***ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ***

***МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ КНИЖНОГО БИЗНЕСА И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ***

***Методические указания по выполнению самостоятельных работ***

***студентов все специальностей 1 курса по математике***

***Москва, 2013г.***

***Составитель:***

***преподаватель математике, методист Карпова Т.В.***

***Тема 1. Развитие понятия о числе.***

В математике и ее приложениях важную роль играет понятие **ЧИСЛА.** Первоначально все вычисления производились только над целыми числами. Однако дальнейшее развитие математики, механики, физики и астрономии привело к необходимости расширения совокупности чисел. Так возникли понятие рационального, отрицательного т других чисел.

Возьмем какое-нибудь натуральное число, например, 11. Противоположное ему будет число -11. На координатной прямой, оно находится на том же расстоянии от начала отсчета, что и число 11, только 11 находится справа, а -11 - слева. Числа 11 и -11 называются противоположными. Противоположные числа – это числа, отличающиеся только знаком. Понятно, что 0 = -0. Поэтому, число 0 противоположно самому себе.

**Целые числа** – это натуральные числа, противоположные им числа и 0.  
Примеры целых чисел: -8, 111, 0, 1285642, -20051 и т. д.  
**Рациональные числа** – это числа, которые можно представить в виде дроби http://studyport.ru/images/stories/school/math/1.gif, где m и n – целые числа, n ≠0. Пример: http://studyport.ru/images/stories/school/math/2.gif; http://studyport.ru/images/stories/school/math/3.gif; http://studyport.ru/images/stories/school/math/4.gif; 1,01; 12 и т.д. Все целые числа являются рациональными.

Действительно, любое целое число n можно представить в виде дроби http://studyport.ru/images/stories/school/math/5.gif. Например, целое число  
18 – это http://studyport.ru/images/stories/school/math/6.gif.  
  
Две дроби http://studyport.ru/images/stories/school/math/6.gifсчитаются равными, если http://studyport.ru/images/stories/school/math/8.gif.  
  
**Пример:** http://studyport.ru/images/stories/school/math/9.gif равны, так как 3 • 2 = 6 • 1.  
  
Очевидно, что дроби http://studyport.ru/images/stories/school/math/10.gifравны. На этом свойстве основано сокращение дробей. Для того чтобы сократить дробь, находим общий делитель числителя и знаменателя и на этот делитель делим числитель и знаменатель - полученная дробь будет равна исходной.  
**Пример:** Сократить дробь http://studyport.ru/images/stories/school/math/11.gif.  
  
Над рациональными числами операции сложения, умножения и деления определены следующим образом:  
1.Операция сложения:http://studyport.ru/images/stories/school/math/12.gif.  
  
**Пример:** http://studyport.ru/images/stories/school/math/13.gif.  
  
2. Операция умножения: http://studyport.ru/images/stories/school/math/14.gif.  
  
**Пример:** http://studyport.ru/images/stories/school/math/15.gif.  
3. Операция деления:http://studyport.ru/images/stories/school/math/16.gif, то есть, делитель «переворачиваем»  
  
**Пример:** http://studyport.ru/images/stories/school/math/17.gif.  
При сравнении рациональных чисел применяют следующие правила:  
1. Всякое положительное рациональное число всегда больше всякого отрицательного рационального числа  
2. Если два числа http://studyport.ru/images/stories/school/math/18.gifположительны, то число http://studyport.ru/images/stories/school/math/19.gifбольше http://studyport.ru/images/stories/school/math/20.gif, если http://studyport.ru/images/stories/school/math/21.gif, для отрицательных - наоборот.  
  
**Пример:** http://studyport.ru/images/stories/school/math/22.gif, так как 3 • 6 > 5 • 2.

**Задания для закрепления темы №1**:

1. (+8) + (+11)
2. (-7) + (-3)
3. (+19) + (-7)
4. (+15) + (-4) + (-8) + (+9) + (-1)
5. (-2) · (-3)

**Тема 2. Корни, степени, логарифмы**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | |  | | Основные **свойства** арифметических корней.  *Свойство 1.*   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image002.gif. *Свойство 2*.  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image004.gif  *Свойство 3.*   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image006.gif  *Свойство 4.*  Если  а  > b,  то   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image008.gif  *Свойство 5.*  Пусть  m > n.  Если  а > 1,  то  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image010.gif  если  0 < а < 1,  то  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image012.gif | | Замечание. Некоторые формулы с небольшими изменениями можно переписать и для отрицательных чисел. При этом под знаком радикала может появится модуль числа.  Например, если числа  а  и  b  одного знака, свойство 2 запишется так: http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image014.gif     http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image016.gif | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | *Замечание 1*.  Выражение  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image052.gif  имеет смысл при любом значении  a,  так как под корнем стоит выражение   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image054.gif  Однако при сокращении показателей надо учесть знак  a:  если     то   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image058.gif  если же   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image060.gif  то   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image058.gif  например,  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image063.gif  *Замечание 2*.  Выражение  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image065.gif  при четном  n  имеет смысл при любом значении  a.  При этом если  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image056.gif  то   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image067.gif  если же   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image060.gif  то  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image069.gif  Последние два случая можно объединить:   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image071.gif Аналогично, при нечётном  n  верна формула  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image073.gif  при любом значении  a. Объединив вместе оба случая чётности  n  получим:  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image075.gif  *Замечание 3*.  Запись корней в удобной форме. Иногда бывает удобно убрать корень из знаменателя или вынести множитель из-под корня.  *Замечание 4.*  Преобразования выражений с радикалоами. Часто при решении задач приходится, упрощая выражение, извлекать корень частично, т.е. не из всего выражения, а только из его части, избавляться от корней в числителе или знаменателе, приводить корни к одному показателю корня и совершать другие действия, которые помогут произвести дальнейшие преобразования. Избавляясь от корня в числителе или знаменателе, мы умножаем числитель и знаменатель на такое выражение, чтобы извлекся корень, от которого мы хотим избавиться. | | Примеры преобразования радикалов 1)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image077.gif 2)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image079.gif 3)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image081.gif  4)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image083.gif 5)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image085.gif | |  | | Примеры на сравнение чисел, записанных с помощью радикалов  1)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image087.gif  так как   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image089.gif 2)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image091.gif так как  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image093.gif 3)  http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image095.gif  так как   http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.1.2/M_2.1.2.files/image097.gif | |  | | | |
| **Пример 1.** Вычислить  http://www.egematik.ru/img/AR5_30.gif.  **Решение.** 1) Упростим сначала первую часть выражения.  Используя свойство №2, получим  http://www.egematik.ru/img/AR5_31.gif.  Теперь применим свойства №6 и №5:  http://www.egematik.ru/img/AR5_32.gif.  Применим теперь свойство №2:  http://www.egematik.ru/img/AR5_33.gif  В итоге мы получили:  http://www.egematik.ru/img/AR5_34.gif.  2) По свойству №6:  http://www.egematik.ru/img/AR5_35.gif.  Подставим результаты вычислений из 1) и 2) в выражение  http://www.egematik.ru/img/AR5_36.gif  Здесь мы использовали свойства №2 и №8 арифметических корней.  **Ответ:** 2.    Во многих задачах удобно заменить арифметические корни рациональными степенями по свойству №1. Решим предыдущий пример, перейдя от корней к рациональным степеням.  **Решение.** Перейдем от корней к рациональным степеням, начиная с самых внутренних корней:  http://www.egematik.ru/img/AR5_37.gif;  http://www.egematik.ru/img/AR5_38.gif.  Подставим полученные результаты в выражение:  http://www.egematik.ru/img/AR5_39.gif.  **Ответ:** 2.    Решим более сложный пример. Основной метод — переход от арифметических корней к рациональным степеням. Затем широко используются [свойства степеней](http://www.egematik.ru/training/arithmetic3.html).  **Пример 2.** Найти значение выражения  http://www.egematik.ru/img/AR5_1.gif  **Решение.** Разложим числа, встречающиеся в условии задачи, на простые множители:  http://www.egematik.ru/img/AR5_2.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_3.gif  15 = 3 · 5  4 = 22  32 = 25  9 = 32  162 = 2 · 81 = 2 · 34  Вычислим выражение в числителе дроби. Перейдем от арифметических корней к рациональным степеням:  http://www.egematik.ru/img/AR5_4.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_5.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_6.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_7.gif  Вычислим выражение в знаменателе дроби:  http://www.egematik.ru/img/AR5_8.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_9.gif  http://www.egematik.ru/img/AR5_10.gif  Находим значение дроби:  http://www.egematik.ru/img/AR5_1.gifhttp://www.egematik.ru/img/AR5_11.gif  **Ответ:** http://www.egematik.ru/img/AR5_12.gif |
|  |
|  |
|  |
| Начало формы   |  |  | | --- | --- | | |  | | --- | |  | |   Конец формы |

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| **Определение логарифма.**  Пусть  a > 0,  x – любое действительное число.  Мы знаем, что существует степень числа  а  с показателем  x,  т. е. число  b = ax    Это число  b  всегда будет положительным.  В записи числа  b = ax   число  а  называют *основанием*,  x  – *показателем* степени,  b  – *степенью*.  Среди оснований,  а  есть одно исключительное основание  a = 1.  Любая степень этого основания равна  1 :  11 = 1 Если же  a http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.3.1/M_2.3.1.files/image002.gif1,   то степени  ax  будут различны при различных показателях, и мы сможем определить показатель  x  из равенства  ax = b |
| *Логарифмом  числа*  b  *по основанию*  a  называется показатель степени,  в которую надо возвести  a,  чтобы получить число  b. |
| В качестве основания мы будем всегда  брать положительное число  a,  отличное от  1. |
| В записи  b = ax   число  x  - это показатель степени, в которую надо возвести основание  a,  чтобы получить число  b.  Следовательно,  x  - это логарифм числа  b  по основанию  a:  x = loga b. |
| Формулы  ax = b  и  x = logab.  равносильны,  то есть выражают одну и ту же связь между числами  a,  x  и  b  (при  a > 0,  a http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.3.1/M_2.3.1.files/image002.gif1, b > 0). |
| Основное логарифмическое тождество Подставляя в равенство  ax = b  запись числа  x  в виде логарифма, получаем равенство, называемое *основным логарифмическим тождеством*: |
| http://www.ipo.spb.ru/iumk2/MATH_XXI-10/Modules/M_2.3.1/M_2.3.1.files/image004.gif | |
| Представляя в равенстве  x = loga b  выражение  b  в виде степени, получим ещё одно тождество:  x = loga ax | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/4e5d9d261d.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/73e9b67f7d.jpg |  |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/ad79354f73.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/42ee9ba152.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/01386f42c9.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/a962423e5f.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/23b9af8ed5.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/bdc5e37320.jpg |

Основное логарифмическое тождество

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/4e5d9d261d.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/9ead9e8cf8.jpg

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/ad79354f73.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/153c4f9a93.jpg

Логарифм частного — это разность логарифмов

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/a962423e5f.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/7658468f48.jpg

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/73e9b67f7d.jpg

Показатель степени основания логарифмаhttp://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/42ee9ba152.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/f1b5bbc671.jpg, в частности если m = n, мы получаем формулу:http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/23b9af8ed5.jpg, например:http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/2247423abc.jpg

Переход к новому основанию

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/01386f42c9.jpg, частности, если c = b, то http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=%5Clog_b%20b%20=%201, и тогда:

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/bdc5e37320.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/59a182ad09.jpg

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ»

**Вариант 1**

1. Решите уравнение: ;

2. Решите уравнение: 2х = 128;

3. Решите уравнение: 5х + 1 – 5х – 1  =24;

4. Решите неравенство: 54х – 7 > 1;

5. Вычислите: ;

6. Вычислите: ;

7. Определите *х*, если :

8. Решите неравенство: log2(x -5) ≥ 1;

9. Решите уравнение: 2 2х – 5 ∙ 2 х + 4 = 0

**Вариант 2**

1. Решите уравнение: ;

2. Решите уравнение: 3х = 81;

3. Решите уравнение: 7х + 2 + 2∙7х – 1  = 345;

4. Решите неравенство: 22х – 9 < 1;

5. Вычислите: ;

6. Вычислите: ;

7. Определите *х*, если :

8. Решите неравенство: log5 (5 –2x) < 1;

9. Решите уравнение: 2 2х – 6 ∙ 2 х + 8 = 0;

**ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ**

**«КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ»**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| *1* | **- 15** | **7** | **1** |  | **2** | **16** | **1/64** |  | **0; 2** |
| *2* |  | **4** | **1** |  | **1** | **15** | **1/3** |  | **1; 2** |

**Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве**.

**Взаимное расположение прямой и плоскости.  
Основные задачи на прямую и плоскость**

Рассмотрим плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image002.gif и прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image004.gif, заданную точкой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image006.gif и направляющим вектором http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image008.gif.

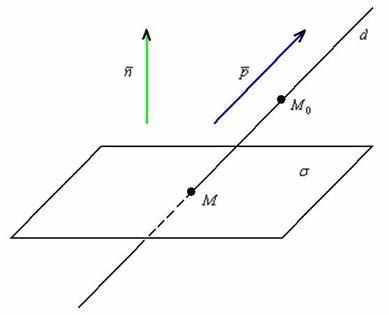
Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости:

1) прямая пересекает плоскость в некоторой точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image010.gif;

2) прямая параллельна плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image012.gif;

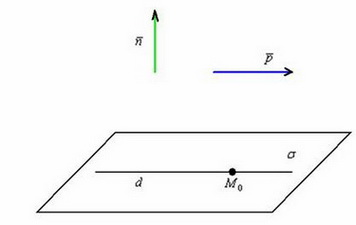
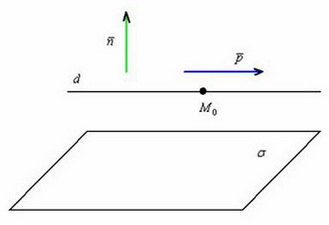
3) прямая лежит в плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image014.gif. Да, так вот нагло взяла, и лежит.

**Как выяснить взаимное расположение прямой и плоскости?**

Изучим аналитические условия, которые позволят нам ответить на данный вопрос. Выполним схематический чертёж, на котором прямая пересекает плоскость:  
  
**Прямая пересекает плоскость** тогда и только тогда, когда её направляющий вектор http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image018.gif не ортогонален вектору нормали http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image020.gif плоскости.

Из утверждения следует, что [**скалярное произведение**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html) вектора нормали и направляющего вектора будет **отлично от нуля**: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image022.gif.

В координатах условие запишется следующим образом:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image024.gif

Если же данные векторы ортогональны, то есть если их [**скалярное произведение**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html) равно нулю: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image026.gif, то прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней:  


Разграничим данные случаи.

**Если прямая параллельна плоскости**, то точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image006_0000.gif (а, значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) не удовлетворяет уравнению плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image032.gif.

Таким образом, условие параллельности прямой и плоскости записывается следующей системой:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image034.gif

**Если прямая лежит в плоскости**, то точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image036.gif (а, значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) удовлетворяет уравнению плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image038.gif.

Аналитические условия данного случая запишутся похожей системой:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image040.gif

Разборки с взаимным расположением прямой и плоскости достаточно примитивны – всего в два шага. Кроме того, на практике можно обойтись даже без всяких систем.

Пример 1

Выяснить взаимное расположение прямой, заданной точкой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image042.gif и направляющим вектором http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image044.gif, и плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image046.gif.

**Решение**: Вытащим вектор нормали плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image048.gif.

Вычислим [**скалярное произведение**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html) вектора нормали плоскости и направляющего вектора прямой: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image050.gif, значит, прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

Подставим координаты точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image042_0000.gif в уравнение плоскости:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image053.gif  
Получено верное равенство, следовательно, точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image055.gif лежит в данной плоскости. Разумеется, и любая точка прямой тоже будет принадлежать плоскости.

**Ответ**: прямая лежит в плоскости

Пример 2

Выяснить взаимное расположение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image057.gif и прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image059.gif.

Это пример для самостоятельного решения. Примерный образец оформления и ответ в конце урока.

После небольшой разминки мускулатуры начинаем накидывать блины на штангу:

**Основные задачи на прямую и плоскость**

Рассмотрим прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image004_0000.gif, которая пересекает плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062.gif. Требуется найти точку, в которой прямая пересекает плоскость: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image064.gif.

Пример 3

Дана прямая http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image066.gif и плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image068.gif. Требуется:

а) доказать, что прямая пересекает плоскость;

б) найти точку пересечения прямой и плоскости;

в) через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070.gif провести плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image072.gif («омега»), перпендикулярную плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074.gif;

г) найти проекцию прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0000.gif на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0000.gif;

д) найти угол между прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0001.gif и плоскостью http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0001.gif.

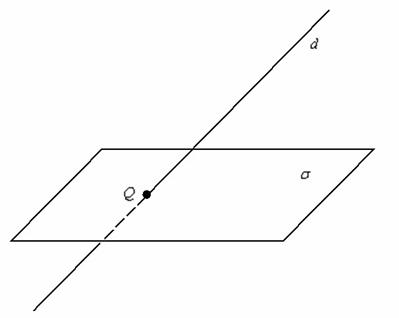
**Решение**: Сначала закрепим задачу о взаимном расположении прямой и плоскости:

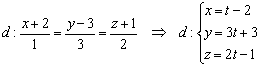
а) Из уравнений прямой находим принадлежащую ей точку и направляющий вектор:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image076.gif

Вектор нормали плоскостиhttp://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image078.gif

Вычислим [**скалярное произведение**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html):  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image080.gif, значит, прямая пересекает плоскость, что и требовалось доказать.

**Как найти точку пересечения прямой и плоскости?**

б) Найдём точку пересечения плоскости и прямой: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image082.gif. 

Сначала перепишем уравнения прямой в параметрической форме:  


Точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image088.gif принадлежит данной прямой, поэтому её координаты http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image090.gif при некотором значении параметра http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image092.gif удовлетворяют параметрическим уравнениям:  
, или одной строчкой: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image096.gif.

С другой стороны, точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image096_0000.gif принадлежит и плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062_0000.gif, следовательно, координаты точки должны удовлетворять уравнению плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image100.gif, то есть должно выполняться равенство:

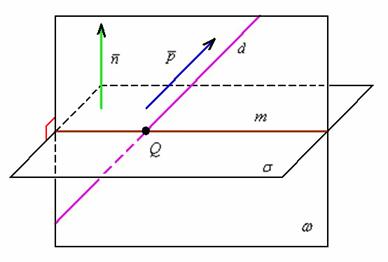
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image102.gif – ну, или попросту параметрические координаты точки нужно подставить в уравнение плоскости.

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и находим «тэ нулевое»:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image104.gif  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image106.gif – полученное значение параметра подставляем в параметрические выражения координат нашей точки:

http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image108.gif

координаты точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image110.gif должны «подходить» и в уравнения прямой и в уравнение плоскости. Проверку несложно выполнить устно.

в) Найдём уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image072_0000.gif, которая перпендикулярна плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0002.gif и проходит через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0002.gif. Выполним схематический чертёж:



Уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image072_0001.gif можно составить **по любой** точке, которая принадлежит прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0003.gif, направляющему вектору http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image115.gif прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0004.gif и вектору нормали http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image118.gif плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0003.gif.

В качестве точки, принадлежащей прямой «дэ», не возбраняется, конечно, взять найденную в предыдущем пункте точку пересечения http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image120.gif, но в произвольной практической задаче она чаще всего не известна. В данном случае, очевидно, точку:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image122.gif.

Уравнение плоскости «омега» составим по точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image124.gif и двум неколлинеарным векторам http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image126.gif:

Таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image130.gif

Проверка опять же довольно простая. Устно находим [**скалярное произведение**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html) нормальных векторов http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image132.gif двух плоскостей. Оно равно нулю, значит, плоскости перпендикулярны. На втором шаге необходимо убедиться, что прямая «дэ» действительно лежит в найденной плоскости «омега». Можно использовать типовой алгоритм, рассмотренный в самом начале урока. Но тут есть другая возможность – устно подставляем координаты двух известных точек http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image134.gif в полученное уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image130_0000.gif. Обе точки «подходят», и это гарантирует, что и вся прямая http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0005.gif лежит в плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image072_0002.gif.

**Как найти уравнения проекции прямой на плоскость?**

г) Что такое проекция прямой на плоскость?

На чертеже http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0006.gif проведена малиновым цветом, а её проекция, прямая http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image138.gif – коричневым цветом. Легко заметить, что проекция задаётся пересечением плоскостей: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image140.gif, и на самом деле ответ уже готов:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image142.gif

Другое дело, что часто требуется представить уравнения прямой в канонической форме. Это стандартная задача, рассмотренная в Примерах №№9,10 урока [**Уравнения прямой в пространстве**](http://www.mathprofi.ru/uravnenija_pryamoi_v_prostranstve.html).

Точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image144.gif, принадлежащая проекции, уже известна, осталось найти её направляющий вектор:

Таким образом, канонические уравнения проекции:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image148.gif

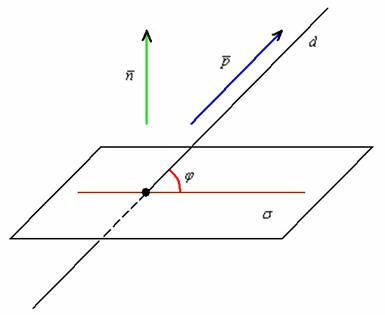
Обратите внимание, что на практике для решения данной задачи, в общем-то, **не надо** находить именно точку пересечения http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image150.gif (лишняя работа). Нас устроит **любая** точка, принадлежащая проекции. Красавица подбирается из системы http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image142_0000.gif Есть и другой способ нахождения проекции, связанный с построением перпендикуляра к плоскости «сигма»

– находим точку пересечения прямой и плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image064_0000.gif (вот в этом способе уже обязательно находим);  
– из произвольной точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image153.gif (не совпадающей с точкой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image150_0000.gif) опускаем перпендикуляр http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image156.gif на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0004.gif;  
– основание перпендикуляра http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image159.gif находим как пересечение прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image156_0000.gif и плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image074_0005.gif;  
– составляем канонические уравнения проекции http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image138_0000.gif по двум точкам: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image163.gif.

**Как найти угол между прямой и плоскостью?**

д) Логическое продолжение темы.

Если прямая http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image004_0001.gif не перпендикулярна плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062_0001.gif, то **углом http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image165.gif между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image004_0002.gif и её проекцией на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062_0002.gif**. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90 градусов.

Продолжим эксплуатацию геометрического инвентаря:                            
  
Справедлива следующая формула синуса угла между прямой и плоскостью:

Формула угла между прямой и плоскостью

Таким образом, для нахождения данной  угла достаточно знать лишь нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой. При необходимости вывод формулы можно посмотреть, например, в учебнике Атанасяна-Базылева. А мы займёмся практическим решением.

[**Скалярное произведение векторов**](http://www.mathprofi.ru/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov.html) уже найдено в пункте «а»: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image171.gif. Обратите внимание, что в формуле скалярное произведение находится под знаком модуля, который «съедает» возможный «минус».

Вычислим длины векторов:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image173.gif

По формуле: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image175.gif

На иррациональность в знаменателе забиваем, поскольку нам нужен сам угол:

http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image177.gif

Выложим в ряд головы очередного Змея-Горыныча:

**Ответ**:  
а) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image179.gif, значит, прямая пересекает плоскость;  
б) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image110_0000.gif;  
в) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image130_0001.gif;  
г) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image148_0000.gif;  
д) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image177_0000.gif

Переходим к рассмотрению частного случая – когда:

**Прямая перпендикулярна плоскости**

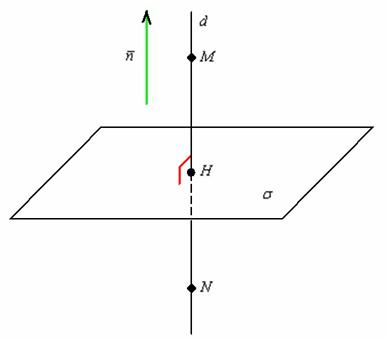
Пример 4

Дана плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image182.gif и точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image184.gif. Требуется:

а) составить канонические уравнения прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image070_0007.gif, проходящей через точку http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image186.gif, перпендикулярно данной плоскости;

б) найти точку http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image188.gif пересечения перпендикулярной прямой и плоскости;

в) найти точку http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image190.gif, симметричную точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image186_0000.gif относительно плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062_0003.gif.

Выполним схематический чертёж и коротко разберём алгоритм решения:  
  
а) **Как составить уравнения перпендикулярной прямой** «дэ», думаю, объяснять не нужно. Подсказка есть прямо на чертеже.

б) Точка пересечения http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image188_0000.gif перпендикулярной прямой и плоскости находится обычным способом (см. п. «б» предыдущего примера). К слову, точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image197.gif является проекцией прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image004_0003.gif на плоскость «сигма».

в) Рассмотрим отрезок http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image200.gif. Если точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image190_0000.gif симметрична точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image186_0001.gif относительно плоскости, то, очевидно http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image204.gif. Точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image197_0000.gif делит отрезок http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image200_0000.gif пополам. По условию нам дан один из концов отрезка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image186_0002.gif, а в предыдущем пункте найдена середина http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image197_0001.gif. Таким образом, по [**формулам деления отрезка пополам**](http://www.mathprofi.ru/delenie_otrezka_v_dannom_otnoshenii.html), нетрудно найти координаты нужной точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image190_0001.gif.

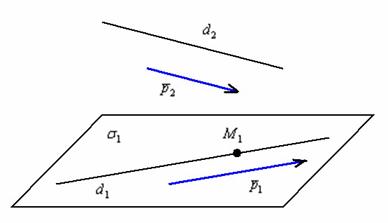
Вопрос очевидный, но на всякий случай коснёмся обратной задачи: **как составить уравнение плоскости, которая проходит через данную точку перпендикулярно данной прямой?** Берём направляющий вектор прямой – он же является вектором нормали плоскости.

**можно ли составить уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку, не принадлежащую прямой?** Да, конечно, причём плоскость будет определена однозначно.

Все задачи на пересечение прямой и плоскости, пожалуй, исчерпаны, теперь рассмотрим что-нибудь на прямую, параллельную плоскости.

Пример 5

Даны скрещивающиеся прямые http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image209.gif. Через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image211.gif провести плоскость, параллельную прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image213.gif.

**Решение**: Задача простая, но всё равно выполним схематический чертёж:  
  
По условию требуется найти уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image217.gif, которая проходит через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image211_0000.gif параллельно второй прямой.

Уравнение плоскости составим по точке и двум неколлинеарным векторам.

Поскольку прямая http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image211_0001.gif должна лежать в плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image217_0000.gif, то нам подойдёт произвольная точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image219.gif, принадлежащая первой прямой, и её направляющий вектор:  
http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image221.gif

С другой стороны, плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image217_0001.gif должна быть параллельна прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image224.gif, а, значит, и её направляющему вектору http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image226.gif.

Так как прямые скрещиваются, то их направляющие векторы http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image228.gif будут не коллинеарны.

Уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image217_0002.gif составим по точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image230.gif и двум неколлинеарным векторам http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image232.gif:

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image236.gif

Используя материалы начала урока, можно выполнить проверку – убедиться, что первая прямая действительно лежит в полученной плоскости, а вторая прямая – параллельна ей.

Аналогично можно составить уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image238.gif, которая проходит через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image213_0000.gif параллельно прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image211_0002.gif. Решение будет точно таким же, изменится только точка – необходимо взять какую-нибудь точку, принадлежащую второй прямой. Очевидно, что данные плоскости будут параллельны: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image241.gif.

***Задачи для самоконтроля темы***

1) Из точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image243.gif опустить перпендикуляр на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image245.gif

2) Найти проекцию точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image247.gif на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image249.gif

3) Через прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image251.gif провести плоскость, перпендикулярную к плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image253.gif.

4) Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image255.gif и http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image257.gif

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image259.gif перпендикулярно плоскостям http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image261.gif и http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image263.gif.

6) Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image266.gif на плоскость http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image268.gif

7) Найти уравнение плоскости, зная, что точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image270.gif служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

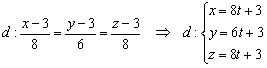
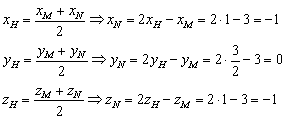
8) Найти расстояние от точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image278.gif до прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image280.gif.

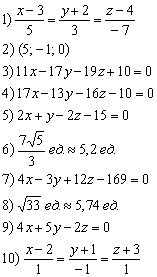
9) Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image282.gif.

10) Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image284.gif на прямую http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image286.gif

Решения и ответы:

*Пример 2:* ***Решение****: Найдем направляющий вектор и точку, принадлежащую прямой:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image288.gif*  
*Найдём вектор нормали плоскости:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image290.gif.*  
*Вычислим скалярное произведение:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image292.gif, значит, прямая параллельна плоскости или лежит в ней.*  
*Подставим координаты точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image294.gif в уравнение плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image296.gif:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image298.gif*  
*Получено неверное равенство, значит, точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image300.gif не лежит в плоскости http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image062_0004.gif, и все точки прямой не лежат в данной плоскости.*  
***Ответ****: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image012_0000.gif*

*Пример 4:* ***Решение:***  
*а) Найдём вектор нормали плоскости: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image303.gif. Уравнения перпендикулярной прямой составим по точке http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image184_0000.gif и вектору нормали http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image303_0000.gif:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image306.gif*  
*б) Перепишем уравнения прямой в параметрической форме:*  
**  
*Основание перпендикуляра http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image197_0002.gif принадлежит данной прямой, и координатам данной точки соответствует определённое значение параметра: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image311.gif. Но точка http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image197_0003.gif также принадлежит и плоскости. Подставим параметрические координаты в уравнение плоскости:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image313.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image315.gif – подставим найденное значение параметра в параметрические координаты точки:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image317.gif*  
*в) Координаты симметричной точки http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image190_0002.gif найдем по формулам координат середины отрезка:*  
**  
*Таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image322.gif*  
***Ответ:***  
*а) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image306_0000.gif;*  
*б) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image324.gif;*  
*в) http://www.mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_i_ploskostju_clip_image322_0000.gif.*

***Ответы на 10 задач****:*  


**Тема 4. Элементы комбинаторики.**

В математике и ее приложениях часто приходится иметь дело с различного рода множествами и подмножествами: устанавливать их связь между элементами каждого, определять число множеств или их подмножеств, обладающих заданным свойством. Такие задачи приходится рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической телефонной связи, работы морских портов, при выявлении связей внутри сложных молекул, генетического кода, а также в лингвистике, в автоматической системе управления, значит и в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями.

Поговорим об одном из разделов теории вероятности – *комбинаторике.*

**Комбинаторика -** ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов. Еще комбинаторику можно понимать как перебор возможных вариантов. Комбинаторика возникла в 17 веке. Долгое время она лежала вне основного русла развития математики.  
С задачами, в которых приходилось выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее положение охотников во время охоты, воинов – во время битвы, инструментов - во время работы.  
Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие, в первую очередь, умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника.  
Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т.д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных. Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т.д.  
Комбинаторика как наука стала развиваться в 18 веке параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитать число различных комбинаций элементов. Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж.Кардано, Н.Тарталье (1499-1557), Г.Галилею (1564-1642) и французс- ким ученым Б.Паскалю (1623-1662) и П.Ферма.  
Комбинаторику как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г.Лейбниц в своей работе “ Об искусстве комбинаторики ”, опубликованной в 1666 году. Он также впервые ввел термин “комбинаторика”. Значительный вклад в развитие комбинаторики внес Л.Эйлер. В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика “добилась” новых успехов. В настоящее время в образовательный стандарт по математике включены основы комбинаторики, решение комбинаторных задач методом перебора, составлением дерева вариантов (еще его называют “дерево возможностей”) с применением правила умножения. Так, например, “дерево возможностей” помогает решать разнообразные задачи, касающиеся перебора вариантов происходящих событий. Каждый путь по этому “дереву” соответствует одному из способов выбора, число способов выбора равно числу точек в нижнем ряду “дерева”. Правило умножения заключается в том, что для того, чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В. В задачах по комбинаторике часто применяется такое понятие как факториал (в переводе с английского “factor” - “множитель”).  
Итак, произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n-факториалом и пишут: n!=1 2 3 … (n-1) n   
В комбинаторике решаются задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания.

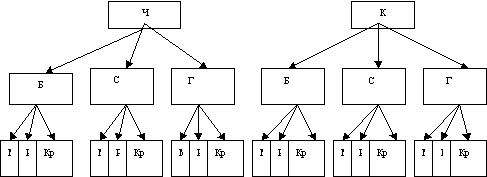
1. В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?

*Рассмотрим 3 способа решения задачи*

1 способ. Перечислим возможные варианты

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Чай(Ч) Компот (К) | Мясо с макаронами(М) | Рыба с картошкой(Р) | Курица с рисом(Кр) |
| Борщ (Б) | БМЧ/ БМК | БРЧ/БРК | БКрЧ/БКрК |
| Солянка(С) | СМЧ/ СМК | СРЧ/СРК | СКрЧ/СКрК |
| Грибной суп(Г) | ГМЧ/ГМК | ГРЧ/ГРК | ГКрЧ/ГКрК |

**18 вариантов.**2 способ. Дерево возможностей.



3 способ. Используя правило умножения, получаем: 3х3х2=1

2. Свете на день рождения подарили 4 плюшевых игрушки, 2 мяча и 5 кукол. Мама положила все игрушки в большую коробку. Сколькими способами Света сможет достать из коробки 1 плюшевую игрушку, 1 мяч и 1 куклу?

1 способ. Обозначим мячи - М1, М2, игрушки- И1,И2,И3, И4, куклы- К1,К2, К3, К4, К5.  
Перечислим возможные варианты:

М1-И1-К1, М1-И1-К2, М1-И1-К3, М1-И1-К4, М1-И1-К5,  
М1-И2-К1, М1-И2-К2, М1-И2-К3, М1-И2-К4, М1-И2-К5,  
М1-И3-К1, М1-И3-К2, М1-И3-К3, М1-И3-К4, М1-И3-К5,  
М1-И4-К1, М1-И4-К2, М1-И4-К3, М1-И4-К4, М1-И4-К5  
М2-И1-К1, М2-И1-К2, М2-И1-К3, М2-И1-К4, М2-И1-К5,  
М2-И2-К1, М2-И2-К2, М2-И2-К3, М2-И2-К4, М2-И2-К5,  
М2-И3-К1, М2-И3-К2, М2-И3-К3, М2-И3-К4, М2-И3-К5,  
М2-И4-К1, М2-И4-К2, М2-И4-К3, М2-И4-К4, М2-И4-К5

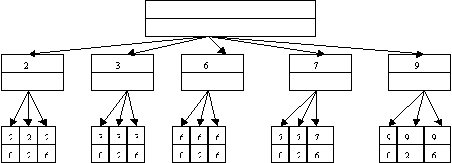
**Ответ: 40 вариантов.**2 способ. Используя правило умножения, получаем: 2х4х5= 40

3. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9?

1 способ.  
Перечислим возможные варианты.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 6 |
| 2 | 20 | 22 | 26 |
| 3 | 30 | 32 | 36 |
| 6 | 60 | 62 | 66 |
| 7 | 70 | 72 | 76 |
| 9 | 90 | 92 | 96 |

2 способ. Дерево возможностей.



3 способ. Используя правило умножения, **получаем: 5х3=15 .**

4. Мисс Марпл, расследуя убийство, заметила отъезжающее от дома мистера Дэвидсона такси. Она запомнила первую цифру “2”. В городке номера машин были трехзначные и состояли из цифр 1,2,3,4 и 5. Скольких водителей, в худшем случае, ей придется опросить, чтобы найти настоящего убийцу?

1 способ. Перечислим возможные варианты номеров такси:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 |
| 2 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 |
| 3 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 |
| 4 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 |
| 5 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 |

**Ответ: 25 человек.**

2 способ. Используя правило умножения, получаем: 5х5=25

5. Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

1 способ. Пронумеруем стулья, на которых должен сесть каждый, и будем считать, что они рассаживаются поочередно:

№1 - Саша - есть возможность выбрать из 5 вариантов (стульев)  
№2 - Петя - 4 варианта  
№3- Денис - 3 варианта  
№4- Оля - 2 варианта  
№5 - Настя- 1 вариант

Используя правило умножения, получаем: **5х4х3х2х1=120**

2 способ. Решаем, используя понятие факториала: 5!=120

6. Из учащихся пяти 11 классов нужно выбрать двоих дежурных. Сколько пар дежурных можно составить (ученики в паре не должны быть из одного класса)?

1 способ. Перечислим возможные варианты состава пары:

11А-11Б, 11А-11В, 11А-11Г, 11А-11Д,  
11Б-11В, 11Б-11Г, 11Б-11Д, 11В-11Г, 11В-11Д, 11Г-11Д

**Ответ: 10 пар.**

2 способ. Из пяти классов нужно выбрать 2 дежурных.  
Число элементарных событий = http://festival.1september.ru/articles/416112/Image105.gif= 10

7. В 8 “а” классе лучше всех математику знают 5 учеников: Вася, Дима, Олег, Катя и Аня. На олимпиаду по математике нужно отправить пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки. Сколькими способами учительница может эту пару выбрать?

1 способ. Обозначим имена детей первыми заглавными буквами.  
Получаем следующие пары:  
В-К, В-А, Д-К, Д-А, О-К, О-А.

**Ответ: 6 пар.**

2 способ. Мальчиков 3, из них 1 можно выбрать http://festival.1september.ru/articles/416112/Image106.gif, девочек 2, из них можно 1 выбрать http://festival.1september.ru/articles/416112/Image107.gif, используя правило умножения, получаем:  
http://festival.1september.ru/articles/416112/Image106.gifх http://festival.1september.ru/articles/416112/Image108.gif= 6

8. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы.

Сколькими способами могут распределится места по окончании соревнований?  
Обозначим участников по первой заглавной букве страны и пронумеруем: Р1, И2, У3, Н4,К5, Ф6  
Р1 - имеют возможность занять с1-6 места, т.е. 6 вариантов  
И2 - 5 вариантов  
У3- 4 варианта  
Н4- 3 варианта  
К5- 2 варианта  
Ф6- 1 вариант  
Используя правило умножения, получаем: **6х5х4х3х2х1= 720**

2 способ. Используя понятие факториала, получаем: 6!=720

9. В 9 “б” классе 6 человек (Галя, Света, Катя, Оля, Максим, Витя) учатся на все пятерки. Департамент образования премировал лучших учащихся путевками в Анапу. Но, к сожалению, путевок всего четыре. Сколько возможно вариантов выбора учеников на отдых?

Обозначим первыми заглавными буквами имен учащихся.  
Возможны следующие тройки:  
Г-С-К-О, Г-С-К-М, Г-С-К-В,  
Г-С-О-М, Г-С-О-В, Г-С-М-В  
С-К-О-М, С-К-О-В, С-К-М-В,  
К-О-М-В, С-О-М-В, Г-К-О-В,   
Г-К-О-В, Г-О-М-В, Г-К-М-В

2 способ. Из 6 человек нужно выбрать 4, число элементарных событий равно http://festival.1september.ru/articles/416112/Image109.gif= 15

10. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

Вычислим, сколько четверок из 7 дисков можно составить у Пети:  
http://festival.1september.ru/articles/416112/Image110.gif=35, число четверок у Вали из 9 дисков -http://festival.1september.ru/articles/416112/Image111.gif= 126  
По правилу умножения находим число обменов **35х126=4410**

***ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОТРОЛЯ ТЕМЫ 4:***

1. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

2. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

Из 6 изумрудов 3 он может выбрать http://festival.1september.ru/articles/416112/Image116.gif=20 способами, из 9 алмазов 5 -http://festival.1september.ru/articles/416112/Image117.gif=126, из 7 сапфиров 2 - http://festival.1september.ru/articles/416112/Image118.gif=21. По правилу умножения находим число вариантов 20х126х21=**52920**

3. На выборах победили 9 человек - Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

4. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

5. В студенческом общежитии в одной комнате живут трое студентов Петя, Вася и Коля. У них есть 6 чашек, 8 блюдец и 10 чайных ложек (все принадлежности отличаются друг от друга). Сколькими способами ребята могут накрыть стол для чаепития (так, что каждый получит чашку, блюдце и ложку)?

6. В огороде у бабушки растут 3 белые, 2 алые и 4 чайных розы. Сколькими различными способами можно составить букет из трех роз разного цвета?

**ОТВЕТЫ**

**1.** Из 5 офицеров выбрать 2 можно с помощью числа сочетаний http://festival.1september.ru/articles/416112/Image112.gif=10 способами, из 8 сержантов 4 - http://festival.1september.ru/articles/416112/Image113.gif=70, из 70 рядовых 15 -http://festival.1september.ru/articles/416112/Image114.gif. По правилу умножения находим число выбора отряда:  
10х70хhttp://festival.1september.ru/articles/416112/Image115.gif= **700хhttp://festival.1september.ru/articles/416112/Image115.gif**

**2.** Из 6 изумрудов 3 он может выбрать http://festival.1september.ru/articles/416112/Image116.gif=20 способами, из 9 алмазов 5 -http://festival.1september.ru/articles/416112/Image117.gif=126, из 7 сапфиров 2 - http://festival.1september.ru/articles/416112/Image118.gif=21. По правилу умножения находим число вариантов 20х126х21=**52920**

**3.** Здесь речь идет о размещениях http://festival.1september.ru/articles/416112/Image119.gif  
Можно было решать по-другому. На должность председателя выбираем из 9 человек, на заместителя - из 8, на профорга - из 7  
По правилу умножения получаем **9х8х7=504**

**4.** На должность директора выбираем из 25 человек, на завуча начальной - из 24, завуча среднего звена - из 23, завуча по воспитательной работе - 22. По правилу умножения получаем:  
25х24х23х22 = **303600**  
Или, зная формулу размещения, получаем http://festival.1september.ru/articles/416112/Image120.gif

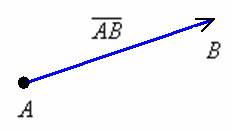
**5.** Для Пети набор можно набрать 6х8х10=480 способами, для Васи - 5х7х9=315, для Коли - 4х6х8=192. По правилу умножения получаем  
480х315х192=**29030400** способами.

**6.** Обозначим белые - Б1, Б2, Б3, алые - А1,А2, чайные - Ч1, Ч2, Ч3,Ч4  
Перечислим возможные варианты  
Б1-А1-Ч1, Б1-А1-Ч2, Б1-А1-Ч3, Б1-А1-Ч4, Б1-А2-Ч1,Б1-А2-Ч2, Б1-А2-Ч3, Б1-А2-Ч4  
Б2- А1-Ч1, Б2-А1-Ч2, Б2-А1-Ч3, Б2-А1-Ч4, Б2-А2-Ч1,Б2-А2-Ч2, Б2-А2-Ч3, Б2-А2-Ч4  
Б3- А1-Ч1, Б3-А1-Ч2, Б3-А1-Ч3, Б3-А1-Ч4, Б3-А2-Ч1,Б3-А2-Ч2, Б3-А2-Ч3, Б3-А2-Ч4

**Ответ: 24 варианта.**

**ТЕМА 5: КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ**

**Понятие вектора. Свободный вектор**

Сначала повторим школьное определение вектора. **Вектором** называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:  
  
В данном случае началом отрезка является точка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004.gif, концом отрезка – точка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006.gif. Сам вектор обозначен через http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008.gif. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010.gif, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери института или выйти из дверей института – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012.gifУ такого вектора конец и начало совпадают.

***!!! Примечание:*** *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

**Обозначения:** Многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0000.gif и сказали, там же вверху еще стрелку ставят! Верно, можно записать со стрелкой: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image014.gif, но допустима и **запись http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0001.gif, которую я буду использовать в дальнейшем**. То была стилистика, а сейчас о способах записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image018.gif и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

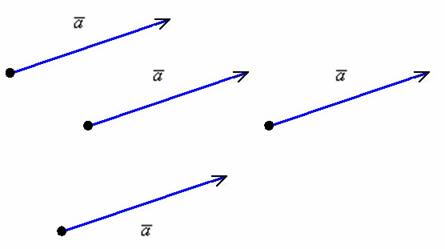
2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image020.gif В частности, наш вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0002.gif можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022.gif.

**Длиной** или **модулем** ненулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0003.gif называется длина отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image024.gif. Длина нулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0000.gif равна нулю. Логично.

Длина вектора обозначается знаком модуля: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image026.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image028.gif

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

То были элементарные сведения о векторе, знакомые всем школьникам. В аналитической же геометрии рассматривается так называемый **свободный вектор**.

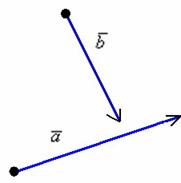
Если совсем просто – **вектор можно отложить от любой точки**:  


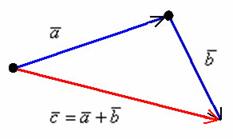
Такие векторы мы привыкли называть равными (определение равных векторов будет дано ниже), но чисто с математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР или **свободный вектор**. Итак, **свободный вектор** – это **множество** одинаковых  направленных отрезков. Школьное определение вектора, данное в начале параграфа: «Вектором называется направленный отрезок…», подразумевает конкретный направленный отрезок, взятый из данного множества, который привязан к определённой точке плоскости или пространства.

**Действия с векторами. Коллинеарность векторов**

В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и др.* Для затравки повторим два правила, которые особенно актуальны для решения задач аналитической геометрии.

**Правило сложения векторов по правилу треугольников**

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032.gif:  


Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0000.gif от *конца* вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0001.gif:  


Суммой векторов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0001.gif является вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040.gif. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0003.gif, а затем по вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0002.gif. Тогда сумма векторов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image042.gif представляет собой вектор результирующего пути http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image044.gif с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов.Кстати, если вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0003.gif отложить от *начала* вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0004.gif, то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

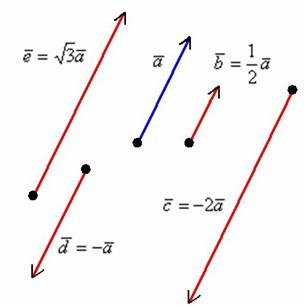
**Умножение вектора на число**

Сначала о коллинеарности векторов. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Грубо говоря, речь идёт о параллельных векторах. Но применительно к ним всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Представьте два коллинеарных вектора. Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

**Обозначения:** коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image046.gifпри этом возможна детализация: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image048.gif (векторы сонаправлены) или http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image050.gif (векторы направлены противоположно).

**Произведением** ненулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0005.gif на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052.gif является такой вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0004.gif, длина которого равна http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image055.gif, причём векторы  http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0006.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0005.gif сонаправлены при http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image058.gif и противоположно направлены при http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image060.gif.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:  


Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0000.gif отрицательный,  то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image065.gif или http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image067.gif, то длина вектора уменьшается. Так, длина вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image069.gif в два раза меньше длины вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071.gif. Если множитель http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0001.gif по модулю больше единицы, то длина вектора увеличивается в http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0002.gif раз.

3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image073.gif. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно  коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

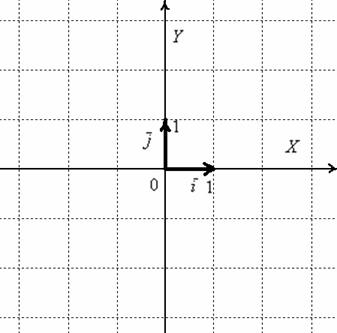
4) Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image075.gif сонаправлены. Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image078.gif также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

**Какие векторы являются равными?**

**Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину**. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

**Координаты вектора на плоскости и в пространстве**

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image080.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image082.gif:



Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image080_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image082_0000.gif **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны. Рекомендую потихоньку привыкать к терминам: вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

**Обозначение:** ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image088.gif.

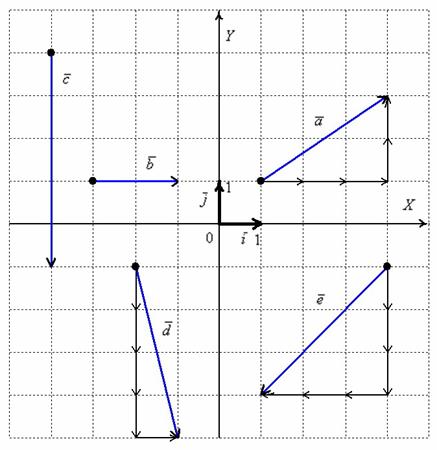
Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это своеобразный фундамент, на котором кипит полная и насыщенная геометрическая жизнь.

Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

**Обозначение:** базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image090.gif. Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

**Любой** вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092.gif плоскости **единственным образом** выражается в виде:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094.gif, где http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image096.gif – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094_0000.gif называется **разложением вектора** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092_0000.gif**по базису** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image090_0000.gif.

Ужин подан:



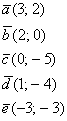
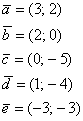
Начнем с первой буквыhttp://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image102.gif алфавита: . По чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:  
1) правило умножения вектора на число: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image104.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image106.gif;  
2) сложение векторов по правилу треугольника: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image108.gif.

А теперь мысленно отложите вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0000.gif от любой другой точки плоскости. Совершенно очевидно, что его разложение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111.gif будет «неотступно следовать за ним». Вот она, свобода вектора – вектор «всё носит при себе». Это свойство, разумеется, справедливо для любого вектора. Забавно, что сами базисные (свободные) векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113.gif не обязательно откладывать от начала координат, один можно нарисовать, например, слева внизу, а другой – справа вверху, и от этого ничего не изменится! Правда, делать так не нужно, поскольку преподаватель тоже проявит оригинальность и нарисует вам «зачтено» в неожиданном месте.

Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117.gif иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115_0000.gif сонаправлен с базисным вектором http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119.gif, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117_0000.gif направлен противоположно по отношению к базисному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image122.gif.  У данных векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image124.gif  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image126.gif  
А базисные векторы, к слову, так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image128.gif (по сути, они выражаются сами через себя).

И, наконец: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image130.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image132.gif. Так, разложения векторов «дэ» и «е» преспокойно записываются в виде суммы: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image134.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image136.gif. Переставьте слагаемые местами и проследите по чертежу, как чётко в этих ситуациях работает старое доброе сложение векторов по правилу треугольника.

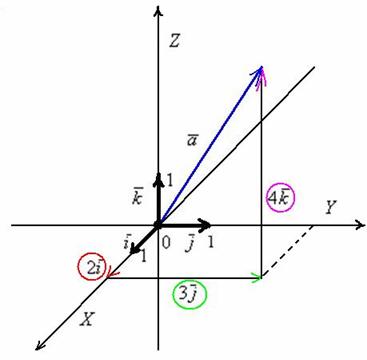
Рассмотренное разложение вида http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094_0001.gif иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

 Или со знаком равенства: 

Сами базисные векторы записываются так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image143.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image145.gif

То есть, в круглых скобках указываются координаты вектора. В практических задачах используются все три варианта записи.

**Строго на первом месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119_0000.gif, **строго на втором месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image122_0000.gif. Действительно, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image148.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image150.gif – это ведь два разных вектора.

Трехмерные чертежи выполнять тяжко, поэтому ограничусь одним вектором, который для простоты отложу от начала координат:  


Перед вами *ортонормированный* базис http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image154.gif трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image156.gif данного базиса попарно ортогональны: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image158.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image160.gif. Ось http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image162.gif наклонена под углом 45 градусов только для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства. О том, как правильно выполнять плоские и трехмерные чертежи на клетчатой бумаге, читайте в самом начале методички [**Графики и свойства функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html).

**Любой** вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092_0001.gif трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image154_0000.gif:   
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image166.gif, где http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image168.gif – координаты вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image170.gif (числа) в данном базисе.

Пример с картинки: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172.gif. Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174.gif (красная стрелка), http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image176.gif (зеленая стрелка) и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178.gif (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх, векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180.gif.  Вектор суммы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0001.gif начинается в исходной точке отправления (начало вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174_0000.gif) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178_0000.gif).

Все векторы трехмерного пространства, естественно, тоже свободны, попробуйте мысленно отложить вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0002.gif от любой другой точки, и вы поймёте, что его разложение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180_0000.gif  «останется при нём».

Аналогично плоскому случаю, помимо записи http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172_0000.gif широко используются версии  со скобками: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image186.gif либо http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image188.gif.

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры:  
вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image190.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image192.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image194.gif;  
вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image196.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image198.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image200.gif;  
вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image202.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image204.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image206.gif.

Базисные векторы записываются следующим образом:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image208.gif

**Простейшие задачи аналитической геометрии.  
Действия с векторами в координатах**

**Как найти вектор по двум точкам?**

Если даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004_0000.gif, то вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0000.gif имеет следующие координаты:  
Как составить вектор по двум точкам на плоскости

Если даны две точки пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0001.gif, то вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0001.gif имеет следующие координаты:  
Как составить вектор по двум точкам в пространстве

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Пример 1

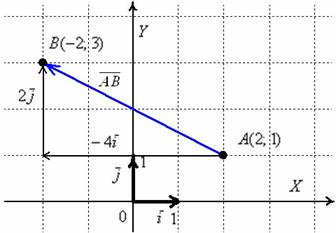
Даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image018_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image020_0000.gif. Найти координаты вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0002.gif

**Решение:** по соответствующей формуле:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0007.gif

Как вариант, можно было использовать следующую запись:   
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image024_0000.gif

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image026_0000.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image028_0000.gif



Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

**Координаты точек** – это обычные координаты в прямоугольной системе координат.Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

**Координаты же вектора** – это его разложение по базису http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0006.gif, в данном случае http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image034.gif. Любой вектор является свободным, поэтому при необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости. Интересно, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0007.gif.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image036.gif, а **смысл координат** абсолютно **разный**, и вам следует хорошо понимать эту разницу.

Пример 2

а) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image038.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0001.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0003.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0001.gif.  
б) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image043.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image045.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image047.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image049.gif  
в) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image051.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image053.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image055_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image057.gif.  
г) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image059.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image061.gif.

**Как найти длину отрезка?**

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image002_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004_0001.gif, то длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064.gif можно вычислить по формуле Формула длины отрезка на плоскости

Если даны две точки пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0002.gif, то длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0000.gif можно вычислить по формуле Формула длины отрезка в пространстве

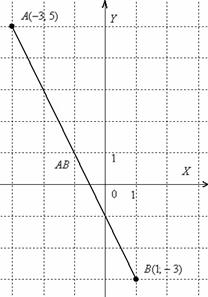
***Примечание:*** *Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image070.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image072.gif, но более стандартен первый вариант*

Пример 3

Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image074.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0002.gif. Найти длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0001.gif.

**Решение:** по соответствующей формуле:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image077.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image079.gif

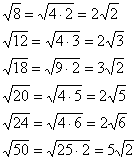
Для наглядности выполню чертёж  


Отрезок http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0002.gif – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image083.gif можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

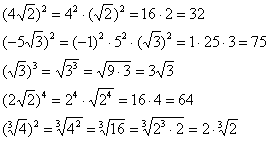
Да, решение короткое, но в нём есть ещё пара важных моментов, которые хотелось бы пояснить:

В ответе ставим размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это, миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Обратите внимание на **важный технический приём** – **вынесение множителя из-под корня**. В результате вычислений у нас получился результат http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image085.gif и хороший математический стиль предполагает  вынесение множителя из-под корня (если это возможно). Подробнее процесс выглядит так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image087.gif. Конечно, оставить ответ в виде http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image085_0000.gif не будет ошибкой – но недочетом-то уж точно и весомым аргументом для придирки со стороны преподавателя.

Вот другие распространенные случаи:  


Нередко под корнем получается достаточно большое число, например http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image091.gif. Как быть в таких случаях? На калькуляторе проверяем, делится ли число на 4: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image093.gif. Да, разделилось нацело, таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image095.gif. А может быть, число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image097.gif ещё раз удастся разделить на 4? http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image099.gif. Таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image101.gif. У числа http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image103.gif последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image105.gif. В результате:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image107.gif Готово.

**Вывод:** если под корнем получается неизвлекаемое нацело число, то пытаемся вынести множитель из-под корня – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т.д.  
Давайте заодно повторим возведение корней в квадрат и другие степени:  


Пример 4

Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113_0000.gif. Найти длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0004.gif.

Решение и ответ в конце урока.

**Как найти длину вектора?**

Если дан вектор плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115_0001.gif, то его длина вычисляется по формуле Формула длины вектора на плоскости.

Если дан вектор пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119_0001.gif, то его длина вычисляется по формуле Формула длины вектора в пространстве.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

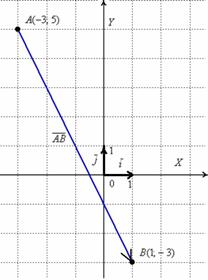
Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image074_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0003.gif. Найти длину вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0004.gif.

Я взял те же точки, что и в Примере 3.

**Решение:** Сначала найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0005.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image124_0000.gif

По формуле http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117_0002.gif вычислим длину вектора:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image127.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image129.gif

Выполним чертеж к задаче:  


В чём принципиальное отличие от Примера 3? Отличие состоит в том, что здесь речь идёт о векторе, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости.

А в чём сходство Примера 3 и Примера 5? Геометрически очевидно, что длина отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0005.gif равна длине вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0006.gif. Так же очевидно, что длина вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0002.gif будет такой же. По итогу: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image135.gif

Пример 6

а) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image140.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image142.gif. Найти длину вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0003.gif.  
б) Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image145_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image147.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image149.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image151.gif. Найти их длины.

Решения и ответы в конце урока.

**Действия с векторами в координатах**

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image153.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image155.gif. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо **сложить их соответствующие координаты**: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image157.gif. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image159.gif. Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image161.gif и найдём сумму трёх векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image163.gif

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image165.gif, то их суммой является вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image167.gif.

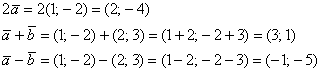
2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image153_0000.gif умножить на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image169.gif, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image169_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172_0001.gif.

Для пространственного вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174_0001.gif правило такое же:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image176_0000.gif

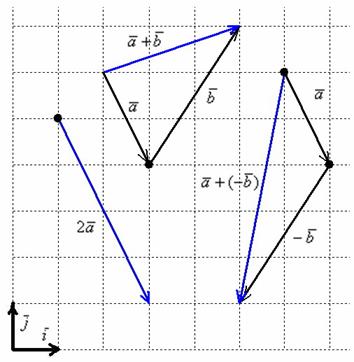
Приведённые факты строго доказываются в курсе аналитической геометрии.

***Примечание:*** *Данные правила справедливы не только для ортонормированных базисов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0008.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178_0001.gif но и для произвольного аффинного базиса плоскости или пространства*Пример 7

Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image182.gif. Найти http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image184.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image186_0000.gif

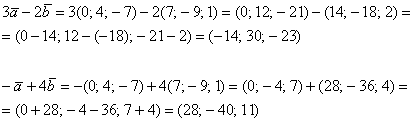
**Решение** чисто аналитическое:  


**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image190_0000.gif

Чертеж в подобных задачах строить не надо, тем не менее, геометрическая демонстрация будет весьма полезной. Если считать, что векторы заданы в ортонормированном базисе http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0009.gif, то графическое решение задачи будет таким:   


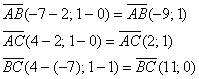
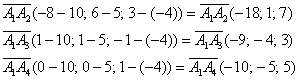
Пример 8

Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image194_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image196_0000.gif. Найти http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image198_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image200_0000.gif

**Решение:** Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:  


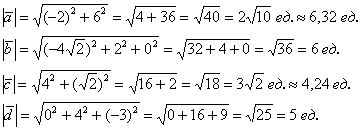
**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image204_0000.gif

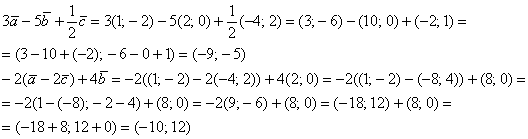
***ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ 5:***

*Пример :* ***Решение:***  
*а)*   
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image216.gif*  
*б)*   
**  
*в)*   
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image220.gif*  
*г)*  
**

*Пример 4:* ***Решение:***  
*По соответствующей формуле:*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113_0001.gif  
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image224.gif*  
***Ответ:***http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image226.gif

*Пример 6:* http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image140_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image142_0000.gif  
*а)* ***Решение:*** *найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0004.gif:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image230.gif*  
*Вычислим длину вектора:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image232.gif*  
***Ответ:*** *http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image234.gif*

*б)* ***Решение:***  
*Вычислим длины векторов:*  
**

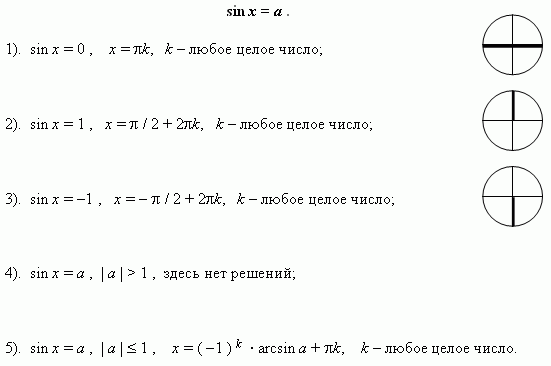
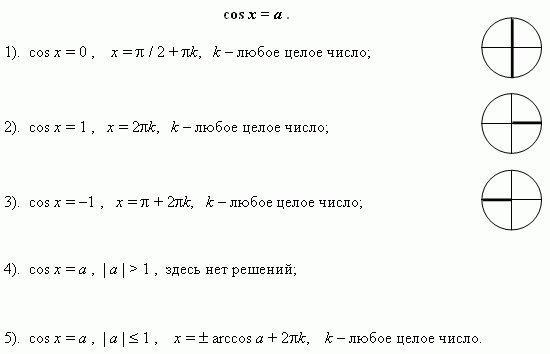
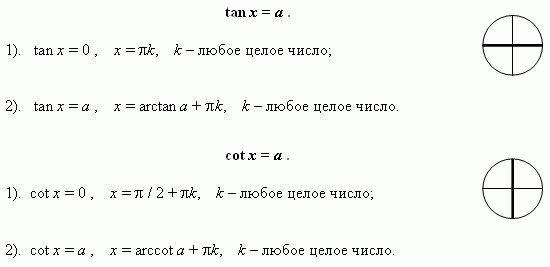
*Пример 9:* ***Решение:***   
**  
***Примечание:*** *Перед выполнением действий можно предварительно раскрыть скобки:*  
*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image240.gif*

*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image242.gif*

**Тема 6: Основы тригонометрии**

***Тригонометрические уравнения.*** Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

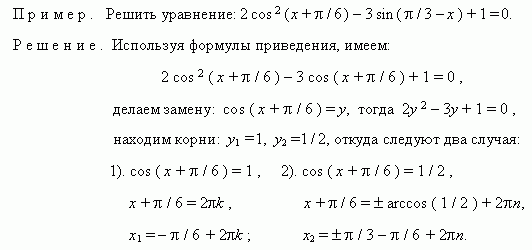
***Простейшие тригонометрические уравнения.***

***Методы решения тригонометрических уравнений.*** Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов:  *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида и  *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения  тригонометрических уравнений.

*1. Алгебраический метод.* Этот метод нам хорошо известен из алгебры

( метод замены переменной и подстановки ).



*2. Разложение на множители.*

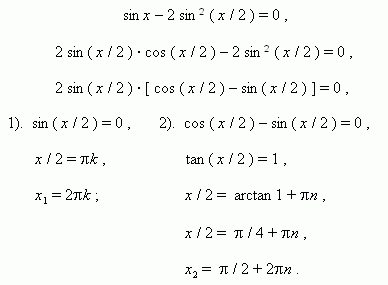
    П р и м е р  1.  Решить уравнение:  sin *x* + cos *x* = 1 .

    Р е ш е н и е .   Перенесём все члены уравнения влево:

                                                               sin *x* + cos *x* – 1 = 0 ,

                               преобразуем и разложим на множители выражение в

                               левой части уравнения:

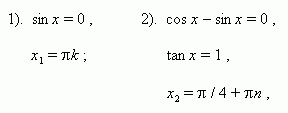


    П р и м е р   2.   Решить уравнение:  cos 2 *x* + sin *x* · cos *x* = 1.

    Р е ш е н и е .     cos 2 *x* + sin *x* · cos *x* – sin 2 *x* – cos 2 *x* = 0 ,

                                            sin *x* · cos *x* – sin 2 *x* = 0 ,

                                            sin *x* · ( cos *x* – sin *x* ) = 0 ,



    П р и м е р   3.   Решить уравнение:  cos 2*x* – cos 8*x* + cos 6*x* = 1.

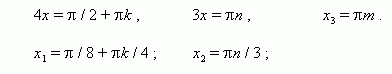
     Р е ш е н и е .    cos 2*x* + cos 6*x* = 1 + cos 8*x* ,

                               2 cos 4*x* cos 2*x* = 2 cos ² 4*x* ,

                               cos 4*x* · ( cos 2*x* –  cos 4*x* ) = 0 ,

                               cos 4*x* · 2 sin 3*x* · sin *x* = 0 ,

                              1).  cos 4*x* = 0 ,               2).  sin 3*x* = 0 ,          3). sin *x* = 0 ,



|  |  |
| --- | --- |
| *3.* | *Приведение к однородному уравнению.* Уравнение называется *однородным относительно  sin  и  cos*, *если* *все его члены одной и той же степени относительно sin  и cos  одного и того же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:  *а*)  перенести все его члены в левую часть;  *б*)  вынести все общие множители за скобки;  *в*)  приравнять все множители и скобки нулю;  *г*)  скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на          cos ( или sin ) в старшей степени;  *д*)  решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan .        П р и м е р .   Решить уравнение:  3sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 5 cos 2 *x* = 2.        Р е ш е н и е .  3sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 5 cos 2 *x* = 2sin 2 *x* + 2cos 2 *x* ,                                 sin 2 *x* + 4 sin *x* · cos *x* + 3 cos 2 *x* = 0 ,                                 tan 2 *x* + 4 tan *x* + 3 = 0 ,  отсюда  *y* 2 + 4*y* +3 = 0 ,                                 корни этого уравнения:  *y*1 = 1,  *y*2 = 3,  отсюда                               1)   tan *x* = –1,                  2)   tan *x* = –3,  http://www.bymath.net/studyguide/tri/sec/tri16g.gif |

*4. Переход к половинному углу.* Рассмотрим этот метод на примере:

    П р и м е р .  Решить уравнение:  3 sin *x* – 5 cos *x* = 7.

    Р е ш е н и е .  6 sin ( *x* / 2 ) · cos ( *x* / 2 ) – 5 cos ² ( *x* / 2 ) + 5 sin ² ( *x* / 2 ) =

                                                                         = 7 sin ² ( *x* / 2 ) + 7 cos ² ( *x* / 2 ) ,

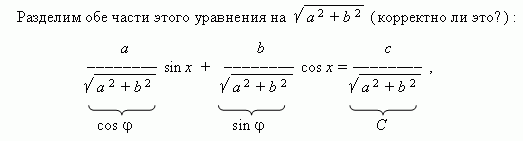
                             2 sin ² ( *x* / 2 ) – 6 sin ( *x* / 2 ) · cos ( *x* / 2 ) + 12 cos ² ( *x* / 2 ) = 0 ,

                             tan ² ( *x* / 2 ) – 3 tan ( *x* / 2 ) + 6 = 0 ,

*5. Введение вспомогательного угла.* Рассмотрим уравнение вида:

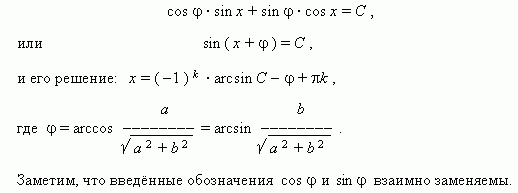
*a* sin *x* + *b* cos *x* = *c* ,

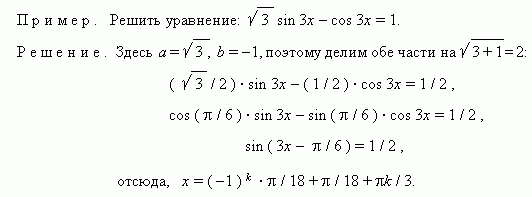
    где  *a*, *b*, *c* – коэффициенты;  *x* – неизвестное.



Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль

( абсолютное значение ) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как cos http://www.bymath.net/studyguide/fi.gifи sin http://www.bymath.net/studyguide/fi.gif( здесь http://www.bymath.net/studyguide/fi.gif- так называемый *вспомогательный угол)*, и наше уравнение принимает вид:





*6. Преобразование произведения в сумму.* Здесь используются соответствующие формулы.

    П р и м е р .  Решить уравнение:  2 sin 2*x* · sin 6*x* = cos 4*x*.

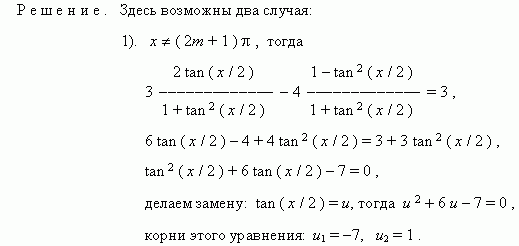
    Р е ш е н и е .  Преобразуем левую часть в сумму:

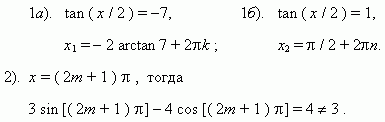
                                        cos 4*x* – cos 8*x* = cos 4*x* ,

                                                 cos 8*x* = 0 ,

*7. Универсальная подстановка.* Рассмотрим этот метод на примере.

      П р и м е р .   Решить уравнение:  3 sin *x* – 4 cos *x* = 3 .





                             Таким образом, решение даёт только первый случай.

**VII. Тригонометрические функции.**

**Основные формулы тригонометрии**

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно. Пусть α° - градусная мера угла, β - радианная, тогда справедливы формулы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 4. |  |
| 2. |  | 5. |  |
| 3. |  | 6. |  |

Формулы сложения.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Формулы двойных и половинных углов.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 5. |  |
| 2. |  | 6. |  |
| 3. |  | 7. |  |
| 4. |  | 8. |  |

Формулы преобразования суммы в произведение.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |
|  |  |
|  |  |

Формулы преобразования произведения в сумму.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Формулы приведения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ϕ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ϕ | -α | α | α | α | -α | -α | -α | -α | α |
| ϕ | α | α | -α | -α | -α | -α | α | α | α |
| ϕ | -α | α | -α | -α | α | α | -α | -α | α |
| ϕ | -α | α | -α | -α | α | α | -α | -α | α |

**Решение простейших тригонометрических уравнений**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Уравнение | Общее решение | Частные случаи | | |
|  |  |  |
| , |  |  |  |  |
| , |  |  |  |  |
| , |  |  |  |  |
| , |  |  |  |  |

Для решения простейших тригонометрических неравенств **, , , ** (вместо знака  могут стоять , , ) применяют графический способ. Находят точки пересечения графика соответствующей функции с прямой , расположенные ближе к началу координат, и затем используют периодичность функции.

Для решения более сложных тригонометрических неравенств их сводят к простейшим случаям с помощью упрощений.

Графики и основные свойства тригонометрических функций.

|  |  |
| --- | --- |
| Синус | для |
| для |
| для |
| для |
| , , , период , нечетная | |
| косинус | для |
| для |
| для |
| для |
| , , , период , четная | |
| тангенс | для |
| для |
| для |
| , \, , период , нечетная | |
| котангенс | для |
| для |
| для |
| , \, , период , нечетная | |

Графики и основные свойства обратных тригонометрических функций.

|  |  |
| --- | --- |
| арксинус | для |
| для |
| для |
| Функция нечетная |
| , , , непериодическая функция | |
| арккосинус | для |
| для |
| для |
| Функция ни четная, ни нечетная |
| , , , непериодическая функция | |
| арктангенс | для |
| для |
| для |
| Функция нечетная |
| , , , непериодическая функция | |
| арккотангенс | для |
| для |
| для |
| Функция ни четная, ни нечетная |
| , , , непериодическая функция | |

Связь тригонометрических функций с обратными тригонометрическими функциями осуществляется при помощи следующей таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| -90°= | -1 | - | -∞ | - |
| -60°= | - | - | - | - |
| -45°= | - | - | -1 | - |
| -30°= | - | - | - | - |
| 0 | 0 | 1 | 0 | ∞ |
| 30°= |  |  |  |  |
| 45°= |  |  | 1 | 1 |
| 60°= |  |  |  |  |
| 90°= | 1 | 0 | ∞ | 0 |
| 120°= | - | - | - | - |
| 135°= | - | - | - | - 1 |
| 150°= | - | - | - | - |
| 180°= | - | -1 | - | - ∞ |

**Задание для самопроверки по теме 6:**

1. Найти значение следующих тригонометрических выражений:

,  , если .

1. Доказать тождество:



1. Вычислить значение выражения:



1. Решить уравнение:



1. Решить уравнение:

.

1. Решить уравнение:

.

**Пояснение к решению уравнений.**

***Уравнения вида .***

*Эти уравнения можно решать при помощи универсальной тригонометрической подстановки , воспользовавшись формулами, выражающими  и  через :*

****** *и .*

*Исходное уравнение сводится к дробно-рациональному алгебраическому уравнению, решение которого нами было рассмотрено ранее.*

*Такие уравнения рациональнее решать введением вспомогательного угла: . Рассмотрим дальнейший ход решения уравнения путем эквивалентных преобразований левой части:*

***.***

*Введем обозначения:*

* и .*

*Заметим, что выражение в скобках в этом случае преобразуется в косинус разности аргументов:*

***.***

*Таким образом, исходное уравнение приводится к эквивалентному простейшему тригонометрическому уравнению:*

*, или ,*

*решение которого, суть*

*, .*

**Решение и ответы к заданиям**

*1.Решение. Выпишем формулы для нахождения* ,  *:*

*, , .*

*.*

*Из основного тригонометрического тождества найдем :*

**

*Далее найдем значения искомых выражений:*

* *

*Ответ: , , *

*2.Решение. Приведем левую часть к 1:*



.

*Тождество доказано.*

*3 Решение. Используя формулы приведения, получим:*









*Итак, значение выражения 0.*

*4. Решение. Заменяя  и , получим однородное уравнение:*

,

*или*

.

*Деля на*  *(), получим:*

.

*Вводим новую переменную  и получаем квадратное уравнение относительно нее:*

.

*Корни этого уравнения: . Далее получаем равносильную совокупность уравнений:*

* *

*5. Решение. Здесь целесообразно использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Воспользовавшись этими формулами, получим уравнение:*

**

*или .*

*Разность косинусов преобразуем в произведение , которое равносильно совокупности уравнений:*

*  *

*Иными словами, мы получили тот же ответ, что не удивительно.*

*6. Решение. (первый способ) Заменив  и  через , получим:*

****.

*Введем новую переменную:*  *и получим эквивалентное квадратное уравнение относительно *:

,

*у которого дискриминант равен нулю и, следовательно, имеем единственный корень . Задача свелась к решению уравнения:*

; ; , .

*Решение. (второй способ). Введем вспомогательный угол:* .

*Тогда решение исходного уравнения сразу запишется в виде:*

=, .

ТЕМА 7: ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Знание **основных элементарных функций, их свойств и графиков** не менее важно, чем знание таблицы умножения. Они как фундамент, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

Определим **свойства основных элементарных функций** по схеме:

[область определения функции](http://www.cleverstudents.ru/functions_researching/domain_of_function.html);

поведение функции на границах области определения, вертикальные асимптоты, четность и нечетность;

[область значений функции](http://www.cleverstudents.ru/functions_researching/range_of_function.html);

[промежутки возрастания и убывания, точки экстремума](http://www.cleverstudents.ru/functions_researching/increase_and_decrease_intervals.html);

промежутки выпуклости (выпуклости вверх) и вогнутости (выпуклости вниз), точки перегиба, наклонные и горизонтальные асимптоты;

особые точки функций;

особые свойства некоторых функций (например, наименьший положительный период у тригонометрических функций).

**Основными элементарными функциями** являются: постоянная функция (константа), корень *n*-ой степени, степенная функция, показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

[Постоянная функция (константа), ее график и свойства.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#const) y равно C

[Корень *n*-ой степени, свойства и график.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#radical) y = корень из а.

[Степенная функция, ее график и свойства.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#stepennie) математическая формула

[Показательная функция, свойства, график.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#pokazatelnie) математическая формула

[Логарифмическая функция, ее свойства, графическая иллюстрация.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#logarifmicheskie) математическая формула

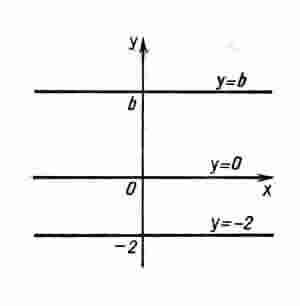
[Свойства и графики тригонометрических функций.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#trigonometricheskie) математическая формула

[Обратные тригонометрические функции (аркфункции), их свойства и графики.](http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/basic_elementary_functions.html#obr_trigonometricheskie) математическая формула

**Постоянная функция.**

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой y равно C, где *C* – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной *x* одно и то же значение зависимой переменной *y* – значение *С*. Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами *(0,C)*. Для примера покажем графики постоянных функций *y=5*, *y=-2* и y=√3, которым на рисунке, приведенном ниже.



**Свойства постоянной функции.**

Область определения: все множество действительных чисел.

Постоянная функция является четной.

Область значений: множество, состоящее из единственного числа *С*.

Постоянная функция невозрастающая и неубывающая (на то она и постоянная).

Говорить о выпуклости и вогнутости постоянной не имеет смысла.

Асимптот нет.

Функция проходит через точку *(0,C)* координатной плоскости.

**Корень *n*-ой степени.**

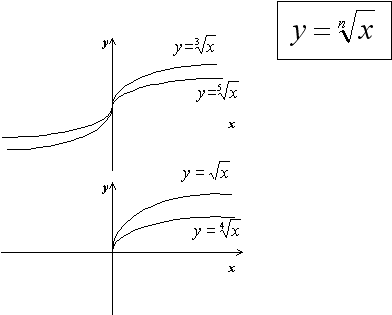
Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой y = корень из а

где *n* – натуральное число, большее единицы.

**Корень *n*-ой степени, *n* - четное число.**

Начнем с функции корень *n*-ой степени при четных значениях показателя корня *n*.

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций



Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

**Свойства функции корень *n*-ой степени при четных *n*.**

Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел от нуля включительно до плюс бесконечности.

При *x=0* функция принимает значение, равное нулю.

Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).

Область значений функции: от нуля включительно до плюс бесконечности.

Функция y = корень из а

при четных показателях корня возрастает на всей области определения.

Эта функция имеет выпуклость, направленную вверх, на всей области определения, точек перегиба нет.

Асимптот нет.

График функции корень *n*-ой степени при четных *n* проходит через точки *(0,0)* и *(1,1)*.

**Корень *n*-ой степени, *n* - нечетное число.**

Функция корень *n*-ой степени с нечетным показателем корня *n* определена на всем множестве действительных чисел.

При других нечетных значениях показателя корня графики функции будут иметь схожий вид.

**Свойства функции корень *n*-ой степени при нечетных *n*.**

Область определения: множество всех действительных чисел.

Эта функция нечетная.

Область значений функции: множество всех действительных чисел.

Функция y = корень из апри нечетных показателях корня возрастает на всей области определения.

Эта функция вогнутая на промежутке от минус бесконечности до нуля включительнои выпуклая на промежутке от нуля включительно до плюс бесконечности, точка с координатами *(0,0)* – точка перегиба.

Асимптот нет.

График функции корень *n*-ой степени при нечетных *n* проходит через точки *(-1,-1)*, *(0,0)* и *(1,1)*.

**Степенная функция.**

Степенная функция задается формулой вида y равно x в степени a.

Рассмотрим вид графиков степенной функции и свойства степенной функции в зависимости от значения показателя степени.

Начнем со степенной функции с целым показателем *a*. В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Поэтому сначала рассмотрим степенные функции y равно x в степени aпри нечетных положительных значениях показателя *a*, далее - при четных положительных, далее - при нечетных отрицательных показателях степени, и, наконец, при четных отрицательных *a*.

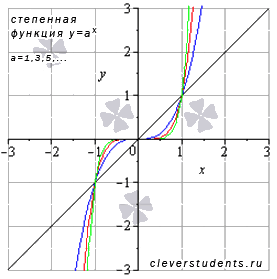
Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя *a*. Их будем рассматривать, во-первых, при *a* от нуля до единицы, во-вторых, при *a* больших единицы, в-третьих, при *a* от минус единицы до нуля, в-четвертых, при *a* меньших минус единицы.

В заключении этого пункта для полноты картины опишем степенную функцию с нулевым показателем.

**Степенная функция с нечетным положительным показателем.**

Рассмотрим степенную функцию математическая формулапри нечетном положительном показателе степени, то есть, при *а=1,3,5,…*.

На рисунке ниже приведены графики степенных фнукций y равно x– черная линия, y=x³– синяя линия, y равно x в пятой степени– красная линия,. При *а=1* имеем *линейную функцию* *y=x*.



**Свойства степенной функции с нечетным положительным показателем.**

Область определения: формула.

Область значений: формула.

Функция нечетная, так как формула.

Функция возрастает при формула.

Функция выпуклая при формулаи вогнутая при формула(кроме линейной функции).

Точка *(0;0)* является точкой перегиба (кроме линейной функции).

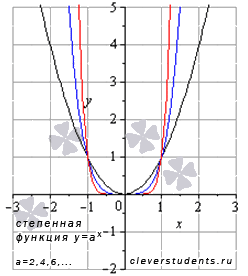
Асимптот нет.

Функция проходит через точки *(-1;-1)*, *(0;0)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с четным положительным показателем.**

Рассмотрим степенную функцию y равно x в степени aс четным положительным показателем степени, то есть, при *а=2,4,6,…*.

В качестве примера приведем графики степенных функций y = x² – черная линия, y равно x в четвертой степени– синяя линия, y равно x в восьмой степени– красная линия. При *а=2* имеем квадратичную функцию, графиком которой является *квадратичная парабола*.



**Свойства степенной функции с четным положительным показателем.**

Область определения: формула.

Область значений: формула.

Функция четная, так как формула.

Функция возрастает при формула, убывает при формула.

Функция вогнутая при формула.

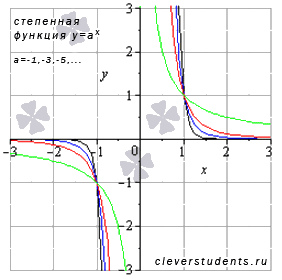
Точек перегиба нет.

Асимптот нет.

Функция проходит через точки *(-1;1)*, *(0;0)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.**

Посмотрите на графики степенной функции y равно x в степени aпри нечетных отрицательных значениях показателя степени, то есть, при *а=-1,-3,-5,…*.



степенная функция y равно x в степени a

На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных функций y = x‾ 9– черная линия, y равно x в минус пятой степени– синяя линия, y = x‾³ – красная линия, y = x ‾ ¹ – зеленая линия. При *а=-1* имеем *обратную пропорциональность*, графиком которой является *гипербола*.

**Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем.**

Область определения: формула.  
При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как формулапри *а=-1,-3,-5,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.

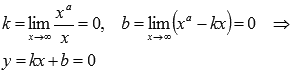
Область значений: формула.

Функция нечетная, так как формула.

Функция убывает при формула.

Функция выпуклая при формулаи вогнутая при формула.

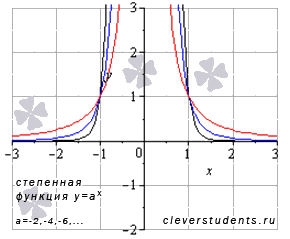
Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0*, так как  
  
при *а=-1,-3,-5,…*.

Функция проходит через точки *(-1;-1)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с четным отрицательным показателем.**

Перейдем к степенной функции y равно x в степени aпри *а=-2,-4,-6,…*.



На рисунке изображены графики степенных функций y равно x в минус восьмой степени– черная линия, y = x ¯4 – синяя линия, y равно x в минус второй степени– красная линия.

**Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем.**

Область определения: формула.  
При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как формулапри *а=-2,-4,-6,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.

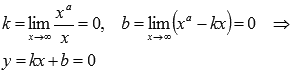
Область значений: формула.

Функция четная, так как формула.

Функция возрастает при формула, убывает при формула.

Функция вогнутая при формула.

Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*, так как  
  
*при а=-2,-4,-6,…*.

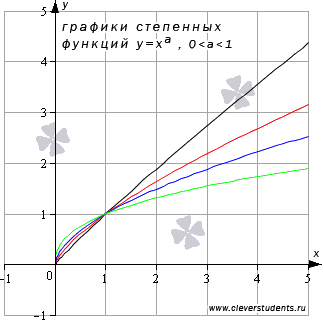
Функция проходит через точки *(-1;1)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с рациональным или иррациональным показателем, значение которого больше нуля и меньше единицы.**

**Обратите внимание!** Если *a* - положительная дробь с нечетным знаменателем, то некоторые авторы считают областью определения степенной функции интервал(-∞; + ∞). При этом оговариваются, что показатель степени *a* – несократимая дробь. Сейчас авторы многих учебников по алгебре и началам анализа НЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ степенные функции с показателем в виде дроби с нечетным знаменателем при отрицательных значениях аргумента. Мы будем придерживаться именно такого взгляда, то есть, будем считать областями определения степенных функций с дробными положительными показателями степени множество[0;+∞). Рекомендуем учащимся узнать взгляд Вашего преподавателя на этот тонкий момент, чтобы избежать разногласий.

Рассмотрим степенную функцию y равно x в степени aс рациональным или иррациональным показателем *a*, причем a больше нуля и меньше единицы.

Приведем графики степенных функций y равно x в степени aпри *а=11/12* (черная линия), *а=5/7* (красная линия), y равно x в степени единица деленная на корень из трех(синяя линия), *а=2/5* (зеленая линия).



При других значениях показателя степени *a*, a больше нуля и меньше единицыграфики функции y равно x в степени aбудут иметь схожий вид.

**Свойства степенной функции при a больше нуля и меньше единицы.**

Область определения: формула.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция возрастает при формула.

Функция выпуклая при формула.

Точек перегиба нет.

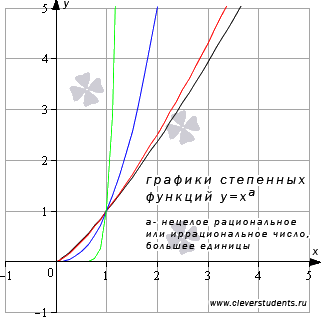
Асимптот нет.

Функция проходит через точки *(0;0)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с нецелым рациональным или иррациональным показателем, большим единицы.**

Рассмотрим степенную функцию y равно x в степени aс нецелым рациональным или иррациональным показателем *a*, причем a больше единицы.

Приведем графики степенных функций, заданных формулами http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/images/basic_elementary_functions/0009.png(черная, красная, синяя и зеленая линии соответственно).



При других значениях показателя степени *a*, a больше единицыграфики функции y равно x в степени aбудут иметь схожий вид.

**Свойства степенной функции при a больше единицы.**

Область определения: формула.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция возрастает при формула.

Функция вогнутая при формула, если формула; при формула, если формула.

Точек перегиба нет.

Асимптот нет.

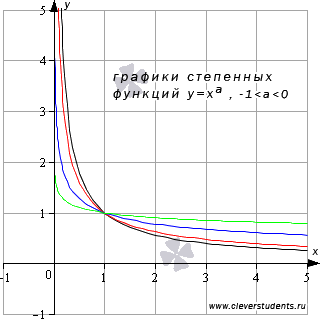
Функция проходит через точки *(0;0)*, *(1;1)*.

**Степенная функция с действительным показателем, который больше минус единицы и меньше нуля.**

**Обратите внимание!** Если *a* - отрицательная дробь с нечетным знаменателем, то некоторые авторы считают областью определения степенной функции интервал формула. При этом оговариваются, что показатель степени *a* – несократимая дробь. Сейчас авторы многих учебников по алгебре и началам анализа НЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ степенные функции с показателем в виде дроби с нечетным знаменателем при отрицательных значениях аргумента. Мы будем придерживаться именно такого взгляда, то есть, будем считать областями определения степенных функций с дробными дробными отрицательными показателями степени множество формуласоответственно. Рекомендуем учащимся узнать взгляд Вашего преподавателя на этот тонкий момент, чтобы избежать разногласий.

Переходим к степенной функции y равно x в степени a, кгода a от минус единицы до нуля.

Чтобы хорошо представлять вид графиков степенных функций при a от минус единицы до нуля, приведем примеры графиков функций http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/images/basic_elementary_functions/0010.png(черная, красная, синяя и зеленая кривые соответственно).



**Свойства степенной функции с показателем *a*, a от минус единицы до нуля.**

Область определения: формула.  
формулапри формула, следовательно, *х=0* является вертикальной асимптотой.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция убывает при формула.

Функция вогнутая при формула.

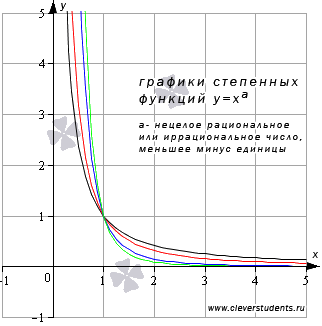
Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*.

Функция проходит через точку *(1;1)*.

**Степенная функция с нецелым действительным показателем, который меньше минус единицы.**

Приведем примеры графиков степенных функций y равно x в степени aпри http://www.cleverstudents.ru/elementary_functions/images/basic_elementary_functions/0011.png, они изображены черной, красной, синей и зеленой линиями соответственно.



**Свойства степенной функции с нецелым отрицательным показателем, меньшим минус единицы.**

Область определения: формула.  
формулапри формула, следовательно, *х=0* является вертикальной асимптотой.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция убывает при формула.

Функция вогнутая при формула.

Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*.

Функция проходит через точку *(1;1)*.

При *а=0* и x не равно нулюимеем функцию формула- это прямая из которой исключена точка *(0;1)* (выражению *00* условились не придавать никакого значения).

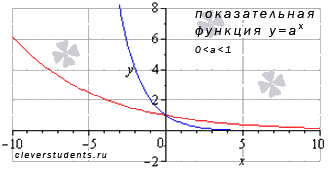
**Показательная функция.**

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

График показательной функции математическая формула, где формулаи формулапринимает различный вид в зависимости от значения основания *а*. Разберемся в этим.

Сначала рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, формула.

Для примера приведем графики показательной функции при *а = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. Аналогичный вид имеют графики показательной функции при других значениях основания из интервала формула.



**Свойства показательной функции с основанием меньшим единицы.**

Областью определения показательной функции является все множество действительнйх чисел: формула.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.

Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.

Функция вогнутая при формула.

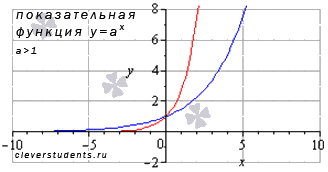
Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0* при *х* стремящемся к плюс бесконечности.

Функция проходит через точку *(0;1)*.

Переходим к случаю, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, формула.

В качестве иллюстрации приведем графики показательных функций формула– синяя линия и формула– красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики показательной функции будут иметь схожий вид.



**Свойства показательной функции с основанием большим единицы.**

Область определения показательной функции: формула.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Показательная функция, основание которой больше единицы, возрастает при формула.

Функция вогнутая при формула.

Точек перегиба нет.

Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0* при *х* стремящемся к минус бесконечности.

Функция проходит через точку *(0;1)*.

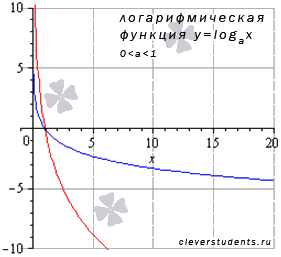
**Логарифмическая функция.**

Следующей основной элементарной функцией является логарифмическая функция математическая формула, где формула, формула. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при формула.

График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания *а*.

Начнем со случая, когда формула.

Для примера приведем графики логарифмической функции при *а = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



**Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы.**

Область определения логарифмической функции: формула. При *х* стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к плюс бесконечности.

Область значений: формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Логарифмическая функция убывает на всей области определения.

Функция вогнутая при формула.

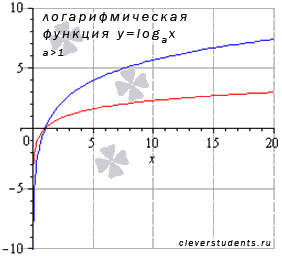
Точек перегиба нет.

Горизонтальных асимптот нет.

Функция проходит через точку *(1;0)*.

Перейдем к случаю, когда основание логарифмической функции больше единицы (формула).

Покажем графики логарифмических функций формула– синяя линия, формула– красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



**Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы.**

Область определения: формула. При *х* стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к минус бесконечности.

Областю значений логарифмической функции является все множество действительных чисел, то есть, интервал формула.

Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция возрастает при формула.

Функция выпуклая при формула.

Точек перегиба нет.

Горизонтальных асимптот нет.

Функция проходит через точку *(1;0)*.

**Тригонометрические функции, их свойства и графики.**

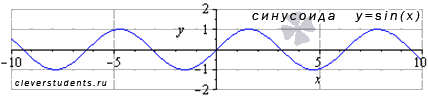
Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Тригонометрическим функциям присуще понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода математическая формула, где *Т* - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*. Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Теперь разберемся со всеми тригонометрическими функциями по-порядку.

**Функция синус *y = sin(x)*.**

Изобразим график функции синус, его называют "синусоида".



**Свойства функции синус *y = sinx*.**

Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция *y = sinx* определена при формула.

Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: формула.

Функция обращается в ноль при формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.

Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть формула.

Функция синус - нечетная, так как формула.

Функция убывает при формула,  
  
возрастает при формула.

Функция синус имеет локальные максимумы в точках формула,  
локальные минимумы в точках формула.

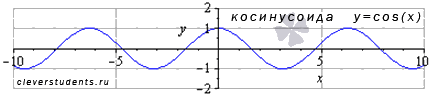
Функция *y = sinx* вогнутая при формула,  
выпуклая при формула.

Координаты точек перегиба формула.

Асимптот нет.

**Функция косинус *y = cos(x)*.**

График функции косинус (его называют "косинусоида") имеет вид:



**Свойства функции косинус *y = cosx*.**

Область определения функции косинус: формула.

Наименьший положительный период функции *y = cosx* равен двум пи: формула.

Функция обращается в ноль при формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.

Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: формула.

Функция косинус - четная, так как формула.

Функция убывает при формула,  
возрастает при формула.

Функция *y = cosx* имеет локальные максимумы в точках формула,  
локальные минимумы в точках формула.

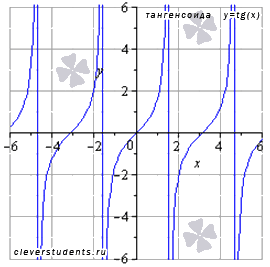
Функция вогнутая при формула,  
выпуклая при формула.

Координаты точек перегиба формула.

Асимптот нет.

**Функция тангенс *y = tg(x)*.**

График функции тангенс (его называют "тангенсоида") имеет вид:



**Свойства функции тангенс *y = tgx*.**

Область определения функции тангенс: формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.  
Поведение функции *y = tgx* на границе области определения формула  
Следовательно, прямые формула, где формула, являются вертикальными асимптотами.

Наименьший положительный период функции тангенс формула.

Функция обращается в ноль при формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.

Область значений функции *y = tgx*: формула.

Функция тангенс - нечетная, так как формула.

Функция возрастает при формула.

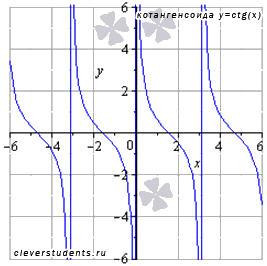
Функция вогнутая при формула,  
  
выпуклая при формула.

Координаты точек перегиба формула.

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

**Функция котангенс *y = ctg(x)*.**

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):



**Свойства функции котангенс *y = ctgx*.**

Область определения функции котангенс: формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.  
Поведение на границе области определения формула  
Следовательно, прямые формула, где формулаявляются вертикальными асимптотами.

Наименьший положительный период функции *y = ctgx* равен пи: формула.

Функция обращается в ноль при формула, где формула, *Z* – множество целых чисел.

Область значений функции котангенс: формула.

Функция нечетная, так как формула.

Функция *y = ctgx* убывает при формула.

Функция котангенс вогнутая при формула,  
выпуклая при формула.

Координаты точек перегиба формула.

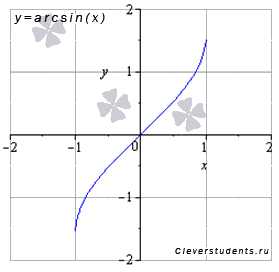
Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

**Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.**

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

**Функция арксинус *y = arcsin(x)*.**

Изобразим график функции арксинус:



**Свойства функции арксинус *y = arcsin(x)*.**

Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно: формула.

Область значений функции *y = arcsin(x)*: формула.

Функция арксинус - нечетная, так как формула.

Функция *y = arcsin(x)* возрастает на всей области определения, то есть, при формула.

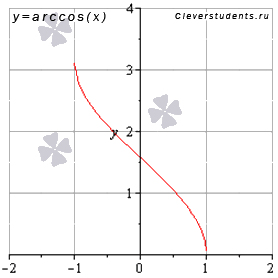
Функция вогнутая при формула, выпуклая при формула.

Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.

Асимптот нет.

**Функция арккосинус *y = arccos(x)*.**

График функции арккосинус имеет вид:



**Свойства функции арккосинус *y = arccos(x)*.**

Область определения функции арккосинус: формула.

Область значений функции *y = arccos(x)*: формула.

Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.

Функция арккосинус убывает на всей области определения, то есть, при формула.

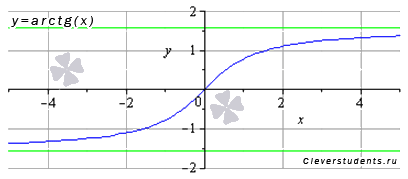
Функция вогнутая при формула, выпуклая при формула.

Точка перегиба формула.

Асимптот нет.

**Функция арктангенс *y = arctg(x)*.**

График функции арктангенс имеет вид:



**Свойства функции арктангенс *y = arctg(x)*.**

Область определения функции *y = arctg(x)*: формула.

Область значений функции арктангенс: формула.

Функция арктангенс - нечетная, так как формула.

Функция возрастает на всей области определения, то есть, при формула.

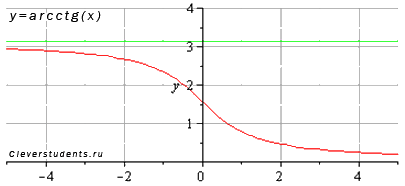
Функция арктангенс вогнутая при формула, выпуклая при формула.

Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.

Горизонтальными асимптотами являются прямые формулапри формулаи формулапри формула. На чертеже они показаны зеленым цветом.

**Функция арккотангенс *y = arcctg(x)*.**

Изобразим график функции арккотангенс:



**Свойства функции арккотангенс *y = arcctg(x)*.**

Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: формула.

Область значений функции *y = arcctg(x)*: формула.

Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.

Функция убывает на всей области определения, то есть, при формула.

Функция вогнутая при формула, выпуклая при формула.

Точка перегиба формула.

Горизонтальными асимптотами являются прямые формулапри формула(на чертеже показана зеленым цветом) и *y = 0* при формула.

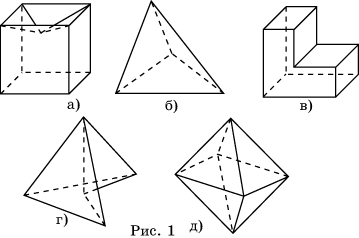
тема многогранники

#### Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера

В школьных учебниках геометрии ***многогранниками*** обычно называются тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, назы­ваемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ***ребрами*** и ***вершинами*** многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

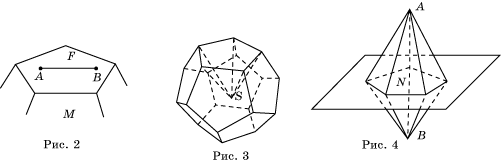
На рисунке 1 приведены примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.



Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

**Свойство 1.** В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

**Доказательство**. Пусть *F* - какая-нибудь грань многогранника *M*, и *A*, *B* – точки, принадлежащие грани *F* (рис. 2). Из условия вы­пуклости многогранника *M*, следует, что отрезок *AB* целиком содержится в многограннике *M*. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоуголь­ника *F*, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т.е. *F* - выпуклый многоугольник.



Свойство 2. **Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.**

**Доказательство**. Пусть *M* - выпуклый многогранник. Возьмем ка­кую-нибудь внутреннюю точку *S* многогранника *M*, т.е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника *M*. Соединим точку *S* с вершинами многогранника *M* отрезками (рис. 3). Заметим, что в силу вы­пуклости многогранника *M*, все эти отрезки содержатся в *M*. Рассмотрим пирамиды с вершиной *S*, основаниями которых являются грани многогранни­ка *M*. Эти пирамиды целиком содержатся в *M*, и все вместе составляют многогранник *M*.

**Свойство 3**. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют точки *A* и *B* многогранника *M*, лежащие по разные стороны от плоскости некоторой его грани *N* (рис. 4). Рассмотрим пирамиды с вершинами в точках *A*, *B*, основаниями которых является грань *N*. В силу выпуклости многогранника, эти пирамиды целиком в нем содержатся. Это противоречит тому, что *N* является гранью многогранника *M*.

Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.

Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таб­лицу, в которой В - число вершин, Р - ребер и Г - граней данного мно­гогранника:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название многогранника | В | Р | Г |
| Треугольная пирамида | 4 | 6 | 4 |
| Четырехугольная пирамида | 5 | 8 | 5 |
| Треугольная призма | 6 | 9 | 5 |
| Четырехугольная призма | 8 | 12 | 6 |
| *n-*угольная пирамида | *n*+1 | 2*n* | *n*+1 |
| *n-*угольная призма | 2*n* | 3*n* | *n+2* |
| *n-*угольная усеченная  пирамида | 2*n* | 3*n* | *n+2* |

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных мно­гогранников имеет место равенство В - Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для про­извольного выпуклого многогранника.

Теорема Эйлера. **Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство**

В - Р + Г = 2,

**где В - число вершин, Р - число ребер и Г - число граней данного мно­гогранника.**

**Доказательство.** Для доказательства этого равенства представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) од­ну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Полу­чим многоугольник (образованный ребрами удаленной грани многогранника), разбитый на более мелкие многоугольники (образованные остальными гранями многогранника).

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

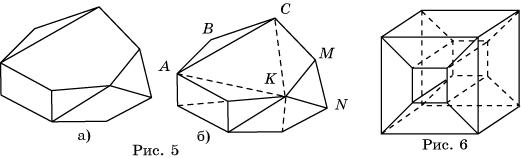
Докажем, что для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство

(\*) В - Р + Г ' = 1,

**где В – общее число вершин, Р – общее число ребер и Г ' – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что Г '= Г – 1, где Г – число граней данного мно­гогранника.**

Докажем, что равенство (\*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 5, а). Действитель­но,после проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, Р+1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем

В - (Р + 1) + (Г '+1) = В – Р + Г '*.*



Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входя­щие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения пока­жем выполнимость равенства (\*) (рис. 5, б). Для этого будем последо­вательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника *ABC* требуется снять два ребра, в на­шем случае *AB* и *BC*;

б) для удаления треугольника *MKN* требуется снять одно ребро, в нашем случае *MN*.

В обоих случаях равенство (\*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из В – 1 вершин, Р – 2 ребер и Г ' – 1 многоугольника:

(В - 1) - (Р + 2) + (Г ' – 1) = В – Р + Г '.

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенство (\*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов, мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого раз­биения В = 3, Р = 3, Г ' = 1 и, следовательно, B – Р + Г ' = 1. Значит, равенство (\*) имеет место и для исходного разбиения, откуда оконча­тельно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо равенство (\*). Таким образом, для исходного выпуклого многогранника справедливо равенство В - Р + Г = 2.

Пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера, показан на рисунке 6. Этот многогранник имеет 16 вершин, 32 ребра и 16 граней. Таким образом, для этого многогранника выполняется равенство В – Р + Г = 0.

Используя соотношение Эйлера, докажем, следующее свойство выпуклых многогранников.

**Свойство 4.** В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти.

Действительно, в каждой вершине многогранника сходится, по крайней мере, три ребра. Если количество вершин равно В и в каждой из них сходится три ребра, то общее число ребер будет больше или равно 3В : 2. Делить на два нужно потому, что при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды – один раз, как ребро выходящее из одной его вершины, а второй раз, как ребро, выходящее из второй его вершины. Таким образом, для любого многогранника имеет место неравенство 3В  2Р.

Обозначим через Г*n* число граней с *n* ребрами. Тогда Г = Г3 + Г4 + Г5 + Г6 + … . Каждая треугольная грань имеет три ребра и число треугольных граней равно Г3. Поэтому общее число ребер в треугольных гранях равно 3Г3. Аналогично, общее число ребер в четырехугольных гранях равно 4Г4 и т. д.

Поскольку каждое ребро многогранника содержится ровно в двух гранях, то при таком подсчете ребер, мы каждое ребро посчитаем дважды и, следовательно, будет иметь место равенство 2Р = 3Г3 + 4Г4 + 5Г5 + 6Г6 + … .

Воспользуемся равенством 6В – 6Р + 6Г = 12, получающимся умножением обеих частей сооотношения Эйлера на 6. По доказанному выше, имеет место неравенство 6В  4Р и, следовательно, неравенство 6Г – 2Р  12. С другой стороны, 6Г = 6Г3 + 6Г4 + 6Г5 + 6Г6 + … , 2Р = 3Г3 + 4Г4 + 5Г5 + 6Г6 + … . Подставляя эти выражения в неравенство, получим неравенство 3Г3 + 2Г4 + Г5 + 0Г6 – Г7 – …  12. В левой части, начиная с Г7 стоят отрицательные числа. Поэтому для того, чтобы вся сумма была больше или равна 12 нужно, чтобы хотя бы одно из чисел Г3 или Г4 или Г5 было отлично от нуля, т.е. в многограннике существовала грань с соответствующим числом ребер.

**Упражнения**

1. На рисунке 1 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

Ответ: Выпуклые – б), д); невыпуклые – а), в), г).

2. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Ответ: Рисунок 1, а).

3. Верно ли, что объединение выпуклых многогранников является выпуклым многогранником?

Ответ: Нет.

4. Может ли число вершин многогранника равняться числу его гра­ней?

Ответ: Да, у тетраэдра.

5. Установите связь между числом плоских углов П многогранника и числом его ребер Р.

Ответ: П = 2Р.

6. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин В и граней Г, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.

Ответ: а) В = 6, Г = 8, октаэдр; б) В = 7, Г = 10, пятиугольная бипирамида.

7. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин В и граней Г, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

Ответ: а) В = 8, Г = 6, куб; б) В = 10, Г = 7, пятиугольная призма.

8. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин В и граней Г, если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Ответ: В = 6, Г = 8, октаэдр.

9. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходится три ребра.

10. Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

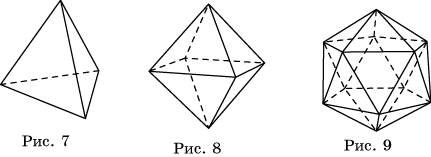
11. Чему равно В – Р + Г для многогранника, изображенного на рисунке 6?

Ответ: 0.

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его гранями яв­ляются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 7). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот мно­гогранник называется также ***правильным тетраэдром***, или просто ***тетраэдром***, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

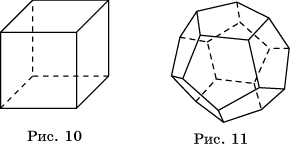


Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 8. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется ***октаэдром***.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 9. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не мо­жет сходиться более пяти правильныхтреугольников, то другихправиль­ных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 10), других пра­вильных многогранников, у которых гранями являются квадраты не сущест­вует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также ***гексаэдром***.



Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 11. Его по­верхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется ***додекаэдром****.*

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топо­логии науки, изучающей свойсва фигур, не зависящих от различных дефор­маций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны потой же причине.

Как в такой ситуации определить понятие топологически правильного многогранника? Иначе говоря, какие свойства в определении правильного многогранника являются топологически устойчивыми и их следует оста­вить, а какие не являются топологически устойчивыми и их следует отб­росить.

В определении правильного многогранника количество сторон и коли­чество граней являются топологически устойчивыми, т.е. не меняющимися при непрерывных деформациях. Правильность же многоугольников не явля­етсятопологически устойчивым свойством. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Выпуклый многогранник называется ***топологически правильным***, если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Два многогранника называются топологически эквивалентными, если один из другого можно получить непрерывной деформацией.

Например, все треугольные пирамиды являются топологически пра­вильными многогранниками, эквивалентнымимежду собой. Все параллелепи­педы также являются эквивалентными между собой топологически правиль­ными многогранниками**.** Не являются топологи­чески правильными многогранниками, например, четырехугольныепирамиды.

Выясним вопрос о том, сколько существует не эквивалентных между собой топологически правильных многогранников.

Как мы знаем, существует пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Казалось бы, топологичес­ки правильных многогранников должно быть гораздо больше. Однако оказы­вается, что никаких других топологически правильных многогранников, не эквивалентных уже известным правильным, не существует.

Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан топологически правильный многогранник, гранями которого являются *n* - угольники, и в каждой вершине сходится *m* ребер. Ясно, что *n* и *m* больше или равны трех. Обозначим, как и раньше, В - число вершин, Р - число ребер и Г - число граней этого многогранника. Тогда

*n*Г = 2P; Г =; *m*B = 2P; В = .

По теореме Эйлера, В - Р + Г = 2 и, следовательно,



Откуда Р = .

Из полученного равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство 2*n +* 2*m* – *nm* > 0, которое эквивалентно неравенству (*n* – 2)(*m* – 2) < 4.

Найдем всевозможные значения *n* и *m*, удовлетворяющие найденному неравенству, и заполним следующую таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N  m | 3 | 4 | 5 |
| 3 | B=4, Р=6, Г=4  тетраэдр | В=6, Р=12, Г=8  октаэдр | В=12, Р=30, Г=20  икосаэдр |
| 4 | В=8, Р=12, Г=4  куб | Не существует | Не существует |
| 5 | В=20, Р=30, Г=12  додекаэдр | Не существует | Не существует |

Например, значения *n* = 3, *m =* 3 удовлетворяют неравенству (*n* – 2)(*m* – 2) < 4. Вычисляя значения Р, В и Г по приведенным выше формулам, получим Р = 6, В = 4, Г = 4.

Значения *n* = 4, *m =* 4 не удовлетворяют неравенству (*n* – 2)(*m* – 2) < 4 и, следовательно, соответствующего многогранника не существует.

Самостоятельно проверьте остальные случаи.

Из этой таблицы следует, что возможными топологически правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечислен­ные выше, и многогранники, им эквивалентные.

**Упражнения**

1. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Ответ: а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 6, Р = 12, Г = 8; в) В = 8, Р = 12, Г = 6; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12.

2. Чему равны плоские углы додекаэдра?

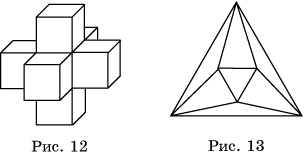
Ответ: 108

3. Представьте многогранник - бипирамиду, сложенную из двух пра­вильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?

Ответ: Нет

4. Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 12) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин В и ребер Р?

Ответ: Нет, 30 квадратов, В = 32, Р = 60.



5. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.

Ответ: .

6. Докажите, что в октаэдре противоположные ребра па­раллельны.

7. Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Ответ: Тетраэдр – 4, куб – 3, октаэдр – 2, икосаэдр – 4, додекаэдр – 4.

8. В многограннике вырезали одну грань и оставшиеся грани растя­нули на плоскости. Нарисуйте соответствующие графы для правильных мно­гогранников. Какому многограннику соответствует граф на рисунке 13?

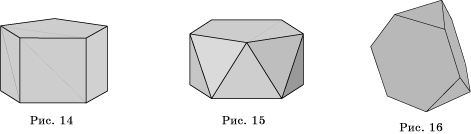
Ответ: Октаэдр.

Полуправильные многогранники

В предыдущем параграфе мы рассмотрели правильные многогранники, т.е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине ко­торых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допус­тить, чтобы гранями многогранника могли быть различные правильные мно­гоугольники, то получим многогранники, которые называются полуправиль­ными (равноугольно полуправильными).

***Полуправильным*** многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), и все многогранные углы равны.

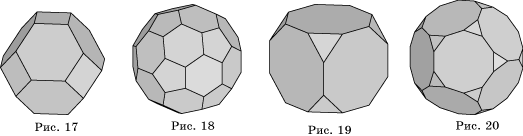
К полуправильным многогранникам относятся правильные *n*-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма на рисунке 14 имеет своими гранями два правильных пятиу­гольника - основания призмы и пять квадратов, образующих боковую по­верхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так на­зываемые антипризмы. На рисунке 15 мы видим пятиугольную антип­ризму, полученную из пятиугольной призмы поворотом одного из основа­ний относительно другого на угол 36. Каждая вершина верхнего и нижне­го оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.



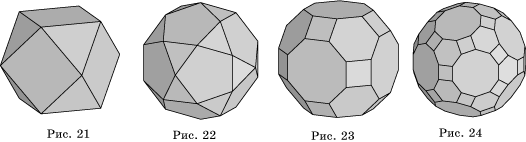
Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще 13 полуправильных многогранников которые впервые открыл и описал Архимед - это тела Архимеда.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников опе­рацией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогран­ника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсе­кает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим ***усеченный тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 16). Из них четыре - правильные шестиугольники и четыре - правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усеченный октаэдр*** (рис. 17) и ***усеченный ико­саэдр*** (рис. 18). Обратите внимание на то, что поверхность футбольно­го мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из ку­ба и додекаэдра также можно получить ***усеченный куб*** (рис. 19) и ***усе­ченный додекаэдр*** (рис. 20).



Для того, чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется ***кубооктаэдром*** (рис. 21). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название - кубооктаэдр.

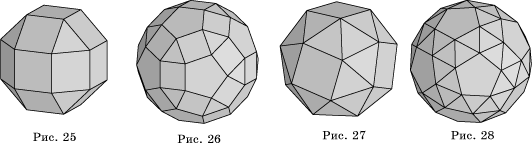


Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 22). У него двадцать гра­ней - правильные треугольники и двенадцать граней - правильные пятиу­гольники, т.е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 23) и ***усеченный икосо­додекаэдр*** (рис. 24).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многог­ранников. Четыре оставшихся - многогранники более сложного типа.

На рисунке 25 мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадра­тов.



На рисунке 26 изображен ***ромбоикосододекаэдр***, поверхность кото­рого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 27, 28 представлены соответственно так называемые ***плосконосый*** (иногда называют ***курносый***) ***куб*** и ***плосконосый*** (***курносый***) ***додекаэдр***, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

Как видим, каждая поверхность этих многогранников состоит из двух или трех типов граней: квадраты, треугольники, пятиугольники и треу­гольники, квадраты, пятиугольники и треугольники. Модели этих многог­ранников будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

# Упражнения

1. Какие грани имеют усеченный тетраэдр и усеченный куб?

Ответ: 4 треугольника и 4 шестиугольника, 8 треугольников и 6 восьмиугольников.

2. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча?

Ответ: Усеченный икосаэдр.

3. Докажите, что правильная *n*-угольная призма (*n*=3, 4, 5...) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.

4. Какую часть ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в ре­зультате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником?

Ответ: 1/3.

5. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в ре­зультате усеченный куб был полуправильным многогранником?

Ответ: .

6. Какую часть ребер октаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в ре­зультате усеченный октаэдр был полуправильным многогранником?

Ответ: 1/3.

*7. Какую часть ребер правильного додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в ре­зультате усеченный додекаэдр был полуправильным многогранником?*

*Ответ:* *.*

8. Подсчитайте число вершин В, ребер Р и граней Г: а) усеченного октаэдра; б) усеченного додекаэдра.

Ответ: а) В = 24, Р = 36, Г = 14; б) В = 60, Р = 90, Г = 32.

9. На рисунке 29 изображены пять многогранников. Многогранни­ки, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображенные мно­гогранники?



Ответ: Операция усечения; а) усеченный куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усеченный октаэдр.

10. Кубооктаэдр получен усечением куба. Найдите его ребро, если ребро куба равно 1.

Ответ: .

11. Икосододекаэдр получен усечением додекаэдра. Найдите его ребро, если ребро додекаэдра равно 1.

Ответ: .

12. Приведите пример многогранника, не являющегося полуправильным, гранями которого являются правильные многоугольники.

Ответ: Например, пространственный крест.

Тема I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ВЕКТОРНЫЕ И СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В математике и ее приложениях важную роль играет понятие ЧИСЛА. Первоначально все вычисления производились только над це­лыми числами. Однако дальнейшее развитие математики, механики, физики и астрономии привело к необходимости расширения совокуп­ности чисел. Так возникли понятия рационального, отрицательно­го и других чисел.

Давно появились в технике такие величины, для определения которых надо не только задавать их численные значения, но и ука­зывать их направления.

Например, для характери­стики поступательного переме­щения твердого тела недоста­точно знать расстояние, прой­денное телом, но нужно знать еще направление движения это­го тела.

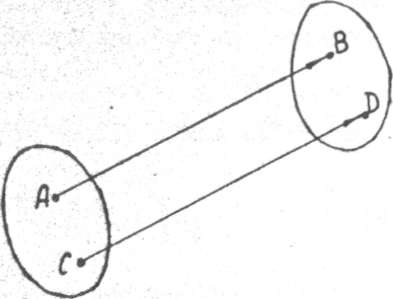
Аналогичный характер имеют такие величины, как сила, скорость, ускорение и т.п. Рис. I

Оказалось удобным изобра­жать эти величины направленными отрезками. Длина отрезка опре­деляет численное значение величины, а направление - направление этой величины.

Например, если твердое тело совершило поступательное пере­мещение, при котором некоторая его точка А перешла в точку В, то такое перемещение можно характеризовать направ­ленным отрезком АВ.

То же самое поступательное перемещение можно задать любым другим отрезкам CD при условии, что AB||CD и AB=CD.

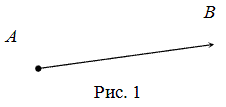
Определение:



Вектор - отрезок, имеющий определенную длину и направление (обозначается http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image005.gif).

Точка A - начало вектора,

В - конец вектора



Расстояние между началом и концом вектора на­зывается длиной или модулем вектора. Обозна­чается |http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image005.gif|

Единичный вектор - это вектор, модуль которого равен 1.

Нуль-вектор (http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image006.gif ) - это вектор, начало и конец которого со впадают.

Определение:

Скаляр - это обычное действительное число, положительное или отрицательное.

Например, скалярами могут быть изображены такие величины, как масса, температура, работа и т.п.:

Масса тела равна 8 кг.

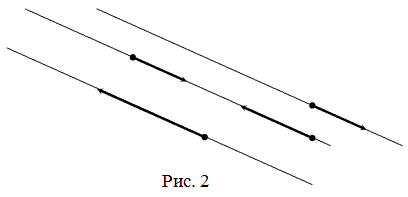
Температура тела равна 37°,

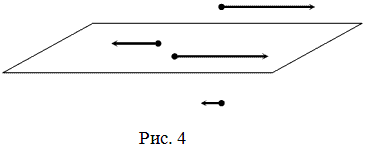
Это примеры скалярных величин.

Определение:

Два вектора http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gifhttp://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif  и считаются РАВНЫМИ, если равны их мо­дули и совпадают их направления (т.е. векторы параллельны и ориентированы в одну сторону).

Коллинеарные векторы - это векторы, параллельные одной и той же прямой.



Компланарные векторы - это векторы, параллельные одной и той же плоскости 

Взаимно противоположные векторы - это векторы, равные по длине и противоположные по направлению: http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_421.png = http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_424.png,  vec{a}= - vec{a}

**ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НАД ВЕКТОРАМИ**

Перейдем к рассмотрению действий над векторами.

***1)Суммой*** двух векторов http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif и http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения **(правило параллелограмма)**.

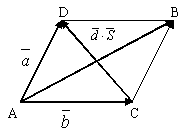


Рис.1.

**Опр.** Суммойтрех векторов http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image011.gif называется диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах **(правило параллелепипеда).**

**Опр.** Если *А*, *В*, *С* – произвольные точки, то http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image003.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image004.gif = http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image012.gif **(правило треугольника)**.

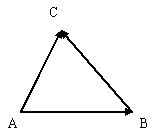
****

рис.2

**Свойства сложения.**

**1о http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif = http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif**(переместительный закон).

**2о** http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif + (http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image011.gif) = (http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif) + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image011.gif = (http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image011.gif) + http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif (сочетательный закон).

**3о** **http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif + (–http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif) +** http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image006.gif.

**2) Вычитание векторов.**

**Опр.** Под ***разностью*** векторов http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif и http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gifпонимают вектор **http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image008.gif =** http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif –http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif такой, что http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image002.gif + **http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image008.gif =** http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.5.files/image001.gif.

В параллелограмме – это другая диагональ СД

Операция сложение векторов обладает всеми свойствами сложения действительных чисел, т.е.:

1. свойствами ассоциативности;
2. свойствами коммутативности.

Ассоциативность сложения означает, что при сложении нескольких векторов можно любые два или более слагаемых заменить их суммой.

Коммутативность сложения означает, что сумма векторов не зависит от порядка сложения.

Рассмотрим примеры задачи на сумму и разность векторов

a={ax;ay}и b={bx;by}находится по формулам

a+ b={ax+ bx;ay+ by}

a- b={ax - bx; ay - by}

**Пример 1.** Найти сумму векторов

a ={1; 2}и b={4; 8}

**Решение** a+b={1 + 4; 2 + 8}={5;10}

**Пример 2.** Найти разность векторов

a={1;2}и b={4; 8}  
**Решение**

a+ b = {1 - 4; 2 - 8}={-3;-6}

Так в случае пространственной задачи сумма и разность векторов

a= {ax; ay; az}и b= {bx; by; bz}

находится по формулам

a+ b= {ax+ bx; ay+ by; az+ bz}a- b= {ax - bx; ay - by; az - bz}

**Пример 1.** Найти сумму векторов

a= {1; 2; 5 }и b= {4; 8; 1 }

**Решение** a+ b= {1 + 4; 2 + 8; 5 + 1 }= {5; 10; 6 }

**Пример 2.** Найти разность векторов

a= {1; 2; 5 }и b= {4; 8; 1 }

**Решение**

a+ b= {1 - 4; 2 - 8; 5 - 1}= {-3; -6; 4}

**Умножение вектора на скаляр**

Действие умножения вектора на скаляр является естественным обобщением знаний, полученных при решении прикладных задач. ПРОИЗВЕДЕНИЕМ *http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image061_2.png*(или *http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image062_2.png*) ВЕКТОРА http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image063_2.pngНА СКАЛЯР **L** является вектор, имеющий модуль, равный произведению модуля данного вектора на абсолютную величину скаляра, и ориентацию, совпадающую с ориентацией данного вектора, если скаляр положителен, или же противоположную, если скаляр меньше нуля.

Очевидно, что произведение вектора на скаляр обратится в нуль, если один из сомножителей равен нулю.

Пусть дан вектор http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image064_2.pngи скаляр http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image065_2.png. Введенное действие подчиняется следующим законам:

1. http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image066_2.png, где http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image067_2.png – также скалярный множитель. Это равенство определяет сочетательный закон относительно скалярных множителей. Действительно, как следует из определения, последовательность выполнения операций в левой и правой частях этого равенства не влияет на результат.

2. http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image068_2.png – распределительный закон скалярного сомножителя относительно суммы векторов;

http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image069_2.png – распределительный закон векторного сомножителя относительно суммы скаляров;

3. http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image070_2.png – сочетательный закон относительно скалярных сомножителей.

Равенства 2 выражают закон двоякой распределительности и позволяют, как в алгебре числовых величин, выполнять почленно действия умножения суммы векторов на скаляр и суммы скаляров на вектор. Например, если даны векторы http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image008_0.pngи http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image009_0.png, приведенные к общему началу 0 (рис. 1, а), скаляр http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image071_2.pngи http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image072_2.png, то вектор http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image073_2.png, изображенный на рис. 1, б, окажется равным вектору http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image074_2.pngпостроенному на рис. 1, в. Это и подтверждает первое из равенств закона двоякой распределительности.

|  |
| --- |
| http://matica.org.ua/images/stories/OVM/image075_2.pnghttp://matica.org.ua/images/stories/OVM/image076_2.pnghttp://matica.org.ua/images/stories/OVM/image077_3.png  ***Вопросы для самопроверки:***  1.Что такое вектор? Что такое скаляр? Приведите примеры вектора и скаляра. |

2. Какие векторы называются равными?

3. Какие векторы называются взаимно-противоположными?

4.Какие векторы называются коллинеарными?

5. Какие векторы называются компланарными?

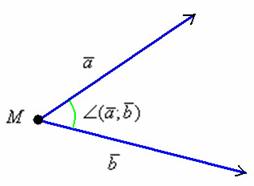
6. Какие операции можно выполнять над векторами? Какими они обладают свойствами?

7. Что такое «правило параллелограмма»?

8. Что такое умножение вектора на скаляр?

## ****Определение скалярного произведения векторов.**** ****Свойства скалярного произведения. Типовые задачи****

### ****Понятие скалярного произведения****

Сначала про **угол между векторами**. Думаю, всем интуитивно понятно, что такое угол между векторами, но на всякий случай чуть подробнее. Рассмотрим свободные ненулевые векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004.  Если отложить данные векторы от произвольной точки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image006, то получится картинка, которую многие уже представили мысленно:  


Угол между векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image010 может принимать значения от 0 до 180 градусов (от 0 до skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image012 радиан) включительно. Аналитически данный факт записывается в виде двойного неравенства: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image014 либо skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image016 (в радианах).

В литературе значок угла skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image018 часто пропускают и пишут просто skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image020.

**Определение:** Скалярным произведением двух векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0000 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0000 называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:  
Формула скалярного произведения

Вот это вот уже вполне строгое определение.

Акцентируем внимание на существенной информации:

**Обозначение:** скалярное произведение обозначается через skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image025 или просто skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image027.

**Результат операции является ЧИСЛОМ**: Умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029 – это числа, косинус угла – число, то их произведение skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image031 тоже будет числом.

Сразу пара разминочных примеров:

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0001 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0001, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image034

**Решение:** Используем формулу skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image036. В данном случае:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image038

**Ответ:** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040

Значения косинуса можно найти в [тригонометрической таблице](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf). Рекомендую её распечатать – потребуется практически во всех разделах вышки и потребуется много раз.

Чисто с математической точки зрения скалярное произведение безразмерно, то есть результат, в данном случае skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image042, просто число и всё. С точки же зрения задач физики скалярное произведение всегда имеет определенный физический смысл, то есть после результата нужно указать ту или иную физическую единицу. Канонический пример по вычислению работы силы  можно найти в любом учебнике (формула в точности представляет собой скалярное произведение). Работа силы измеряется в Джоулях, поэтому, и ответ запишется вполне конкретно, например, skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image044.

Пример 2

Найти skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image048, а угол между векторами равен skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image050.

Это пример для самостоятельного решения, ответ в конце урока.

### ****Угол между векторами и значение скалярного произведения****

В Примере 1 скалярное произведение получилось положительным, а в Примере 2 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image052. Длины ненулевых векторов всегда положительны: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image054, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.

**Примечание:** Для более качественного понимания нижеприведенной информации лучше изучить график косинуса в методичке [*Графики и свойства функции*](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Посмотрите, как ведёт себя косинус на отрезке *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image056*.

Как уже отмечалось, угол между векторами может изменяться в пределах skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image058, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image060  (от 0 до 90 градусов), то skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image062, и **скалярное произведение будет положительным**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image064. Особый случай: если векторы сонаправлены, то угол между ними считается нулевым skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image066, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image068, то формула упрощается: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image070.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image072  (от 90 до 180 градусов), то skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image074, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image076. Особый случай: если векторы направлены противоположно, то угол между ними считается развёрнутым: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image078 (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image080

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image064_0000, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image076_0000, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image082 (90 градусов), то skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image084 и **скалярное произведение равно нулю**: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image086. Обратное тоже верно: если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image086_0000, то skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image082_0000. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image090

**! Примечание:** Рекомендую запомнить математический значок *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092*, в математике его обычно читают: «тогда и только тогда», «в том и только в том случае». Как видите, стрелки направлены в обе стороны – «из этого следует это, и обратно –  из того, следует это». В чём, кстати, отличие от одностороннего значка следования *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image094*? Значок *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image094_0000* утверждает, ***только то***, что «из этого следует это», и не факт, что обратное справедливо. Например: *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image096*, но не каждый зверь является пантерой, поэтому в данном случае нельзя использовать значок *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092_0000*. В то же время, вместо значка *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092_0001* ***можно*** использовать односторонний значок. Например, решая задачу, мы выяснили, что *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image098* и сделали вывод, что векторы ортогональны: *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image100* – такая запись будет корректной, и даже более уместной, чем *skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image090_0000*.

**Третий случай имеет большую практическую значимость**, поскольку позволяет проверить, ортогональны векторы или нет. Данную задачу мы решим во втором разделе урока.

### ****Скалярный квадрат вектора**** ****Свойства скалярного произведения****

Вернёмся к ситуации, когда два вектора сонаправлены. В этом случае угол между ними равен нулю, skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image068_0000, и формула скалярного произведения принимает вид: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image102.

А что будет, если вектор skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104 умножить на самого себя? Понятно, что вектор сонаправлен сам с собой, поэтому пользуемся вышеуказанной упрощенной формулой:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image106

Или: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image108

Число skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image110 называется **скалярным квадратом** вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0000, и обозначатся как skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image113.

Таким образом, **скалярный квадрат вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0001 равен квадрату длины данного вектора:**  
Скалярный квадрат вектора

Из данного равенства можно получить формулу для вычисления длины вектора:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image117

Пока она кажется малопонятной, но задачи урока всё расставят на свои места. Для решения задач нам также потребуются **свойства скалярного произведения**.

Для произвольных векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image119 и любого числа skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image121 справедливы следующие свойства:

1) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image123 – переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image125 – распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image127 – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

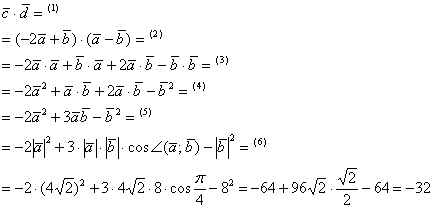
Зачастую, всевозможные свойства (которые ещё и доказывать надо!) воспринимаются студентами как ненужный хлам, который лишь необходимо вызубрить и сразу после экзамена благополучно забыть. Казалось бы, чего тут важного, все и так с первого класса знают, что от перестановки множителей произведение не меняется: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image123_0000. Должен предостеречь, в высшей математике с подобным подходом легко наломать дров. Так, например, переместительное свойство не является справедливым для [алгебраических матриц](http://www.mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html). Неверно оно и для [векторного произведения векторов](http://www.mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html). Поэтому, в любые свойства, которые вам встретятся в курсе высшей математики, как минимум, лучше вникать, чтобы понять, что можно делать, а чего нельзя.

Пример 3

Найти скалярное произведение векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image129 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image131, если известно, что skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image133.

**Решение:** Сначала проясним ситуацию с вектором skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image129_0000. Что это вообще такое? Сумма векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image136 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0002 представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image139. Геометрическую интерпретацию действий с векторами можно найти в статье [Векторы для чайников](http://www.mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html). Та же петрушка с вектором skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image141 – это сумма векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0002 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image144.

Итак, по условию требуется найти скалярное произведение skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046_0000. По идее, нужно применить рабочую формулу skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image147, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image149 и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image151, поэтому мы пойдём другим путём:



(1) Поставляем выражения векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image149_0000.

(2) Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов, пошлую скороговорку можно найти в статье [Комплексные числа](http://www.mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html) или [Интегрирование дробно-рациональной функции](http://www.mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html). Повторяться уж не буду =)  Кстати, раскрыть скобки нам позволяет дистрибутивное свойство скалярного произведения. Имеем право.

(3) В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image155. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image157.

(4) Приводим подобные слагаемые: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image159.

(5) В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image115_0000, о которой не так давно упоминалось. В последнем слагаемом, соответственно, работает та же штука: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image161. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image023_0000.

(6) Подставляем данные условия skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image164, и ВНИМАТЕЛЬНО проводим окончательные вычисления.

**Ответ:** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image166

Отрицательное значение скалярного произведения констатирует тот факт, что угол между векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image149_0001 является тупым.

Задача типовая, вот пример для самостоятельного решения:

Пример 4

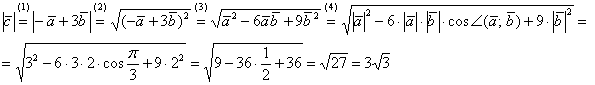
Найти скалярное произведение векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image168 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image170, если известно, что skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image172.

Краткое решение и ответ в конце урока.

Теперь ещё одно распространённое задание, как раз на новую формулу длины вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image117_0000. Обозначения тут будут немного совпадать, поэтому для ясности я перепишу её с другой буквой: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image174

Пример 5

Найти длину вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image176, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image178.

**Решение** будет следующим:  


(1) Поставляем выражение вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image182.

(2) Используем формулу длины: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image174_0000, при этом в качестве вектора «вэ» у нас выступает целое выражение skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image185.

(3) Используем школьную формулу квадрата суммы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image187. Обратите внимание, как она здесь любопытно работает: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image189 – фактически это квадрат разности, и, по сути, так оно и есть. Желающие могут переставить векторы местами: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image191 – получилось то же самое с точностью до перестановки слагаемых.

(4) Дальнейшее уже знакомо из двух предыдущих задач.

**Ответ:** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image193

Коль скоро речь идёт о длине, не забываем указать размерность – «единицы».

Пример 6

Найти длину вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image195, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image197.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

### ****Угол между векторами****

Продолжаем выжимать полезные вещи из скалярного произведения. Снова посмотрим на нашу формулу skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image036_0000. (1) По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image200

А части поменяем местами:  
Формула косинуса угла между векторами

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image204 – это число? Число. Длины векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029_0000 – числа? Числа. Значит, дробь skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image207 тоже является некоторым числом skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image209. А если известен косинус угла: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image211, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image213.

Пример 7

Найти угол между векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0002 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image216, если известно, что skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image218.

**Решение:** Используем формулу:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image220(2)  
На заключительном этапе вычислений использован технический приём – устранение иррациональности в знаменателе. В целях устранения иррациональности я домножил числитель и знаменатель на skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image222.

Итак, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image224, то:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image226

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по [тригонометрической таблице](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf). Хотя случается это редко. В задачах аналитической геометрии значительно чаще появляется какой-нибудь неповоротливый медведь вроде skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image228, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор. Собственно, такую картину мы ещё неоднократно увидим.

**Ответ:** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image230

Опять, не забываем указывать размерность – радианы и градусы. Лично я, чтобы заведомо «снять все вопросы», предпочитаю указывать и то, и то (если по условию, конечно, не требуется представить ответ только в радианах или только в градусах).

Теперь вы сможете самостоятельно справиться с более сложным заданием:

Пример 7\*

Даны skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image232 – длины векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0003, skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image216_0000 и угол между ними skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image236. Найти угол между векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image238, skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image240.

Задание даже не столько сложное, сколько многоходовое.   
Разберём алгоритм решения:

1) По условию требуется найти угол между векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image182_0000 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image243, поэтому нужно использовать формулу skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image245.

2) Находим скалярное произведение skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image247 (см. Примеры №№3,4).

3) Находим длину вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image182_0001 и длину вектора skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image243_0000 (см. Примеры №№5,6).

4) Концовка решения совпадает с Примером №7 – нам известно число skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image249, а значит, легко найти и сам угол: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image251

Краткое решение и ответ в конце урока.

Второй раздел урока посвящен тому же скалярному произведению. Координаты. Будет  даже проще, чем в первой части.

## ****Скалярное произведение векторов,**** ****заданных координатами в ортонормированном базисе****

На уроке [Векторы для чайников](http://www.mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html) мы рассматривали два случая: векторы на плоскости и векторы в трехмерном пространстве, при этом «плоские» и «пространственные» формулы были весьма похожи. Для скалярного произведения векторов всё точно так же! Прежде чем продолжать дальше, скажу, что все рассмотренные выше утверждения, теоремы и задачи (первого раздела данной статьи) справедливы как для плоскости, так и для пространства.

Второе важное замечание касается базиса. В данном разделе рассматриваются **только ортонормированные базисы** плоскости и пространства.

Повествование опять пойдёт параллельно – и для векторов плоскости и для пространственных векторов.

### ****Скалярное произведение в координатах****

**Скалярное произведение векторов** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image253 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image255, заданных в ортонормированном базисе skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image257, **выражается формулой** Формула скалярного произведения векторов плоскости в ортонормированном базисе

**Скалярное произведение векторов** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image261, заданных в ортонормированном базисе skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image263, **выражается формулой** Формула скалярного произведения векторов пространства в ортонормированном базисе

То есть, скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат векторов.

Пример 8

Найти скалярное произведение векторов:  
а) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image267 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image269  
б) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image271 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image273, если даны точки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image275

**Решение:**   
а) Здесь даны векторы плоскости. По формуле skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image277:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image279

К слову: скалярное произведение получилось отрицательным, значит, угол между данными векторами является тупым. Пытливые умы могут отложить на плоскости векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image151_0000 от одной точки, и убедиться, что это действительно так.

б) А тут речь идёт о точках и векторах пространства. Сначала найдём векторы:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image282   
Надеюсь, эта простейшая задача у вас уже отработана.

По формуле skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image284 вычислим скалярное произведение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image286

К слову: скалярное произведение положительно, значит, угол между пространственными векторами skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image288 является острым.

**Ответ:** skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image290

При некотором опыте скалярное произведение можно приноровиться считать устно.

### ****Проверка векторов на ортогональность с помощью скалярного произведения****

Вернёмся к важному случаю, когда векторы являются ортогональными. Напоминаю: векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image292 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image294 ортогональны тогда и только тогда, когда skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image296. В координатах данный факт запишется следующим образом:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image298 (для векторов плоскости);  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image300 (для векторов пространства).

Пример 9

а) Проверить ортогональность векторов: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image302 и  skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image304  
б) Выяснить, будут ли перпендикулярными отрезки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image310

**Решение:**   
а) Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image312, следовательно, skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image314

б) Здесь речь идёт об **обычных отрезках** плоскости (в чём сходство и различия вектора и отрезка, я очень подробно разъяснил на первом уроке). Речь идёт об обычных отрезках, а задача всё равно решается через векторы. Найдём векторы:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image316

Вычислим их скалярное произведение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image318, значит, отрезки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306_0000 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308_0000 не перпендикулярны.

Обратите внимание на два существенных момента:

– В данном случае нас не интересует конкретное значение скалярного произведения, **важно, что оно не равно нулю**.

– В окончательном выводе «между строк» подразумевается: «если векторы не ортогональны, значит, соответствующие отрезки тоже не будут перпендикулярными». Геометрически это очевидно, поэтому можно сразу записывать вывод об отрезках:  «значит, отрезки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306_0001 и skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308_0001 не перпендикулярны».

**Ответ:** а) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image314_0000, б) отрезки skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image320 не перпендикулярны.

Пример 10

Даны четыре точки пространства skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0003. Выяснить будут ли перпендикулярными следующие **прямые**:  
а) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0003;  
б) skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image006_0000.

Это задача для самостоятельного решения. В условии требуется проверить перпендикулярность прямых. А решается задача снова через векторы по полной аналогии с предыдущим примером. Геометрически тоже всё очевидно – если удастся доказать перпендикулярность векторов, то из этого автоматически будет следовать перпендикулярность соответствующих прямых. Четыре вектора, которые вы найдёте, называют направляющими векторами прямых.

Полное решение и ответ в конце урока.

Мощь аналитической геометрии – в векторах. Так, в рассмотренных примерах, с помощью скалярного произведения можно установить не только ортогональность векторов самих по себе, но и перпендикулярность отрезков, прямых. И это приоткрылась только малая часть красоты предмета.

Завершая разговор об ортогональности, разберу ещё одну небольшую задачу, которая время от времени встречается на практике:

Пример 11

При каком значении skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image008 векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image010_0000 будут ортогональны?

**Решение:** По условию требуется найти **такое** значение параметра skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image008_0000, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image012_0000 ортогональны тогда и только тогда, когда skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image014_0000.

Дело за малым, составим уравнение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image016_0000

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image018_0000

Решаем простейшее линейное уравнение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image020_0000

**Ответ:** при skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image022  
  
В рассмотренной задаче легко выполнить проверку, в исходные векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image010_0001 подставляем полученное значение параметра skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image022_0000:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image025_0000

И находим скалярное произведение:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image027_0000 – да, действительно, при skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image022_0001 векторы skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029_0001 ортогональны, что и требовалось проверить.

Пример 12

При каком значении skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image008_0001 скалярное произведение векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image031_0000 будет равно –2?

Это простенький пример с векторами плоскости. Для самостоятельного решения.

Немного усложним задачу:

### ****Скалярное произведение в координатах, если векторы заданы суммами векторов****

Пример 13

Найти скалярное произведение векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image033, если skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image035

**Решение:** Напрашивается трафаретное решение предыдущего раздела, где мы составляли произведение и раскрывали скобки: skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image037. Но сейчас нам неизвестны длины векторов skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029_0002 и угол между ними. Зато известны координаты. Решение на самом деле будет очень простым:

Найдём вектор skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040_0000:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image042_0000  
Найдём вектор skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image044_0000:  
skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046_0001  
Проделаны элементарные действия с векторами, которые рассмотрены в конце урока

**МЕТОД КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ**

Зададим на прямой произвольно выбранную точку 0 - начало

координат и не равный нулю вектор *ё* - координатный вектор.

Каждая точка прямой *М* определяет радиус-векторОМ= М,

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

Радиус-вектор М, как к всякий вектор прямой, имеет при заданном координатном векторе в определенную координату X :

М=хе. (3)

**Эту** координату х мы будем называть координатой точки М .

Определение:

Координатой точки на прямой называется координата ее радиуса-вектора.

Задание начала координат (точки 0) и координатного векто­ра *е* определяет систему координат на прямой.

Теорема:

При заданной системе координат каждая точка прямой имеет определенную координату х; каждая координата (произвольное действительное число) определяет единственную точку.

При произвольном выборе координатного вектора *е* система координат называется аффинной. Если вектор е имеет длину, равную единице, то система координат называется декартовой системой координат. При этом координатный вектор обозначается буквой *i.*

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ.

Знание координат точек позволяет решать все задачи относительно точек на прямой.

Справедлива теорема, которая будет нам одинаково полезна и в геометрии на прямой, и на плоскости, и в пространстве.

Пусть A и B -- две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат: (x*1* ; y*1* ) и (x*2* ; y*2* ), тогда

http://dcs.isa.ru/www/vladimirv/Geometry/dshar/sco_11.1.2/ch11.1.2-1.gif

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме. В самом деле, пусть A1 и B1 -- соответственно проекции точек A и B на ось абсцисс, M -- проекция A на прямую BB1 .

Имеем: AB -- гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами AM и BM. но AM = A1 B1 = | x2 - x1 |. Тоно так же BM = | y2 - y1 |.

Следовательно,

AB2 = AM2 + BM2 = (x2 - x1 )2 + (y2 - y1 )2

Расстояние d между двумя точками http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_001.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_002.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_003.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_004.gif) и http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_005.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_006.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_007.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_008.gif) в пространстве определяется формулой

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_009.gif.

Координаты x, y, z точки М, которая делит отрезок http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_010.gif, ограниченный точками http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_011.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_012.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_013.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_014.gif) и http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_015.gif(http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_016.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_017.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_018.gif), в отношении http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_019.gif, определяется по формулам

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_020.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_021.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_022.gif.

В частности, при http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_023.gifимеет координаты середины данного отрезка:

http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_024.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_025.gif, http://a-geometry.narod.ru/theory/img_28/img_28_026.gif.

1. На координатной прямой *Ох* заданы две точки формулаи формула. Найдите расстояние от начала отсчета до точки *А*, а также расстояние между точками *А* и *В*.

Решение:

Расстояние от начала отсчета до точки *А* на координатной прямой равно модулю координаты этой точки, поэтому, формула.

Расстояние между двумя точками равно модулю разности их координат: формула

Задачи для самопроверки:

1.Точка А(2;4;7) точка В(9;4;3). Найти расстояние между А и В. (Ответ:АВ=8,062 )

2.Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), C(3; 1; -9), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между 1). А и С, 2). B и D, 3). C и D. (Ответ:7; 13; 5)

3.Вычислить расстояния от начала координат О до точек A(4; -2; -4), B(-4; 12; 6), C(12; -4; 3), D(12; 16; -15).(Ответ: 6; 13; 14; 25).

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**ПОНЯТИЕ ШРОЯТНОСТИ**

Когда про какого-нибудь стрелка говорят, что он при данных условиях стрельбы дает 92$ попаданий, то это означает, что из сотни выстрелов, произведенных им при некоторых определенных условиях (одна и та же цель на том же расстоянии, та же винтов­ка и т.д.), в среднем бывает примерно 92 удачных (и, значит , около 8 неудачных).

Конечно, не в каздой сотне будет *92* удачных Еыстрела; ино­гда их число будет 91 или 90, иногда 93 или 94; подчас число их может оказаться даже заметно меньше или заметно больше, чем 92; но в среднем при многократном повторении стрельбы в тех же условиях этот процент попаданий будет оставаться неизменным.

Рассмотрим еще один пример. На некотором предприятии заме­чено, что в данных условиях в среднем 1,6$ изготовленных пред­метов оказываются не удовлетворяющими стандарту, идут в брак. Это означает, что в партии, скажем, из' 1000 изделий, еще не под­вергнутых браковке, будет примерно 16 непригодных. Иногда, ко­нечно, число бракованных деталей будет несколько больше, иногда несколько меньше, но в среднем их число будет близко к 16, и в большинстве партий по 1000 изделий оно также будет близко к 16. Конечно, и здесь мы предполагаем, что условия производства, обо­рудование, сырье, квалификация рабочих и пр. останутся неизмен­ными.

Таких примеров можно привести сколько угодно. Ео всех этих примерах мы видим, что при однородных массогагх операциях (мно­гократная стрельба, массовое производство изделий и т.п.) про­цент того или иного вида важных для нас событий (попадание в цель, нестандартность изделия и пр.) при данных условиях почти всегда бывает примерно одним и тем же, лишь в редких случаях уклоняясь сколько-нибудь значительно от некоторой средней циф­ры.

Можно поэтому сказать, что эта средняя цифра является ха­рактерным показателем данной массовой операции (при данных стро­го установленных условиях). Знание таких показателей очень важ­но в самых различных областях: военном деле, технике, экономи­ке, физике, химии и пр.; оно позволяет нам не только оценивать уже происшедшие массовые явления, но и предввдеть исход той или иной массовой операции в будущем.

Если стрелок в данных условиях попадает в цель в среднем в 92 из 100 выстрелов, то мы говорим, что для этого стрелка и в этих условиях вероятность попадания составляет 92?! (или 0,92 '). Если в данных условиях в среднем на каждую 1000 готовых изделий некоторого предприятия приходится 16 бракованных, то мы говорим, что вероятность изготовления брака составляет для данного про­изводства 0,016 или 1,6?$.

Что же мы вообще называем вероятностью событий в данной массовой операции? На это теперь нетрудно ответить. Массовая операция состоит из повторения большого числа подобных между собой единичных операций ("стрельба - из отдельных выстрелов,мас­совое производство - из изготовления отдельных предметов и т.п.") Нас интересует определенный результат единичной операции (попа­дание при единичном выстреле, нестандартность отдельного изде­лия и т.д.) и, прежде всего, - число таких результатов в той или другой массовой операции. Процент (или вообще долю) таких "удачных" результатов в дачной массовой операции мы и называем вероятностью этого важного для нас результата. При этом всегда надо иметь в виду, что вопрос о вероятности того или иного со­бытия (результата) имеет смысл только в точно определенных ус­ловиях, в которых протекает наша массовая операция. Всякое су­щественное изменение этих условий влечет за собой, как правило, изменение интересующей нас вероятности.

Если массовая операция такова, что событие f\ (например, попадание в цель) наблюдается в среднем ***CL*** раз среди ***в*** единич­ных операций ( выстрелов) , то вероятность события"' ***(\ в*** данных

условиях составляет

"ожно сказать поэтому, что вероятностью "удачного" исхода единичной операции мы называем отношение в среднем наблюдающе­гося числа таких "удачных" исходов к числу всех единичных опе­раций, составляющих массовую операцию.

Пример. В некотором городе в течение первого квар­тала родились:

в январе - 145 мальчиков и 135 девочек;

в феврале - 142 мальчика и 136 девочек;

в марте - 152 мальчика и 140 девочек.

Как велика вероятность рождения мальчика? Доля рождений маль­чиков:

в январе: -145- 0,518 = 51,8\* ;

280

в феврале: —0,511 = 51,1\* ;

278

в марте: —0,520 = 52,0\* .

292

Мы видим, что это среднее арифметическое число за отдель­ные месяцы близко к числу 0,516 = 51,6\* ; искомая вероятность в данных условиях составляет примерно 0,516 или 51,6\*. Эта цифра хорошо известна в демографии - науке, изучающей динамику насе­ления; оказывается, что доля рождения мальчика в обычных усло­виях в различные периоды времени не будет значительно отклоня­ться от этой цифры.

Оказывается, что однородные случайные события при много­кратном повторении подчиняются определенным закономерностям . Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Невозможные \_и\_достоверные\_события\_

Вероятность события всегда есть положительное число или нуль. Она не может быть больше единицы.

Условимся обозначать через ***т)*** вероятность события ***Д .*** Каково бы ни было это событие,

Чем больше , тем чаще наступает событие п . Если вероят­

ность события очень мала, то оно наступает редко;

если Р(И) — 0 , то событие Н либо никогда не наступа­ет, либо наступает крайне редко, так что практически мотаю счи­тать его невозможным.

Напротив, если

*Р(й)* близко к единице, то такое событие наступает й большинстве случаев; если *Р(Д) =* I, то событие А наступает всегда или почти всегда. Это событие можно считать достоверны:-:.

Если Р(Д)= —— , то событие наступает примерно в по-

2

ловине случаев.

ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Определение I:

Два события называются несовместными, если каждое из них исключает другое.

В противном случае события называются совместными.

Пример I. В урне для голосования обнаружено 20687 бюллетеней, поданных "за" данного кандидата, и 8720 бюллетеней, доданных "против" него. Это - пример несовместных событий:

Событие Aj - "за" кандидата подано 20687 голосов;

Событие А2 - "против" кандидата подано 8720 голосов.

Пример 2. Для поездки в центр города человек может сесть на автобус № 172 или троллейбус В? 76. К остановке подхо­дит троллейбус Р 76 ("событие Aj ) .

Можно рассмотреть другое событие: к остановке подходит транспорт, идущий к центру города (событие Ag) .

События Ат и Ао совместны.

Определение 2:

События Aj , А2 , ... , называются попарно несо­

вместными, если любые два из этих событий несовместны.

\*

Пример 3. Произведено два выстрела по мишени. Собы­тие Aj - "два попадания", А2 \_ "только одно попадание", Ао - "ни одного попадания" — попарно несовместны.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА СОБЫТИЙ

Пусть мы имеем с любое число) событий Aj , А ? , ..., А п. , таких, что в каждой единичной операции обязательно дол­жно наступить одно и только одно из этих событий; условимся та­кую группу событий называть полной системой.

В частности, всякая пара противоположных событий образует полную систему.

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема I

Вероятность наступления в некоторой операции какого - либо одного из результатов Aj , Ag , ... , An равна сумме веро­ятностей , если каждые два из них несовместны между собой, т.е.

В частности, справадлива

Теорема 2

Вероятность суммы двух несовместных событий А и 3 равна

сумме вероятностей этих событий, т.е.

***р(й = + сг:***

В обейх этих теоремах речь идет о несовместных событиях. Если же события совместны, то для них справедлива теорема 2.