ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Факультет повышения квалификации педагогических кадров

КУРСОВАЯ РАБОТА

слушателя факультета повышения квалификации
педагогических кадров отделения «Математика»
курса МА-4-2

Формы и методы организации итогового повторения, подготовки к выпускным экзаменам

Дорошенко Нины Ивановны

Тема: «Тригонометрические уравнения. Методы решения»

Заведующий кафедрой математики
к.ф.-м.н. Ященко Иван Валериевич

« _____ » _________ 2013 г.

г. Москва – 2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, учащиеся средней школы испытывают большие затруднения при решении тригонометрических уравнений как при обучении в школе, так и сдачи единого государственного экзамена по математике. Поэтому в качестве темы курсовой работы мною было выбрано решение тригонометрических уравнений.

Изложение материала построено на решении типовых примеров от простых до сложных и сопровождается всеми необходимыми для этого теоретическими сведениями.

1. ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ ТРИГОНОМЕТРИИ

Слово «тригонометрия» составлено из двух греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрео» — измеряю. Основной задачей тригонометрии является нахождение неизвестных параметров треугольника по данным значениям других его параметров. Например, по данным сторонам треугольника можно вычислить его углы, по известным значениям площади и двух углов вычислить его стороны и т. д.

Первые методы нахождения неизвестных параметров данного треугольника были развиты учеными Древней Греции за несколько веков до нашей эры. Греческие астрономы не знали синусов, косинусов и тангенсов. Вместо таблиц этих величин они употребляли таблицы, позволявшие отыскивать хорду окружности по стягиваемой ею дуге. Дуги измерялись в градусах и минутах.

Все древние цивилизации вносили свой вклад в дело накопления тригонометрических знаний. На одной из глиняных табличек Древнего Вавилова, возраст которой определяется вторым тысячелетием до нашей эры, решается тригонометрическая задача.

Значительно развили тригонометрию индийские средневековые астрономы и арабские ученые. В X веке багдадский ученый Абу-ль-Вефа присоединил к понятиям синусов и косинусов понятия тангенсов, котангенсов, секансов и косекансов. Абу-ль-Вефа установил также основные соотношения между ними. Благодаря работам знаменитого арабского ученого Насир эд-Дина (1201—1274) тригонометрия становится самостоятельной научной дисциплиной. Насир эд-Дин рассмотрел все случаи решения плоских и сферических треугольников. В XII веке с арабского языка на латинский был переведен ряд астрономических работ, по которым европейцы познакомились с тригонометрией, не многие работы Насир эд-Дина остались им неизвестны.

Выдающийся немецкий астроном XV века Региомонтан (1436—1476) заново сформулировал теоремы Насир эд-Дина. Региомонтан составил таблицы синусов плоских углов с точностью до седьмой значащей цифры. В середине XVIII века, благодаря русскому академику Леонарду Эйлеру (1707—1783), тригонометрия приняла современный вид. Он разработал её как науку о тригонометрических функциях, ввел записи sin*x*, tg*x*, обозначил *a, в, c* для сторон и *A,B,C* для противоположных углов *Δ ABC*.

Эйлер рассматривал тригонометрические функции аргумента *x* - радианной меры соответствующего угла, давая этому аргументу различные значения: положительные, отрицательные и даже комплексные. Он же ввел и обратные тригонометрические функции.

2. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a, \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z, \ |a| \le 1;$$
$$\cos x = a, \ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z, \ |a| \le 1;$$
$$tgx = a, \ x = arctga + \pi n, \ n \in Z, \ a \in R;$$
$$ctgx = a, \ x = arcctga + \pi n, \ n \in Z, \ a \in R.$$

Особо отметим некоторые частные случаи простейших тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$\sin x = 0, \ x = \pi n, \ n \in Z$,

$\sin x = 1, \ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$,

$\sin x = -1, \ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$;

$\cos x = 0, \ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$,

$\cos x = 1, \ x = 2\pi n, \ n \in Z$,

$\cos x = -1, \ x = \pi + 2\pi n, \ n \in Z$.

Каждая из функций $\arcsin a$ и $\arccos a$ определена на отрезке [-1; 1] и

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}, \ a \in [-1; \ 1]$$
$$0 \le \arccos a \le \pi, \ a \in [-1; \ 1]$$

Функция $\arcsin a$ является нечетной, то есть $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Функция $\arccos a$ не является ни четной, ни нечетной: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Функции $arctga$ и $arcctga$ определены на всей числовой прямой и

$-\frac{\pi}{2} \le arctga \le \frac{\pi}{2}$, $a \in R$;

$0 \le arcctga \le \pi$, $a \in R$.

Функция $arctga$ является нечетной, то есть $arctg(-a) = -arctga$. Функция $arcctga$ не является ни четной, ни нечетной: $arcctg(-a) = \pi - arcctga$. При решении тригонометрического уравнения, не являющегося простейшим, его сводят тем или иным способом к одному или нескольким простейшим.

Пример 1. Решить уравнение

$$tg^2 x = 3 \tag{2.1}$$

Решение.

Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} tgx = \sqrt{3}, \\ tgx = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Решением первого уравнения этой совокупности является семейство $x = \pi/3 + \pi n,\ n \in Z$, а второго – семейство $x = -\pi/3 + \pi n,\ n \in Z$. Объединение этих двух множеств и есть решение уравнения (2.1). Эти решения можно для краткости записать в виде $x = \pm\pi/3 + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \pm\pi/3 + \pi n,\ n \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos x = \frac{\pi}{3} \tag{2.2}$$

Решение.

Грубая ошибка, которую допускают при решении этого уравнения, состоит в следующем: учащиеся записывают решение $x = \pm\arccos\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$, однако они не учитывают, что $\pi/3 \approx 1{,}04 > 1$, следовательно, уравнение (2.2) решений не имеет.

Ответ: $x \in \varnothing$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin \pi\sqrt{x} = -1 \tag{2.3}$$

Решение.

Применив формулу решения простейшего тригонометрического уравнения, получим

$$\pi\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2k,\ k \in Z \tag{2.4}$$

Далее многие учащиеся для нахождения x возводят левую и правую часть уравнения (2.4) в квадрат, не учитывая, что $\sqrt{x} \geq 0$, а это влечет за собой $-1/2 + 2k \geq 0,\ k \in Z$. Так как последнему неравенству удовлетворяют только $k \in N$, то

$$x = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)^2,\ k \in N$$

Ответ: $x = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)^2,\ k \in N$

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Метод разложения на множители заключается в следующем:

если

$f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x),$

То всякое решение уравнения

$$f(x) = 0 \tag{3.1.1}$$

Является решением совокупности уравнений

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0. \tag{3.1.2}$$

Обратное утверждение, неверно: не всякое решение совокупности уравнений (3.1.2) является решением уравнения (3.1.1). Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений (3.1.2) могут не входить в область определения функции $f(x)$.

Поэтому, если при решении тригонометрического уравнения методом разложения на множители, функции, входящие в уравнение, определены не для всех значений аргумента, после нахождения решения должна быть сделана проверка, чтобы исключить лишние корни. Можно поступать другим способом: находить область допустимых значений исходного уравнения и выбирать только те корни, которые входят в найденную область допустимых значений.

Пример 1. Решить уравнение

$$(2sinx - cosx)(1 + cosx) = sin^2x. \tag{3.1.3}$$

Решение

Используя основное тригонометрическое тождество, уравнение представим в виде

$$(2sinx - cosx)(1 + cosx) = 1 - cos^2x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (2sinx - cosx)(1 + cosx) = (1 - cosx)(1 + cosx) \tag{3.1.4}$$

Грубой ошибкой, которую часто допускают при решении, является сокращение левой и правой части уравнения (3.1.4) на $1 + cosx$, так как при этом теряются корни. При правильном подходе к решению данного уравнения следует перенести все слагаемые в правую часть и вынести общий множитель за скобки, получая равносильное уравнение

$$(1 + cosx)(2sinx - cosx - 1 + cosx) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + cosx = 0, \\ 2sinx - 1 = 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx = -1, \\ sinx = \frac{1}{2} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{sinx} - 1 = ctgx - cosx \tag{3.1.5}$$

Решение.

Преобразуем правую часть уравнения (3.1.5) следующим образом

$$ctgx - cosx = \frac{cosx}{sinx} - cosx = cosx\left(\frac{1}{sinx} - 1\right).$$

Затем перенесем все слагаемые в левую часть и получим

$$(1 - cos x)\left(\frac{1}{sinx} - 1\right) = 0. \qquad (3.1.6)$$

ОДЗ уравнения (3.1.6) являются все $x \in R$, за исключением $x = \pi n, n \in Z \ (sinx \neq 0)$. На данной ОДЗ уравнение (3.1.6) равносильно совокупности двух уравнений

$$1 - cosx = 0 \text{ и } \frac{1}{sinx} - 1 = 0.$$

Первое уравнение имеет решение $x = 2\pi k, k \in Z$, а второе $x = \frac{\pi}{2} + +2\pi, n \in Z \ (sinx = 1)$. Однако ОДЗ принадлежат лишь $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, которые и являются решением исходного уравнения (3.1.5).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi, n \in Z$

3.2. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным

При решении уравнений указанного типа в основном применяются следующие тригонометрические тождества:

$$sin^2 x + cos^2 x = 1;$$

$$tg^2 + 1 = \frac{1}{cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{1}{sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in Z.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$6cos^2 x + 5 sinx - 7 = 0. \qquad (3.2.1)$$

Решение.

Используя основное тригонометрическое тождество, осуществим замену $cos^2 x = 1 - sin^2 x$, тогда уравнение (3.2.1) примет вид

$$6sin^2 x - 5sinx + 1 = 0.$$

Введем подстановку $y = sinx$, тогда получим квадратное уравнение

$$6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Решая его, находим корни $y_1 = \frac{1}{2}\ y_2 = \frac{1}{3}$. Затем осуществляя обратную подстановку $sinx = \frac{1}{2}$ или $sinx = \frac{1}{3}$, получаем решение исходного уравнения.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; x = (-1)^k arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{sin^2 x cos^2 x} + \frac{3}{sinxcosx} - 4 = 0. \qquad (3.2.2)$$

Решение.

Введем подстановку $y = {}^1/_{(sinxcosx)}$, тогда уравнение (3.2.2) примет вид

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

откуда $y_1 = 1,\ y_2 = -4$. Так как ${}^1/_{sinxcosx} = {}^2/_{sin2x} \left|{}^2/_{sin2x}\right| \geq 2$,

то корень $y_1 = 1$ не подходит. Следовательно,

$$\frac{2}{sin2x} = -4 \leftrightarrow sin2x = -\frac{1}{2} \leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

Решение.

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$4 - 2\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3\sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$$

$$D_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - ac$$

Пусть $\sin 2x = y$, тогда

$$y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$D_1 = 12$$

$$y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$ или $\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$

$2x = (-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z$

Т.к. $|\sin 2x| \le 1$

$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

при $x \in R$, то корней нет.

Ответ: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

3.3. Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение

Решение данного типа уравнений лучше всего рассмотреть на примере.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin \pi x^2 = \sin \pi\left(x^2 + 2x\right), x \in R$$

Решение.

$$\sin \pi x^2 - \sin \pi\left(x^2 + 2x\right) = 0, x \in R$$

$$2\sin(-\pi x)\cos \pi\left(x^2 + x\right) = 0, x \in R$$

$2\sin(-\pi x) = 0$ или $\cos \pi\left(x^2 + x\right) = 0$

$\pi x = \pi n, n \in Z$

$x = n, n \in Z$

$$\pi\left(x^2 + x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x^2 + x = \frac{1}{2} + k, k \in Z$$

$$x^2 + x - \left(\frac{1}{2} + k\right) = 0, k \in Z$$

$$D = 3 + 4k \geq 0$$

$$k \geq -\frac{3}{4} \qquad k = 0,1,2,3....$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 + 4k}}{2}, k = 0,1,2,3....$$

Ответ: $x = n, n \in Z$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 + 4k}}{2}$, $k = 0,1,2,3....$

3.4. Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Решение данного типа уравнений лучше всего рассмотреть на примере.

Пример 1. Решить уравнение:

$$tg\left(x-15^0\right)ctg\left(1+15^0\right)=\frac{1}{3}$$

Решение.

а) Найдем область определения функции.

$$\begin{cases}\cos\left(x-15^0\right)\neq 0\\ \sin\left(x+15^0\right)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-15^0\neq 90^0+180^0k, k\in Z\\ x+15^0\neq 180^0n, n\in Z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\neq 15^0+90^0+180^0k, k\in Z\\ x\neq -15^0+180^0n, n\in Z\end{cases}$$

Областью определения данного уравнения является:

$$x\neq 15^0+90^0+180^0k, k\in Z$$
$$x\neq -15^0+180^0n, n\in Z$$

б) Решим данное уравнение.

$$\frac{\sin\left(x-15^0\right)\cos\left(x+15^0\right)}{\sin\left(x+15^0\right)\cos\left(x-15^0\right)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin\left(-30^0\right)+\sin 2x}{\sin 30^0+\sin 2x}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{2}}{\sin 2x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin 2x - 3 - 2\sin 2x - 1}{6\sin 2x + 3} = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x = 90^0 + 360^0 m, m \in Z$$

$$x = 45^0 + 180^0 m, m \in Z$$

Ответ: $x = 45^0 + 180^0 m, m \in Z$

3.5. Решение однородных уравнений

Уравнение вида

$$a_0 sin^n \alpha x + a_1 sin^{n-1} \alpha x \cdot cos\alpha x + a_2 sin^{n-2} \alpha x \cdot cos^2 \alpha x + \cdots + \\ + a_{0n-1} sin\alpha x \cdot cos^{n-1} \alpha x + a_n cos^n \alpha x = 0, \quad (3.5.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – действительные числа, называются однородными уравнениями степени n относительно функций $sin\alpha x$ и $cos\alpha x$. К квадратичным уравнениям вида (3.5.1) приводятся уравнения вида

$$Asin^2 \alpha x + Bsin\alpha x \cdot cos\alpha x + Ccos^2 \alpha x + Esin2\alpha x + Fcos2\alpha x + D = \quad (3.5.2)$$

при этом следует применить формулы синуса и косинуса двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,

а также тождество

$$D = D(sin^2 \alpha x + cos^2 \alpha x).$$

Общий подход к решению однородных уравнений основан на том, что корни уравнений $sin\alpha x = 0$ или $cos\alpha x = 0$ не являются корнями уравнения (3.5.1), так как, если, например, $cos\alpha x = 0$, то из уравнения (3.5.1) следует, что и $sin\alpha x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Следовательно, левую и правую части уравнения (3.5.1) можно разделить на $cos^n \alpha x$ и ввести подстановку $y = tg\alpha x$

Пример 1. Решить уравнение

$$sinx - 2cosx = 0. \tag{3.5.3}$$

Решение.

Уравнение (3.5.3) является однородным уравнением первой степени. Разделив обе части на $\cos x$, получим равносильное уравнение $tgx = 2$. Откуда находим семейство $x = arctg2 + \pi k,\ k \in Z$, представляющее собой решение исходного уравнения (3.5.3).

Ответ: $x = arctg2 + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x + \cos^4 x = 1 \tag{3.5.4}$$

Решение.

Уравнение (3.5.4) не является однородным, однако его можно преобразовать к однородному, если представить единицу следующим образом

$$1=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x.$$

Тогда уравнение (3.5.4) примет вид

$$\sin^3 x\cdot\cos x-\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin x\cdot\cos^3 x=0,$$

которое равносильно совокупности трех уравнений

$$\sin x=0,\quad \cos x=0,\quad tg^2 x-tgx+1=0.$$

Решая их, найдем $x=\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Пример 3. Решить уравнение:

$$3\sin x+4\cos x=5, x\in Z$$

Решение.

$$3\sin 2\frac{x}{2}+4\cos 2\frac{x}{2}=5*1$$

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}=5\sin^2\frac{x}{2}+5\cos^2\frac{x}{2}$$

$$9\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0$$

Если $\cos\dfrac{x}{2}=0$, то и $\sin\dfrac{x}{2}=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству, значит $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$. Разделим обе части на $\cos^2\dfrac{x}{2}\neq 0$, получим

$$9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$

3.6. Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

Рассмотрим уравнение

$$a\sin x+b\cos x=c,\ a^2+b^2\neq 0. \tag{3.6.1}$$

Разделим левую и правую часть уравнения (3.6.1) на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

при этом

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(или \;\; \varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Тогда уравнение (3.6.1) примет вид

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leftrightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отметим, что к выбору угла φ в задачах с параметрами нужно относиться внимательно: выбор $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и выбор $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ будут не всегда равносильны.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1. \tag{3.6.2}$$

Решение.

Разделим левую и правую часть уравнения на $\sqrt{2}$. Тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,\;\; k \in Z.$$

Ответ можно записать в другом виде. Для этого, положив $k = 2n,\;\; n \in Z \;\; и \;\; k = 2n+1,\;\; n \in Z$, получим $x = 2\pi n,\;\; n \in Z;\;\; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\;\; n \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi n,\;\; n \in Z;\;\; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\;\; n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 3x. \tag{3.6.3}$$

Решение.

Разделим левую часть на 2 и положим $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$. Тогда уравнение (3.6.3) примет вид

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos 3x=0.$$

Применив формулу $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, получим

$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0,$$

откуда

$$2x+\frac{\pi}{12}=\pi k,\ k\in Z;\ \ x-\frac{\pi}{12}=\pi n,\ n\in Z.$$

Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ \ x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ \ x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 3. Решить уравнение

$$3\sin x+4\cos x=5, x\in \mathrm{Z}$$

Решение.

Т. к. $3^2+4^2\geq 5^2$, то корни есть.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2+4^2}=5$, получим

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1$$

Т. к. $\left|\frac{3}{5}\right| \le 1, \left|\frac{4}{5}\right| \le 1$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, а $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, тогда получим

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = 1$$

$$\sin(x+\varphi) = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

3.7. Решение уравнений с применением формул понижения степени

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0.$$

Решение.

Применив формулу понижения степени, получим

$$\frac{1-cos2x}{2}+\frac{1-cos4x}{2}-\frac{1-cos6x}{2}-\frac{1-cos8x}{2}=0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (cos8x-cos2x)+(cos6x-cos4x)=0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow -2sin3x\cdot sin5x-2sinx\cdot sin5x=0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2sin5x(sin3x+sinx)=0 \leftrightarrow 4sin5x\cdot sin2x\cdot sinx=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности трех уравнений

$sin5x=0, sin2x=0, cosx=0,$

которые имеют соответственно следующие множества решений

$$x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z;\ x=\frac{\pi k}{2}, k\in Z;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z.$$

Решение из множества $x=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ при $k=2l, l\in Z$ содержаться в множестве $x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ $(n=5l)$, а при $k=2l+1$ в множестве $x=\frac{\pi}{2}++\pi m, m\in Z\ (m=l)$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z;\ x=\frac{\pi}{2}++\pi m, m\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$sin^2(2+3x)+cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=cos^2(2-5x)+sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6x\right).$$

Решение.

Применив формулы $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$ и $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$, приведем уравнение к виду

$$\frac{1-\cos(4+6x)}{2}+\left(\frac{1+cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2}\right)=\frac{1+\cos(4-10x)}{2}+$$

$$+\frac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-12x\right)}{2}.$$

Далее осуществим ряд простых преобразований:

$$sin12x-sin4x=\cos(4-10x)+\cos(4+6x)\ \leftrightarrow 2sin4x\cdot cos8x=$$
$$=2\cos(4-2x)\cdot cos8x\leftrightarrow 2cos8x\left(cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(4-2x\right)\right)$$
$$\leftrightarrow\ -4cos8x\cdot sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(3x-2-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности трех уравнений

$$cos8x=0,\qquad sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)=0,\qquad sin\left(3x-2-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Решение первого из них есть $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8},k\in Z,$, второго – $x=\frac{\pi}{4}-2++\pi n,n\in Z,$, третьего – $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi m}{3},m\in Z.$

Решением исходного уравнения является объединение полученных множеств.

Ответ: $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8},k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}-2+\pi n,n\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi m}{3},m\in Z$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2},x\in R$$

Решение.

$$\left(\frac{1-coc2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\sin 2x-\frac{1}{2}$$

$$\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos^2 2x+\cos^2 2x=\sin 2x-\frac{1}{2}$$

$$2+2\cos^2 2x=4\sin 2x-2$$

$$\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0$$

Пусть $\sin 2x=y$, тогда

$$y^2+2y-3=0$$

$$y_1=1$$

$$y_2=-3$$

$\sin 2x=1$ или $\sin 2x=-3$

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Т.к. $|\sin 2x|\le 1$ при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

3.8. Решение уравнений с применением формул тройного аргумента

При решении ряда уравнений наряду с другими существенную роль играют формулы

$$sin3x=3sinx-4sin^3x, \tag{3.8.1}$$

$$cos3x=4cos^3x-3cosx. \tag{3.8.2}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$cos3x=-2cosx.$$

Решение.

Применив формулу (3.8.2), получим

$$cosx(4cos^2x - 1) = 0 \leftrightarrow cosx\left(cos2x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $cosx = 0$ и $cos2x = -\frac{1}{2}$. Откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in Z$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Рещить уравнение

$$cos4x = cos^2 3x. \tag{3.8.3}$$

Решение.

Применив формулы понижения степени, уравнение (3.8.3) приведем к виду:

$$2cos^2 2x - 1 = \frac{1 + cos6x}{2}.$$

В соответствие с формулой (3.8.2), получаем равносильное уравнение

$$4cos^2 2x - 2 = 4cos^3 2x - 3cos2x + 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 4cos^3 2x - 4cos^2 2x - 3cos2x + 3 = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 4cos^2 2x(cos2x - 1) - 3(cos2x - 1) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (cos2x - 1)(4cos^2 2x - 3) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (cos2x - 1)(2cos2x - \sqrt{3})(2cos2x + \sqrt{3}) = 0,$$

откуда имеем совокупность трех уравнений

$$cos2x = 1, \qquad cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad cos2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $x = \pi n, n \in Z; x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z; x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi l, l \in Z.$

Объединив два последних множества решений, получим

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z;\ x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

3.9. Решение уравнений методом универсальной подстановки

Тригонометрическое уравнение вида

$$R(sinkx, cosnx, tgmx, ctglx) = 0, \tag{3.9.1}$$

где R – рациональная функция, $k, l, m, n \in Z$, с помощью тригонометрических формул двойного и тройного аргумента, а также формул сложения можно свести к рациональному уравнению относительно аргументов $sinx, cosx, tgx, ctgx,$ после чего уравнение (3.9.1) может быть сведено к рациональному уравнению относительно $t = tg\,x/2$ с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \qquad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}, \qquad ctgx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}. \tag{3.9.2}$$

Следует отметить, что применение формул может приводить к сужению ОДЗ исходного уравнения, поскольку $tg\,x/2$ не определен в точках

$x = \pi + +2\pi k, k \in Z$, поэтому в таких случаях нужно проверять, являются ли углы $x = \pi + +2\pi k, k \in Z$ корнями исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x + tg\frac{x}{2} = 0.$$

Решение.

По условию задачи $x \neq \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$. Применив формулы (3.9.2) и сделав замену $tg\frac{x}{2} = t$, получим

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 0,$$

откуда t=0 и, следовательно, $x = 2\pi k,\ \ k \in Z$

Ответ: $x = 2\pi k,\ \ k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$15ctg\frac{x}{2} + 130\sin x = \frac{53}{5}tg\frac{x}{2}.$$

Решение.

По условию задачи $x \neq \pi k,\ \ k \in Z$. Используем формулы (3.9.2) и заменим $tg\frac{x}{2} = t$, тогда получим

$$\frac{15}{t} + \frac{260t}{1+t^2} = \frac{53}{5}t,\ \ 75 + 75t^2 + 1300t^2 = 53t^2 + 53t^4,$$

$$53t^4 - 1322t^2 - 75 = 0,\ \ t^2 = 25,\ \ t^2 = -5/53,$$

откуда $t = \pm 5$. Следовательно, $x = \pm 2arctg5 + 2\pi n,\ \ n \in Z$.

Заметим, что в данном случае применение подстановки $tg\frac{x}{2}=t$ не сужает ОДЗ исходного уравнения.

Ответ: $x=\pm 2arctg5+2\pi n,\ \ n\in Z$

Пример 3. Решить уравнение

$$3\sin x+4\cos x=5, x\in Z \qquad (3.9.3)$$

Решение.

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=5 \qquad (3.9.4)$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2}+4-4tg^2\frac{x}{2}-5-5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

При переходе от уравнения (3.9.3) к уравнению (3.9.4), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$ корнями данного уравнения.

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\pi+2\pi n, n\in Z$$

Проверка.

Если $x=\pi+2\pi n, n\in Z$, тогда

$$3\sin(\pi+2\pi n)+4\cos(\pi+2\pi n)=5, x\in Z$$

$0+4(-1)=5$ - не верно, значит $x=\pi+2\pi n, n\in Z$, не является корнями исходного уравнения.

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$

3.10. Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного

Уравнение вида $P(\sin x\pm\cos x;\sin x\cos x)=0$ решается следующей заменой $\sin x\pm\cos x=y$, $(\sin x\pm\cos x)^2=y^2$, $1\pm2\sin x\cos x=y^2$, $\pm2\sin x\cos x=y^2-1$

Пример 1. Решить уравнение

$$2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0, x\in R$$

Решение. Способ I

$$2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1=0$$

Пусть $\sin x+\cos x=y$, $(\sin x+\cos x)^2=y^2$, $1+2\sin x\cos x=y^2$, $2\sin x\cos x=y^2-1$, получим

$y^2+2y-1+1=0$

$y^2+2y=0$

$y(y+2)=0$

$y=0$ или $y=-2$

$\sin x+\cos x=0$

Разделим на $\cos x\neq 0$, получим

$tgx=-1$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

$\sin x+\cos x=-2$

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$

Т. к. $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq 1$, при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

$|\sin x\pm\cos x|\leq\sqrt{2}$, при $x\in R$

Доказательство:

$|\sin x\pm\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq\sqrt{2}$

Решение. Способ II

$2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x=0$

$2(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2=0$

$(\sin x+\cos x)(2+\sin x+\cos x)=0$

$\sin x+\cos x=0$ или $\sin x+\cos x=-2$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2$$

Разделим на $\cos x\neq 0$, получим

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$tgx=-1$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Т. к. $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq 1$, при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

3.11. Решение тригонометрических уравнений, содержащих знак модуля или знак корня

Специфика тригонометрических уравнений, содержащих знак модуля или знак корня, состоит в том, что они сводятся к смешанным системам, где кроме уравнений нужно решать тригонометрические неравенства и из решений уравнений выбирать лишь те, которые удовлетворяют неравенствам.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x+3|\sin x=x+3. \qquad (3.11.1)$$

Решение.

Уравнение (3.11.1) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}(x+3)\sin x=x+3,\\ x+3\geq 0,\end{cases}\quad \begin{cases}(-x-3)\sin x=x+3,\\ x+3<0.\end{cases} \qquad (3.11.2)$$

Уравнение $(x+3)\sin x = x+3$ равносильно совокупности двух уравнений $x+3=0$ и $\sin x = 1$, откуда $x=-3$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Промежутку [-3;+∞) принадлежат $x=-3$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n=0,1,2,...$.

Уравнение $-(x+3)\sin x = x+3$ равносильно совокупности двух уравнений $x+3=0$ и $\sin x=-1$, откуда $x=-3$ и $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. Множеству (-∞;-3) принадлежат $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n=-1,-2,-3,...$.

Ответ: $x=-3$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n=0,1,2,...$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=-1,-2,-3,...$

Пример 2. Решить уравнение

$$tgx+\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=2. \tag{3.11.3}$$

Решение.

Преобразуем уравнение (3.11.3) к виду

$$tgx+\frac{\cos x}{\sqrt{(\sin\ x+\cos x)^2}}=2 \leftrightarrow tgx+\frac{\cos x}{|\sin x+\cos x|}=2. \tag{3.11.4}$$

Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$, то уравнение (3.11.4) на ОДЗ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} tgx+\dfrac{1}{tgx+1}=2, \\ \sin\left(x+\pi/4\right)>0, \end{cases} \quad \begin{cases} tgx-\dfrac{1}{tgx+1}=2, \\ \sin\left(x+\pi/4\right)<0. \end{cases} \tag{3.11.5}$$

Уравнение из первой системы равносильно совокупности двух уравнений $tgx=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $tgx=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, а решением неравенства является множество

$\{-\pi/4+2\pi k;\ 3\pi/4+2\pi k\},\ k\in Z$. Из решений $x=arctg\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+\pi n,\ n\in Z$ указанному множеству принадлежат $x=arctg\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z$.

Во второй системе совокупности (3.11.5) уравнение имеет решения $x=arctg\left(\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right)+\pi l,\ l\in Z$, множеству $\{3\pi/4+2\pi k;\ 7\pi/4+2\pi k\},\ k\in Z$ (решение неравенства $\sin(x+\pi/4)<0$) принадлежат $x=arctg\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)+2\pi l$, $x=arctg\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)+\pi+2\pi l,\ l\in Z$.

Ответ: $x=arctg\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z$;

$x=arctg\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)+2\pi l$,

$x=arctg\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)+\pi+2\pi l,\ l\in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos x}=\sin x$$

Решение.

$$\begin{cases}\sin x\ge 0 & (1)\\ 1-\cos x=\sin^2 x & (2)\end{cases}$$

Решим уравнение 2.

$$1-\cos x=\sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ или $\cos x = 1$

$x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x_2 = 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, $x_2 = 2\pi n, n \in Z$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2} \cos x = 0$$

Решение.

$$\sqrt{\sin x} = -\sqrt[4]{2} \cos x$$

$$\begin{cases} \cos x \le 0 & (1) \\ \sin x = \sqrt{2} \cos^2 x & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение 2.

$$\sin x = \sqrt{2}(1 - \sin^2 x)$$

$$\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$$

Решим квадратное уравнение относительно $\sin x$.

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin x = -\sqrt{2}, < -1,$ то корней нет.

Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

3.12. Использование ограниченности функций при решении тригонометрических уравнений

При решении некоторых тригонометрических уравнений часто используется свойство ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$, то есть следующие неравенства: $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^7 x = 1 \qquad (3.12.1)$$

Решение.

Проведем равносильные преобразования:

$$\begin{gathered}\sin^4 x + \cos^7 x = 1 \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^7 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin^2 - 1\right) + \cos^2 x\left(\cos^5 x - 1\right) = 0\end{gathered} \qquad (3.12.2)$$

Так как $\sin^2 x \ge 0$, а $\sin^2 x - 1 \le 0$, то $\sin^2 x\left(\sin^2 x - 1\right) \le 0$; так как $\cos^2 x \ge 0$, а $\cos^5 x - 1 \le 0$, то $\cos^2 x\left(\cos^5 x - 1\right) \le 0$. Сумма двух неположительных слагаемых в (3.12.2) равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю. Значит, уравнение (3.12.2) равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\ \sin^2 x = 0,\ \sin^2 x - 1 = 0,\right. \\ \left[\ \cos^2 x = 0,\ \cos^5 x - 1 = 0.\right.\end{cases} \qquad (3.12.3)$$

Решением первой совокупности системы (3.12.3) являются углы $x = \pi k/2,\ k \in Z$, а решением второй - $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z;$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$. Общими являются углы $x = \pi k/2,\ k \in Z;$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \pi k/2,\ k \in Z;$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^{1994} x + \cos^{1994} x = 1 \qquad (3.12.4)$$

Решение.

Используя прием, изложенный в примере 1, сведем уравнение (3.12.4) к равносильной системе:

$$\begin{cases} \left[\sin^2 x = 0,\ \sin^{1992} x - 1 = 0, \right. \\ \left[\cos^2 x = 0,\ \cos^{1992} x - 1 = 0. \right. \end{cases} \qquad (3.12.5)$$

Находя решение каждой совокупности системы (3.12.5), нетрудно установить, что общими будут углы $x = \pi k/2,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \pi k/2,\ k \in Z$

3.13. Функциональные методы решения тригонометрических и комбинированных уравнений

Не всякое уравнение *f(x)=g(x)* в результате преобразований может быть сведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого существует определенный метод решения. В таких случаях оказывается полезным использовать такие свойства функций *f(x)* и *g(x)*, как монотонность, ограниченность, четность, периодичность и др. Так, если одна из функций убывает, а вторая возрастает на промежутке *X*, то при наличии у уравнения *f(x)=g(x)* корня на этом промежутке, этот корень единственный, и тогда его, например, можно найти подбором. Если, далее, функция *f(x)* на промежутке *X* ограничена сверху, причем $\max\limits_{x \in X} f(x) = A$, а функция *g(x)* ограничена снизу, причем $\min\limits_{x \in X} g(x) = A$, то уравнение *f(x)=g(x)* равносильно системе уравнении $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$ Иногда для решения уравнения *f(x)=g(x)* можно построить графики функции y=f(x), y=g(x) и определить абсциссы точек пересечения. В этом параграфе также рассматривается применение производной для исследования тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos \pi x = x^2 - 4x + 5 \tag{3.13.1}$$

Решение.

Преобразуем уравнение (3.13.1) к виду

$$\cos \pi x = (x-2)^2 + 1$$

Так как $\cos \pi x \le 1$, а $(x-2)^2 + 1 \ge 1$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos \pi x = 1, \\ (x-2)^2 + 1 = 1. \end{cases} \tag{3.13.2}$$

Второе уравнение системы (3.13.2) имеет единственный корень x=2, подставляя его в первое уравнение, убеждаемся, что он удовлетворяет ему. Следовательно, x=2 - корень системы (3.13.2), а значит, и уравнения (3.13.1).

Ответ: x=2

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2 - 3x + 4{,}25 = \cos^2 \pi x - 2\sin \pi x \tag{3.13.3}$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, запишем исходное уравнение в равносильном виде

$$x^2 - 3x + 4{,}25 + \sin^2 \pi x + 2\sin \pi x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1{,}5)^2 + (\sin \pi x + 1)^2 = 0$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 1{,}5 = 0, \\ \sin \pi x + 1 = 0, \end{cases}$$

решением которой является $x = 1{,}5$

Ответ: $x = 1{,}5$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсовой работе рассмотрены основные типы задач, встречающихся при сдаче единого государственного экзамена, а также методы их решения. Некоторые задачи представлены в качестве примеров к более, чем одному методу решения тригонометрических уравнений. Такой способ подачи материала подчеркивает многообразие способов решения одной и той же задачи и расширяет кругозор учащихся, что позволяет использовать вариативный подход к поиску решений, как в математике, так и в жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров А.И. и др. Тригонометрические уравнения: Учеб. пособие / А.И. Азаров, О.М. Гладун, В.С. Федосенко / - ООО"Тривиум", 2004. - 160с.

2. Евдокимова Н.Н. Тригонометрия: Теория и примеры. - СПб: Издательский Дом "Литера", 2005. - 64с.

3. Гусятников Н.В., Гусятников В.В. Учебное пособие «Методы решения уравнений». Екатеринбург,УрГПУ, 2009 г. - 56 с.

4. Ивлев Б.М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса / Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд. - 8-е изд. - М.: Просвещение, 2004. - 176с.

5. Коноплева О.А. Математика в таблицах: 7 - 11 классы. - СПб.: "Тригон", 2005. - 104с.

6. Математика. Сборник тестов ЕГЭ 2001 - 2008. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко. - Ростов-на-Дону: Легион, 2008. - 192с.

7. Математика. Способы решения экзаменационных задач - 2006. Под редакцией З.С. Стромова. - Волгоград: Братья Гринины, 2006. - 64с.

8. Потапов М.К. Алгебра и начала анализа: дидакт. материалы для 10 кл. / М. К. Потапов, А.В. Шевкин. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 2007. - 159с.