Тема 13. **Логарифмические уравнения и неравенства.**

**Логарифмическим уравнением** называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

**Логарифмом** числа по основанию  называется показатель степени , в которую надо возвести основание , чтобы получить число , то есть из  следует  и наоборот.

*Основные формулы.*

1. 
2. .
3. 
4. - запись числа через логарифм.
5. - основное логарифмическое тождество.
6.  - формула перехода к логарифму по основанию 
7. .
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 

*Основные методы решения логарифмических уравнений.*

**I. По определению логарифма.**

Так решаются простейшие уравнения вида ****

Примеры.

Решить уравнение. 1)  .

Решение. 

Проверка:  верно;

  верно.

Ответ: -1; 3.

2) .

Решение. По определению логарифма:  Получаем

.

Проверка:  верно.

Ответ: .

Решить уравнения.

1. . Ответ: 
2. . Ответ: 
3. . Ответ: 
4. . Ответ: 
5. . Ответ: 
6.  Ответ: 

**II.** **Метод потенцирования.**

Сущность метода в следующем: с помощью формул уравнение привести к виду  **** Это уравнение ( при  равносильно системе ****

Примеры.

Решить уравнение.

1) .

Решение. ОДЗ (область допустимых значений переменной): . Преобразуем исходное уравнение



-удовлетворяет условию (1).

Ответ: .

2) .

Решение. ОДЗ  (2)

 

 не удовлетворяет ОДЗ,  удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 2.

1. 

Решение. ОДЗ: 

 Найдем связь между основаниями логарифмов. По формуле разности кубов получаем



 Таким образом

  Значение  удовлетворяет ОДЗ,  не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: -4.

Решить уравнения.

1.  Ответ: 
2.  Ответ: 
3.  Ответ: 
4.  Ответ: 
5.  Ответ: 
6.  Ответ: 

**III.** **Метод введения неизвестного (подстановка).**

Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований данного уравнения.

Примеры.

Решить уравнение. 1) 

Решение. ОДЗ  В первом слагаемом перейдем к основанию 25, воспользовавшись формулой  Получим . Так как , т.е.  то умножив обе части уравнения на  получим . Введем новую переменную, обозначив  Получим квадратное уравнение относительно нового неизвестного :

. Решая его, находим Используя обозначение  получаем 

Найденные значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 

2) 

Решение. ОДЗ   С учетом ОДЗ раскроем модуль, получим  Обозначим  приходим к квадратному уравнению  Тогда  

Найденные значения удовлетворяют уравнению.

Ответ: -10; -.

Решить уравнения.

1.  Ответ: 

2.  Ответ: 

3.  Ответ: 

4.  Ответ: 

5.  Ответ: 

**IV. Метод приведения к одному основанию.**

Обычно условие примера подсказывает, к какому основанию следует перейти. Часто метод приведения к одному основанию "работает" с методом подстановки.

Примеры. Решить уравнение.

1) .

Решение. ОДЗ: . Перейдем к основанию 2, используя формулу , получим

, , обозначим , тогда

  . Значит, 

Найденное значение удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 64.

2) .

Решение. ОДЗ: Переходим к основанию 2, используя формулу.

Итак, 



Тогда исходное уравнение перепишется так

. Обозначим , получим уравнение

  Тогда

 

Найденные значения  удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 1, 4, .

Решить уравнения

1.  Ответ: 
2.  Ответ: 
3.  Ответ: 
4.  Ответ: 
5.  Ответ: 

**V. Метод логарифмирования.**

Уравнения, содержащие неизвестную величину как в основании, так и в показателе степени, решают, логарифмируя левую и правую части по некоторому основанию. Основание логарифмирования выбирают по виду конкретного уравнения.

Примеры. Решить уравнение.

1) , где 

Решение. В данном задании целесообразно прологарифмировать обе части уравнения по основанию 10, поскольку в условии уже имеется десятичный логарифм.

Получаем , откуда  Введем новую переменную . Тогда полученное уравнение перепишется в виде (учитывая, что )



Ответ: 

2) .

Решение. ОДЗ:  Прологарифмируем обе части уравнения по основанию .

 Пусть , тогда 

Тогда  Найденные значения  удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 

Решить уравнения

1.  Ответ: 
2.  Ответ: 
3.  Ответ: 
4.  Ответ: 
5.  Ответ: 