понятия и элементы теоретико-

множественной модели эксперимента Е.

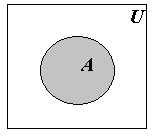
Представим свое видение того, как рационально было бы излагать теорию множеств в средней школе, следуя, в целом, общей логике изложения основ теоретико – множественного подхода в [1].

Под множеством понимается некоторая, вполне определенная совокупность объектов или элементов. Если *a* есть один из объектов множества *А*, мы говорим, что *а* есть ***элемент*** *А*, или *а* ***принадлежит*** *А*. Принадлежность элемента *а* множеству *А* записывается как *а* ∈ *А*. Если *а* не является элементом *А*, это записывается как *а* ∉ *А*.

В тех случаях, когда это возможно, множество может быть задано перечислением всех своих элементов. В общем же случае множество задается указанием ***характеристического свойства***, т. е. свойства, которому удовлетворяют элементы данного множества, и только они. Для задания обычно используются фигурные скобки, а внутри них приводится характеристическое свойство, описывающее множество. Таким образом, множество *A* = {*x*: *x* обладает свойством *P*} предполагается содержащим только те объекты, которые имеют свойство *P.* Например, *A* = {*x*: *x* – футболист, играющий за УрГПУ} – множество, состоящее из всех футбольных игроков, выступающих за УрГПУ.

***Пустое множество***, обозначаемое ∅ или {}, есть множество, которое не содержит элементов. ***Универсальное множество*** *U* есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые в решаемой задаче множества являются его подмножествами.

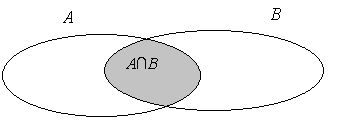
Между множествами могут быть определены отношения, т.е. операции над двумя и более множествами. Для множеств определены операции пересечения, объединения, разности, симметрической разности, декартово произведение. Как мы увидим далее, операции пересечения, объединения, разности симметрической разности находят непосредственное применение при осуществлении поисковой работы с информационными ресурсами.

Одним из наиболее удобных инструментов при работе с небольшим числом множеств являются диаграммы Эйлера – Венна. ***Диаграммы Эйлера - Венна*** - очень удобный инструмент, позволяющий изображать множества и иллюстрировать операции над ними. Множества в диаграммах Эйлера - Венна изображаются внутренними частями кругов (овалов), их пересечениями, объединениями и т.д. Прямоугольник изображает универсальное множество *U*. На рисунке приведена диаграмма Эйлера - Венна для множества *А* ⊂ *U*, которое изображено внутренней частью круга.

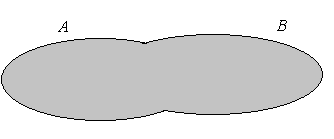
Ниже мы предложим свой подход, содержащий принципиальное решение проблемы. Начнем, однако, с краткого описания традиционной интерпретации.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ: традиционный подход

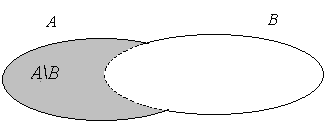
***Пересечением*** двух произвольных множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и *А*, и *В*. Пересечение множеств *А* и *В* обозначается *А* ∩ *В*. Это определение равносильно следующему: *А* ∩ *В* *=* {*x*: *x∈ A* и  *x∈ B*}*.* Например, если *А* *=* {1,2,3,4,5} и *B* *=* {1,3,5,7,9}, тогда *А* ∩ *В* *=* {1,3,5}.



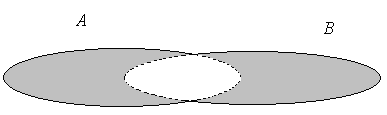
***Объединением*** множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *А* или *В*. Объединение множеств *А* и *В* обозначается *А*∪*В*. Это определение равносильно следующему: *А* ∪ *В* = {*x: x* ∈ *A* и  *x* ∈ *B*}*.* Например, если *А=*{1,2,6,7} и *B=*{2,3,5,6}, тогда *А* ∪ *В* = {1,2,3,5,6,7}*.*

 *А* ∪ *В*

***Разностью множеств*** *A*\*B* (часто пишут также *A*–*В*) называется множество всех тех и только тех элементов *А*, которые не содержатся в *В*. Или, что тоже самое, *A*\*В =* {*x: x* ∈ *A* и *x* ∉ *B*}. Например, если *А =* {1,2,4,6,7} и *B =* {2,3,4,5,6}*,* то *A*\*В =* {1,7}.



***Симметрическая разность*** *A*Δ*B* множеств *А* и *В* есть объединение двух разностей: *A*Δ*B* = (*A*\*В*) ∪ (*B\A*). Например, если *А =* {1,2,4,6,7} и *B =* {2,3,4,5,6}*,* то *A*\*В =* {1,7}*, В\A =* {3,5}*,* и тогда *A*Δ*B* = {1,3,5,7}.

 *A*Δ*B*

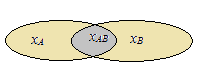
***Декартово произведение*** *A*×*B* множеств *А* и *В* есть множество упорядоченных пар: {(*a, b*): *a* ∈ *A* и *b* ∈ *B*}. Например, если *А =* {1,2,3}, *B =* {*r,s*}, тогда *A*×*B* = {(1*, r*)*,* (1*, s*)*,* (2*, r*)*,* (2*, s*)*,* (3*, r*)*,* (3*, s*)}*.*

Одним из важных понятий в теории множеств является понятие мощности множества. Если множество конечно, то его мощность есть просто количество содержащихся в нем элементов. Пустое множество ∅ есть ***конечное множество мощности* 0*.*** Если существует взаимно однозначное соответствие между множеством *A* и *n*-элементным множеством {1,2,3,…*n*}, то *A* есть ***конечное множество мощности n***. Например, если множество *A* = {*a, p, r, x, z*}, то это множество имеет мощность 5, т.к. существует взаимно однозначное соответствие: {1,2,3,4,5}→{*a, p, r, x, z*}.

На основании введенных определений можно рассматривать более сложные комбинации операций над множествами, в т.ч. и над несколькими множествами. Некоторые из таких комбинаций формулируются в виде «законов алгебры множеств», в частности, законов ассоциативности, дистрибутивности, коммутативности, поглощения и др. Законы алгебры множеств позволяют, в свою очередь, рассматривать еще более сложные комбинации операций над множествами.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ: разложение на классы

Здесь в основе рассмотрения отношений между множествами лежит разложение рассматриваемых множеств на непересекающиеся подмножества-классы, называемое классификацией множеств. Например, в случае двух множеств *A* и *B* имеем: *A* = {*xA*∪ *xAB*}, т. е. множество *А* состоит из подмножеств собственных элементов {x*A*} и подмножества элементов совместных с *B* т.е. {*xAB*}. Ясно, что {*xA*}∩{*xAB*}= ∅. Аналогично, *B* = {*xB* ∪ *xAB*}.



В этом подходе ***пересечение***множеств *А* и *В* есть: *А* ∩ *В* = {*xAB*}.

***Объединение*** множеств *А* и *В* означает: *A* ∪ *B* *=* {*xA* ∪ *xB* ∪ *xAB*}.

***Разность множеств*** *A*\*В* равна: *A*\*В* *=* {*xA*}; *В* \ *A =* {*xB*}.

***Симметрическая разность*** *A*Δ*B* множеств *А* и *В* есть: *A*Δ*B* *=* {*xA* ∪ *xB*}.

Если конечное множество разложено на непересекающиеся классы, то число его элементов (мощность множества) есть простая сумма чисел элементов по всем классам. Сказанное имеет своим прямым отражением известный комбинаторный принцип сложения.

Предложенный нами подход, основанный на разложении множеств на непересекающиеся подмножества-классы, в полном объеме делает решение наглядным и ясным. В качестве примера вернемся к рассмотрению задачи №57.

**Задача** Докажите: (*A* ∩ *C*) ∪ (*B* ∩ *D*) ⊂ (*A* ∪ *B*) ∩ (*C* ∪ *D*).

Доказательство:

Разложим множества на классы непересекающихся подмножеств:

*A* = {*xA* ∪ *xAB* ∪ *xAC* ∪ *xAD* ∪ *xABC* ∪ *xABD* ∪ *xACD*∪ *xABCD*};

*B* = {*xB* ∪ *xAB* ∪ *xBC* ∪ *xBD* ∪ *xABC* ∪ *xABD* ∪ *xBCD*∪ *xABCD*};

*C* = {*xC* ∪ *xAC* ∪ *xBC* ∪ *xCD* ∪ *xABC* ∪ *xACD* ∪*xBCD* ∪ *xABCD*};

*D* = {*xD* ∪ *xAD* ∪ *xBD* ∪ *xCD* ∪ *xABD* ∪ *xACD* ∪ *xBCD*∪ *xABCD*}.

Установим структуру левой и правой частей предполагаемого включения. Если окажется, что список элементов правой части содержит дополнительные элементы по сравнению с левой частью – утверждение доказано.

(*A* ∩ *C*) ∪ (*B* ∩ *D*) =

={*xAC* ∪ *xABC* ∪ *xACD* ∪ *xABCD*} ∪ {*xBD* ∪ *xABD* ∪ *xBCD*∪ *xABCD*} =

= {***xAC*** ∪ ***xBD***∪ ***xABC***∪ ***xABD*** ∪ ***xACD*** ∪ ***xBCD***∪ ***xABCD***}.

(*A* ∪ *B*) ∩ (*C* ∪ *D*) =

= {*xA* ∪ *xB* ∪ *xAB* ∪ *xAC* ∪ *xAD* ∪ *xBC* ∪ *xBD* ∪ *xABC* ∪ *xACD* ∪*xABD* ∪ *xBCD*∪ *xABCD*} ∩ {*xC* ∪ *xD* ∪ *xAC* ∪ *xAD* ∪ *xBC* ∪ *xBD* ∪ *xCD* ∪ *xABC* ∪ *xABD* ∪ *xACD*∪ *xBCD*∪ *xABCD*} =

= {***xAC***∪ *xAD* ∪ *xBC* ∪ ***xBD*** ∪ ***xABC*** ∪ ***xABD***∪ ***xACD*** ∪ ***xBCD***∪ ***xABCD***}.

Жирным цветом выделены элементы, общие для левой и правой частей включения. Невыделенными оставлены «избыточные» элементы в правой части. Как уже отмечалось, использование техники диаграмм Эйлера-Венна для решения подобных задач практически не представляется возможным.

Ответ: (*A* ∩ *C*) ∪ (*B* ∩ *D*) ⊂ (*A* ∪ *B*) ∩ (*C* ∪ *D*).

Использование развитой нами техники, как мы видим, позволяет решать достаточно сложные задачи, решение которых другими методами сильно затруднено. Усложним рассмотренную выше задачу № 63 [4] и решим ее.

***Задача*** В отделе института работают 15 человек. Из них 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек в отделе не знает иностранные языки? Сколько из них знают только английский язык? Только французский? Сколько человек знает ровно 1 язык?

Решение: Распишем поэлементно каждое из множеств *A*, *B*, *C*:

|  |
| --- |
| Обозначения:  *А* –знают английский язык;  *В* – знают немецкий язык;  *С* –знают французский язык;  *U* –все работники отдела  (универсальное множество) |

*A =* {*xAU* ∪ *xABU*∪ *xACU* ∪ *xABCU*};

*B* *=* {*xBU* ∪ *xABU* ∪ *xBCU* ∪ *xABCU*};

*C* *=* {*xCU* ∪ *xACU* ∪ *xBCU* ∪ *xABCU*};

*U* *=* {*xAU* ∪ *xBU* ∪ *xCU* ∪ *xABU*∪ *xACU* ∪ *xBCU*  ∪ *xABCU*}.

При кажущейся «длинности» этих списков структура каждого из множеств прозрачна. Например, множество A состоит из непересекающихся классов – подмножеств человек в отделе института, знающих только английский язык {*xAU*}, английский и немецкий {*xABU*}, английский и французский {*xACU*} и, наконец, английский, немецкий и французский {*xABCU*}. Число элементов во множестве А может быть найдено простым суммированием по классам:

|*A*| = |*xAU*| + |*xABU*| + |*xACU*| + |*xABCU*| = 6. (1)

Аналогично,

|*B*| *=* |*xBU|* + |*xABU*| + |*xBCU*| + |*xABCU*| = 6; (2)

|*C*| *=* |*xCU*| + |*xACU*|+ |*xBCU*| + |*xABCU*| = 7; (3)

По условию английский и немецкий знают 4 человека из отдела (множество *A* ∪ *B*), т.е.

|*A* ∩ *B*| *=* |{*xABU*∪ *xABCU*}| = |*xABU*| + |*xABCU*| = 4. (4)

Немецкий и французский знают 3 человека (множество *B* ∪ *C*), т.е.

|*B* ∩*C*|= |{*xBCU* ∪ *xABCU*}| = | *xBCU*| + |*xABCU*| = 3. (5)

Французский и английский знают 2 человека (множество *A* ∪ *C*), т.е.

|*A* ∩ *C*| = |{*xACU* ∪ *xABCU*}| = |*xACU*| + |*xABCU*| = 2. (6)

Наконец, все три языка знает 1 человек (множество *A* ∩ *B* ∩ *C*), т.е.

*|A* ∩ *B* ∩ *C|* = |*xABCU*| = 1. (7)

По условию задачи из системы уравнений (1) – (7) Сколько человек работает в отделе. Сколько из них знают только английский язык. Только французский. Сколько человек знает ровно 1 язык. Завершение решения задачи элементарно. Подставляя | *xABCU* | = 1 из (7) в уравнение (4) – (6) получим систему:

|*xAU*| + |*xABU*| + |*xACU*| = 5; (1а)

|*xBU|* + |*xABU*| + |*xBCU*| = 5; (2a)

|*xCU*| + |*xACU*|+ |*xBCU*| = 6; (3a)

|*xABU*| = 3. (4a)

|*xBCU*| = 2. (5a)

|*xACU*| = 1. (6а)

Подставляя эти результаты в уравнения (1а) – (3а) получим

|*xAU*| = 5 – 3 – 1= 1;

|*xBU|* = 5 – 3 – 2 = 0;

|*xCU|* = 6 – 1 – 2 = 3.

*|U*| *=* |*xU*| + |*xAU*| + |*xBU*| + |*xCU*| + |*xABU*| + |*xACU*| + |*xBCU* | + |*xABCU*| ⇒

15 = |*xU*| + 1 + 0 + 3 + 3 + 1 + 2 +1 ⇒

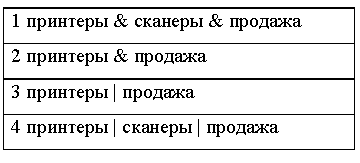
|*xU*| = 15 – 11 = 4.

Ответ: В отделе института 4 человека не знают иностранные языки; только 1 человек знает английский; 3 человека знают французский; 4 человека знают ровно один язык.

«ИНФОРМАЦИОННЫЕ» ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Математические приложения теории множеств неисчислимы. Однако теория множеств служит основанием не только математики, но и всей современной информатики. Фактически любой поиск информации на каком бы то ни было информационном ресурсе эквивалентен поиску отвечающих указанным критериям подмножеств (универсального) множества информационных записей.

Рассмотрим некоторые «информационные» приложения теории множеств на уроках информатики при решении различных задач. Рассмотренные ниже задачи 1, 2 заимствованы из демонстрационного варианта ЕГЭ - 2012 по информатике [<http://www.examen.ru>] (задачи B12 из разных вариантов). Будет видно, что предложенный нами подход, основанный на разложении множеств на непересекающиеся классы, оказывается весьма эффективным и наглядным средством решения информационно-поисковых задач.

***Задача 1.*** В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке возрастания количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции “ИЛИ” в запросе используется символ⎮, а для логической операции “И” –&.

|  |
| --- |
| Обозначения: *А- принтеры В- продажа С- сканеры* |

Решение: Как и выше, для решения задачи разложим пересекающиеся в общем случае множества *A*, *B*, *C* на непересекающиеся подмножества – классы, все из которых предполагаются непустыми:

*A* *=* {*xA* ∪ *xAB* ∪ *xAC* ∪  *xABC*},

*B* *=* {*xB* ∪ *xAB* ∪ *xBC* ∪ *xABC*},

*C* *=* {*xC* ∪ *xAC* ∪ *xBC* ∪ *xABC*}.

Тогда на языке теории множеств сформированные запросы суть:

1: принтеры &сканеры & продажа = {*xABC*}

2: принтеры & продажа = {*xAB* ∪ *xABC*}

3: принтеры ⎮ продажа = {*xA*∪ *xB* ∪ *xAB* ∪ *xAC* ∪ *xBC*∪ *xABC*}

4: принтеры ⎮ сканеры | продажа = {*xA* ∪ *xB* ∪ *xC* ∪ *xAB* ∪ *xBC* ∪ *xAC* ∪ *xABC*}.

Поскольку, число элементов классифицированного множества есть простая сумма числа элементов по всем классам, то можем сразу указать, что:

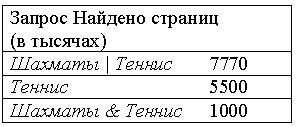
|*xABC*| < |*xAB|+*|*xABC*| < |*xA*|+ |*xB*|+ |*xAB*|+ |*xABC*| < |*xA*|+ |*xB*|+ |*xC*| + |*xAB*| + |*xBC|* + |*xAC*|+ |*xABC*|.

Сказанное иллюстрирует рисунок:

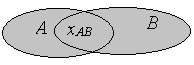
|  |  |
| --- | --- |
| 1: | 2: |
| 3: | 4: |

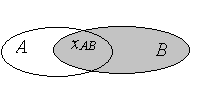
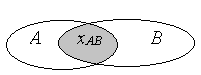
Ответ: Нарастающая по числу страниц, найденных по запросу, последовательность будет следующей: 1) принтеры & сканеры & продажа; 2) принтеры & продажа; 3) принтеры |продажа; 4) принтеры | сканеры | продажа.

|  |
| --- |
| Обозначения:  *А - шахматы*  *В - теннис* |

***Задача 2.*** Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу *Шахматы*? Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов. Для обозначения логической операции “ИЛИ” в запросе используется символ |, а для логической операции “И” – &. 

Решение:

 |*Ш* ⎮*Т* | = |{*xA* ∪ *xB* ∪ *xAB*}| = 7770

 | *T* | = |{*xB* ∪ *xAB*}|= 5500  |*Ш & T*| *=* |{*xAB*}| =1000

*Ш* = {*xA* ∪ *xAB*} = ?

Легко видеть, что: |*xA*| + |*xB*|+ |*xAB*| = 7770

|*xB*| + |*xAB*| = 5500

|*xA*| = 7770 – 5500 = 2270

|*Ш*| = |*xA*| + |*xAB*| = 2270 + 1000 = 3270.

Ответ: 3270 страниц будет найдено по запросу *Шахматы.*

С помощью теории множеств удобно также решать различные логические задачи. Логические рассуждения бывают громоздкими, и неподготовленный учащийся может в них легко запутаться. Применение теории множеств позволяет прозрачно и достаточно компактно выписать условия задачи и не запутаться в решении при рассуждениях.

В заключение отметим, что, как показывает проведенный нами анализ ряда популярных учебников, в школьном курсе математики теория множеств излагается неполно и не системно, что делает затруднительным формирование и развитие теоретико-множественного мышления учащихся. Добавим, что сказанное во многом справедливо и по отношению к ряду вузовских курсов высшей математики. Это с неизбежностью ведет к затруднениям в понимании многих базовых разделов математики как в школе, так и в вузе. Предложен оригинальный подход к введению элементов теоретико – множественной содержательной линии в курсе математики, отличающийся ясностью, доступностью и наглядностью; подход основан на рассмотрении отношений между множествами путем их разложения на классы непересекающихся подмножеств. Предложенный подход проиллюстрирован примерами, демонстрирующими его преимущества по сравнению с другими подходам

**Задачи на пересечение и объединение множеств.**

1. Даны множества А = {3,5, 0, 11, 12, 19}, В = {2,4, 8, 12, 18,0}.  
   Найдите множества AU В,
2. Составьте не менее семи слов, буквы которых образуют подмножества множества  
   А -{к,а,р,у,с,е,л,ь}.
3. Пусть A - это множество натуральных чисел, делящихся на 2, а В - множество натуральных чисел, делящихся на 4. Какой вывод можно сделать относительно данных множеств?
4. На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка. Сколько человек фирмы не знают ни английского, ни немецкого языков?
5. Из 40 учащихся нашего класса 32 любят молоко, 21 - ли­монад, а 15 - и молоко, и лимонад. Сколько ребят в нашем классе не любят ни молоко, ни лимонад?
6. 12 моих одноклассников любят читать детективы, 18 -фантастику, трое с удовольствием читают и то, и другое, а один вообще ничего не читает. Сколько учеников в нашем классе?
7. Из тех 18 моих одноклассников, которые любят смотреть триллеры, только 12 не прочь посмотреть и мультфильмы. Сколько моих одноклассников смотрят одни «мультики», если всего в на­шем классе 25 учеников, каждый из которых любит смотреть или триллеры, или мультфильмы, или и то и другое?
8. Из 29 мальчишек нашего двора только двое не занимают­ся спортом, а остальные посещают футбольную или теннисную секции, а то и обе. Футболом занимается 17 мальчишек, а тенни­сом - 19. Сколько футболистов играет в теннис? Сколько тенниси­стов играет в футбол?
9. 65 % бабушкиных кроликов любят морковку, 10 % любят и морковку, и капусту. Сколько процентов кроликов не прочь по­лакомиться капустой?
10. В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 -черешню. Двое любят груши и черешню; 6 - груши и яблоки; 5 -яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят все и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учени­ков этого класса любят яблоки?
11. В конкурсе красоты участвовали 22 девушки. Из них 10 было красивых, 12 -умных и 9 -добрых. Только 2 девушки были и красивыми, и умными; 6 девушек были умными и одновременно добрыми. Определите, сколько было красивых и в то же время до­брых девушек, если я скажу вам, что среди участниц не оказалось ни одной умной, доброй и вместе с тем красивой девушки?
12. В нашем классе 35 учеников. За первую четверть пятерки по русскому языку имели 14 учеников; по математике - 12; по ис­тории - 23. По русскому и математике - 4; по математике и исто­рии - 9; по русскому языку и истории - 5. Сколько учеников имеют пятерки по всем трем предметам, если в классе нет ни одного ученика, не имеющего пятерки хотя бы по одному из этих предметов?
13. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 - испан­ский, 75 - немецкий. Все владеют, по крайней мере, одним ино­странным языком. Среди них нет таких, которые знают два ино­странных языка, но есть владеющие тремя языками. Сколько человек из этих 100 знают три языка?
14. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10 -в Италии, 6 - в Англии; в Англии и Италии - 5; в Англии и Фран­ции - 6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?