Восхождение на пик Производной

I. Цели и характеристика игры

Цели игры.

1. Повторение учебного материала.
2. Проверка усвоения вопросов теории и умения решать задачи.
3. Выявление того, что не усвоено, с целью последующей корректировки.
4. Воспитание устойчивого интереса к изучению математики.
5. Воспитание ответственности и серьезного отношения к занятиям.

Урок-зачет по теме "Производная и ее приложения" проводится в форме дидактической игры "Восхождение на пик производной".

Преимущества такой проверки знаний теории и практических навыков:

1) каждый учащийся несет ответственность за всю команду;

2) слабые учащиеся чувствуют себя уверенно, так как рядом с ними опытные товарищи;

3) если при решении какого-либо упражнения была допущена ошибка, есть возможность ее исправить, что невозможно в обычной самостоятельной работе;

4) игра позволяет развить интерес к изучению математики. Особенность игры – ее многоцелевой характер, поскольку в ней реализуется комплекс дидактических задач.

II. Правила игры

Учащиеся класса делятся на три команды.

Игровое поле состоит из красочного планшета, на котором изображен пейзаж с нанесенным на него маршрутом восхождения и привалами (рис. 1). Привалы (их 8) пронумерованы, старт обозначен флажком. Сбоку на планшете находятся карманы (они также пронумерованы), в которых находятся карточки с заданиями для каждого привала.

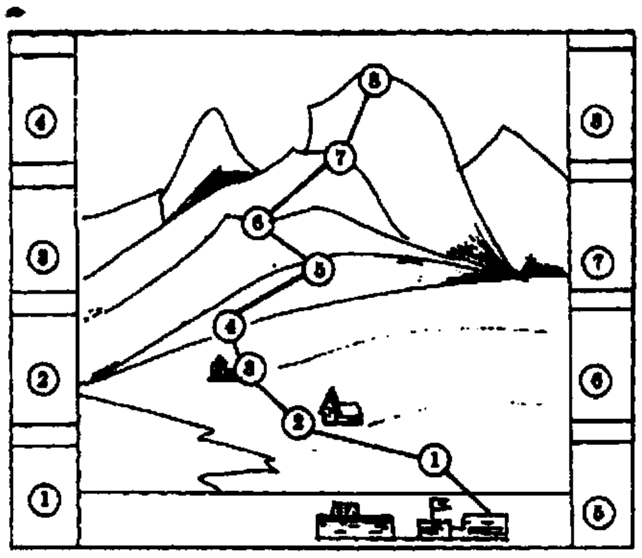


Рисунок 1

Команды с капитанами занимают старт – исходную базу. Капитаны по очереди бросают игровой кубик (рис. 2, 3). Команды выполняют задания, выпавшие для них на верхней грани кубика, и определяют число, указывающее, на сколько ходов нужно сместиться. Продвижение по маршруту отмечают цветными флажками. На каждом привале команды выполняют задания (число заданий определяется числом членов команды), взятые из соответствующего кармана (например, на третьем привале – из кармана 3), что дает право на следующий бросок кубика. На некоторых привалах команду ожидает сюрприз-неудача.

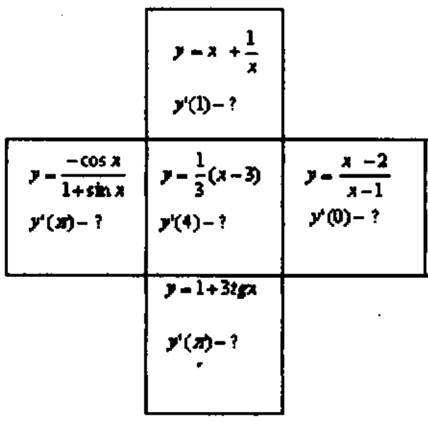


Рисунок 2

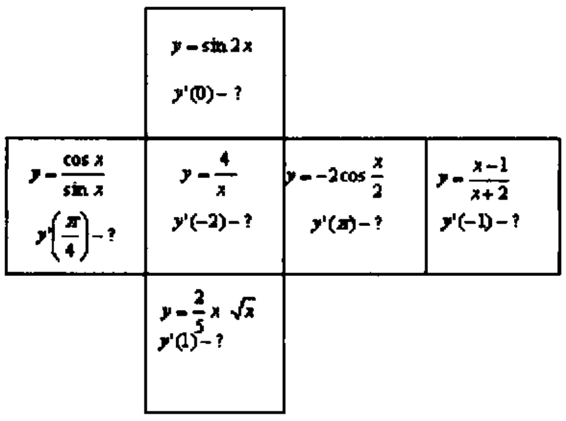


Рисунок 3

Так, на карточке, относящейся к привалу 2, написано: “Туман, снегопад, команде вернуться на базу”; на карточке к привалу 5: “Ожидается сход лавины, срочно спуститься на один переход”. В этом случае альпинисты-ученики должны следовать указаниям и “выполнить отходный маневр”. На каждом привале учитель проверяет правильность выполнения задания. Если все задания выполнены верно, команда очередной раз бросает кубик. Если в решении или при ответе на вопрос допущена ошибка, то члены команды должны ее исправить. Выигрывает команда, которая раньше других поднимется на “пик Знаний”.

Привал 1. “Ромашка”.

Проверка умения находить производные функции. Команда получает яркую бумажную ромашку, на обратной стороне лепестков которой содержатся задания на нахождение производной. Каждый член команды отрывает лепесток и находит производную.

Привал 2. “Касательная”.

Командам выдаются карточки с заданиями, при решении которых необходимо знать геометрический смысл производной и уметь его применять.

Привал 3. “Физика”.

Предлагаются задания на выявление умения применять производную при решении физических задач.

Привал 4. “Функции”.

Проверка умения исследовать свойства функций с помощью производной. Всем членам команды дается карточка с заданием исследовать функцию и построить ее график.

Привал 5. “График”.

Проверка умения учащихся указать свойства функции по характеру изменения графика функции.

Привал 6. “Меткий стрелок”.

Имеется мишень, представляющая собой три концентрические окружности: красную, зеленую, синюю. Любой член команды стреляет в нее из пружинного пистолета или дротика. Цвет круга, в который попал снаряд или дротик, определяет цвет конверта с заданием.

Привал 7. "Теория".

Проверка знаний формулировок определений, теорем, свойств, алгоритмов.

Привал 8. "Эстафета".

Посвящен основным формулам темы. На полоске бумаги в столбик записаны формулы, в которых вместо одной какой-либо величины вырезан квадрат (рис. 4). Эта полоска наложена на чистую, и вместе они свернуты в трубочку – эстафетную палочку. Ведущий вручает ее первому члену команды, тот заполняет пустую клетку (на полоске-подложке) в первой формуле, передает товарищу и т. д. Уровень сложности карточек должен быть одинаковым.

В конце урока учитель подводит итоги игры. Называется команда-победитель.

$$x - x_0 = \boxed{}$$

$$y - y_0 = \boxed{}$$

$$C' = \boxed{} \qquad C = const$$

$$x' = \boxed{}$$

$$(U + V)' = \boxed{}$$

$$(U \cdot V)' = \boxed{}$$

$$(\tilde{N}U)' = \boxed{}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \boxed{}$$

$$y - y_0 = \boxed{} \ (x - x_0)$$

$$S'' = \boxed{}$$

Рисунок 4

Задания

Привал «Ромашка»

Найдите производную функции.

1. $y = \dfrac{1-x}{x^2+3}$.

2. $y = 2\sin\dfrac{x}{5} + 3\cos x + \dfrac{\pi}{2}$.

3. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

4. $y = ctg\left(4x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

5. $y=\sqrt{x^3+1}$.

6. $y=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$.

7. $y=\dfrac{x+\sin 2x}{x}$.

8. $y=\left(x^2-5x+8\right)^6$.

9. $y=\dfrac{1}{\left(1-x^3\right)^5}$.

10. $y=\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}\right)^3$.

Привал «Касательная»

1. Дана функция $y=x-\dfrac{1}{x}$.

Составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x=1$.

2. Дана функция $y=2x^3+3x^2+5x+1$.

Составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x=-1$.

3. Дана функция $y=3x^2+2x+1$.

Составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x=-2$.

4. Дана функция $y=4x^2+6x-3$.

Составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x=0$.

5. Дана функция $y=x^2-2x-3$.

Составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке $x=-2$.

6. Определите, под каким углом кривая $y=\sin x$ пересекает ось Ox в точке $x=\pi$.

7. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y=x^2-x-12$ образует угол в 45° с осью Ox.

8. Определите точки, в которых касательная к графику функции $y=(x-9)^2$ образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.

9. На параболе $y=x^2-2x-8$ найдите точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x-y+4=0$.

10. Дана кривая $y=-x^2+1$.

Найдите точку ее графика, в которой касательная параллельна прямой $y=2x+3$.

11. Найдите острый угол между параболами $y=x^2$ и $y=2-x^2$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.

Привал «Физика»

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s=4t^3-\frac{8}{3}t+1.$$

Найдите ускорение точки в конце первой секунды.

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s = t^3 - t^2 + 4.$$

Найдите ускорение точки в конце шестой секунды.

3. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s = 16t^3 + 90t^2 + 5.$$

Найдите ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

4. Тело постоянной массы движется по закону

$$s = \frac{2}{2t+1}.$$

Найдите ускорение тела в момент времени $t = 0$.

5. Найдите силу F ($F = ma$), действующую на материальную точку массой m, движущуюся прямолинейно по закону

$$s = 2t^2 - t$$

в момент времени $t = 2$ с.

6. Тело брошено с земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0=10 м/с. Определите, через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки подъема, если

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ (считать } g \approx 10\text{ ì /ñ}^2\text{).}$$

7. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м со скоростью 20 м/с. Определите, какой наибольшей высоты достигнет тело, если

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ (считать } g \approx 10\text{ ì /ñ}^2\text{).}$$

8. Известно, что тело массой m = 5 кг движется прямолинейно по закону $s = t^2 + 2$. Найдите кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

9. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнение

$$I = 2t^2 - 5t.$$

Найдите скорость изменения силы тока в момент t = 10 с.

10. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам:

$$s_1 = 2{,}5t^2 - 6t + 1,\ s_2 = 0{,}5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент времени скорости их равны?

11. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам:

$$s_1 = t^2 - 6t + 2,\ s_2 = 4t + 5.$$

В какой момент времени скорость первой станет в два раза больше скорости второй?

Привал «Функции»

Исследуйте функцию и постройте ее график.

1. $y = x^2 - 5x + 4.$
2. $y = x^3 - 12x.$
3. $y = -x^3 + x.$
4. $y = x^3 - 3x.$
5. $y = -x^3 + 3x + 5.$

6. $y = x^3 - 6x^2 + 16$.
7. $y = 2x^3 - 6x + 4$.
8. $y = x^3 + x^2 - 5x - 3$.
9. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$.
10. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$.

Привал «График»

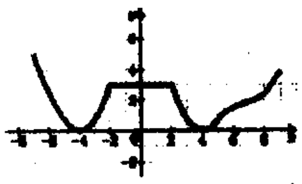


Рисунок 5

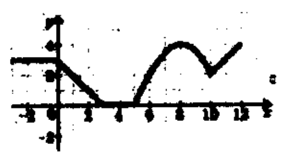


Рисунок 6

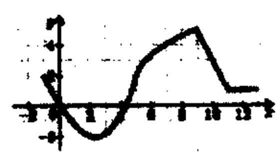


Рисунок 7

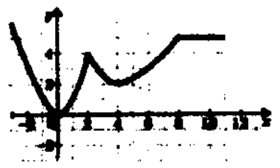


Рисунок 8

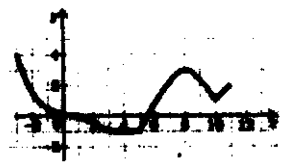


Рисунок 9

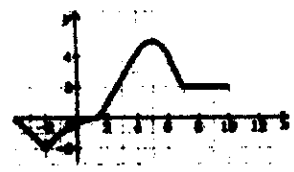


Рисунок 10

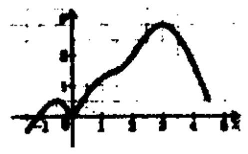


Рисунок 11

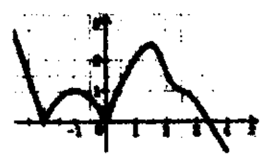


Рисунок 12

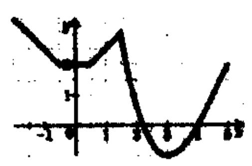


Рисунок 13

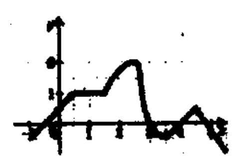


Рисунок 14

Рисунок 15

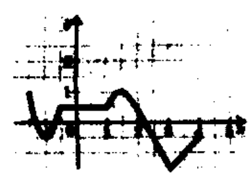


Рисунок 16

На рисунках 5-16 изображены графики функций.
Укажите:

а) промежутки, где производная функции положительна;

б) критические точки функции;

в) точки экстремума функции.

Привал «Меткий стрелок»

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

на отрезке [- 1; 2].

2. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

в точке с абсциссой $x = -2$.

3. Постройте график функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^4 - 2x^2 + 5$$

на отрезке [- 2; 2].

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8см.

Найдите длину каждого катета, если площадь треугольника должна быть наибольшей.

6. Напишите уравнение касательной к кривой

$$y = x^4 - 2x^2 + 5$$

в точках ее пересечения с осью Ox.

7. Докажите, что из всех прямоугольников с площадью 400 см^2 квадрат имеет наименьший периметр.

8. Найдите высоту равнобедренного треугольника с боковой стороной 12 см, имеющего наибольшую площадь.

9. Назовите по следующим данным промежутки возрастания, убывания, точки максимума и минимума функции:

а)

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		- 1		3	

б)

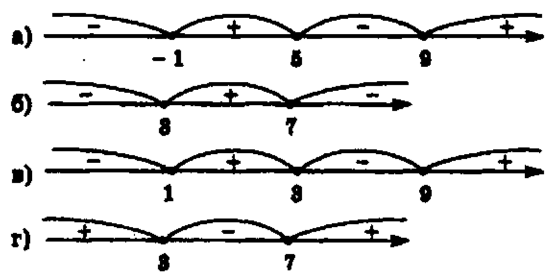
x	$(-7;1)$	1	(1; 6)	6	(6; 7)
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		10		- 3	

в)

x	(- 3; 0)	0	(0;4)	4	(4; 8)	8	$(8;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$f(x)$		-3		-5		6	

10. Какая из следующих схем



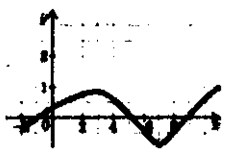
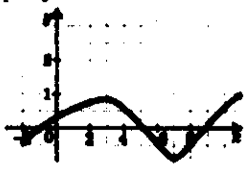


Рисунок 17

верно отражает знак производной функции $y = f'(x)$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 17?



11. Укажите на графике функции $y = f(x)$ (рис. 18) точки оси абсцисс, в которых $f'(x)=0$

12. Постройте эскиз графика функции $y = g(x)$ для которой точка $x = -3$ является точкой максимума, а точка $x = 4$ – точкой минимума.

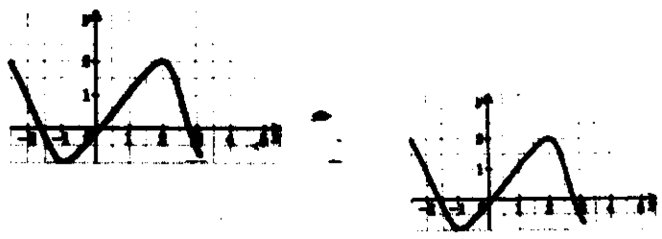


Рисунок 18

Привал «Теория»

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?

2. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

3. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной функции? Как вычислить частное значение производной?

4. Сформулируйте определение сложной функции. Как найти ее производную?

5. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?

6. В чем заключается механический смысл производной?

7. Определение производной второго порядка и механический смысл.

8. Сформулируйте определение возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

9. В чем состоят необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.

10. Как отыскивается наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?