МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГБОУ СПО « КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ» КК

Рабочая тетрадь по математике **«Интеграл»**

Студента(ки)____
1 курса ____
Специальность:____

Разработчик: преподаватель
математики
Хашханокова З.З.

Краснодар, 2014

Рассмотрено и одобрено на заседании
методической комиссии
естественнонаучных дисциплин
Протокол № _____
от «_____»_____________ 2014г
Председатель методической
комиссии___________________
Абдуева В.Ф.

Организация разработчик: ГБОУ СПО ««Краснодарский монтажный техникум»КК

Разработчик: Хашханокова Зарема Зауркановна, преподаватель ГБУ СПО «Краснодарский монтажный техникум»КК

Пояснительная записка

Рабочая тетрадь по математике для обучающихся 1 курса всех специальностей, ГБОУ СПО «Краснодарский монтажный техникум»КК составлена в соответствии с действующими рабочими программами и учебниками по математике и может быть использована для самостоятельной работы обучающимися, а также для выполнения домашних работ. Тетрадь содержит задачи репродуктивного, поискового характера, а так же имеется ряд задач повышенной сложности, решение которых требует определенных умений и навыков.

Неопределенный интеграл и его свойства

ИНТЕГРАЛ (от лат. Integer - целый) - одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой - измерять площади, объемы, длины дуг, работу сил за определенный промежуток времени и т. п.

*При интегрировании функций решается задача, обратная дифференцированию функций, а именно, **по заданной производной восстанавливается та функция, которую продифференцировали**.*

Опр.: Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если на этом промежутке выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 7: Если функция $\boldsymbol{F(x)}$ является первообразной для функции $\boldsymbol{f(x)}$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции на этом промежутке задается формулой

$$F(x) + C \ , \quad \text{где} \quad C \in R.$$

Опр. Выражение $F(x)+C$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

читается: «*интеграл эф от икс по дэ икс*»

$\int$ - знак интеграла;

$\boldsymbol{x}$ – переменная интегрирования

$\boldsymbol{f(x)}$ – подынтегральная функция; $\boldsymbol{f(x)dx}$ – подынтегральное выражение.

Символ $\int$ введен *Лейбницем (1675 г.)*. Этот знак является изменением латинской буквы S (*первой буквы слова сумма)*. Возможно происхождение слова интеграл иное: слово **integer** означает ***целый.***

Интегрирование – **отыскание для функции всех ее первообразных.**

Свойства неопределенного интеграла:

I. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

II. Интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица интегралов основных элементарных функций

1	$\int dx = x + C$	8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$	9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
4	$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + C$	11	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13	$\int \sin x dx = -\cos x + C$

7	$\int e^x dx = e^x + C$	11.	$\int \cos x dx = \sin x + C$

Примеры.

Вычислить интеграл

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

2. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

3. $\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx = \frac{3x^6}{6} + c = \frac{x^6}{2} + c$

4. $\int (4x - 5x^2)dx = \int 4x\mathrm{dx} - \int 5x^2 dx = 4\int xdx - 5\int x^2 dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + c$

5. $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$

Вычислить:

$\int 6xdx =$ ____

$\int 2x^7 dx =$ ____

$\int 5(x-2)dx =$ ____

$\int (8x^3 + 4x - 7)dx =$ ____

____

$\int x^2(1+3x)dx =$ ______________________________

____

$\int 3(2x-3)^2 dx =$ ______________________________

$\int (x+4)^2 dx =$ ______________________________

$\int \frac{dx}{x^2} =$ ______________________________

$\int \sqrt[3]{x^2}\, dx =$ ______________________________

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$ ______________________________

$\int 4\sin x dx =$ ______________________________

$\int (1+\cos x)dx =$ ______________________________

$\int \frac{2dx}{\cos^2 x} =$ ______________________________

$\int \frac{3dx}{\sin^2 x} =$ ______________________________

$\int (2-3\sin x)dx =$ ______________________________

$\int (3x^2-2\cos x)dx =$ ______________________________

____

$\int (x - 5e^x)dx =$ ______________________________

Физическое приложение неопределённого интеграла.

Рассмотрим несколько ситуаций, когда при решении задач кинематики используются неопределенные интегралы.

- ПРИМЕР 1

Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 4$. Найти закон ее движения, если за время $t = 2$ с точка прошла 20 м.

РЕШЕНИЕ. Обозначим путь, пройденный точкой за время t, через S. Так как $v = \frac{dS}{dt} = 3t^2 + 4$, то $dS = (3t^2 + 4)\,dt$. Интегрируя, получим $\int dS = \int (3t^2 + 4)\,dt$; $S = t^3 + 4t + C$.

Используя начальные условия, найдем $20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C$, т. е. $C = 4$. Итак, закон движения точки имеет вид $S = t^3 + 4t + 4$.

Определённый интеграл.

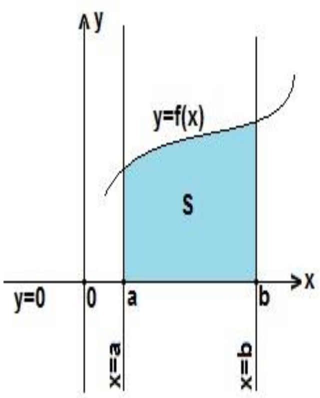
Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит ***формула Ньютона — Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Например,

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3};$$

Геометрический смысл определенного интеграла.



Фигура, ограниченная сверху графиком функции y=f (x), снизу — осью Ох, а слева и справа прямыми x=и x=b называется **криволинейной трапецией.**

Для вычисления площади криволинейной трапеции используют формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями *f(x)=0.5x²+2x+3; g(x)=3-x* *x=-3, x=2*

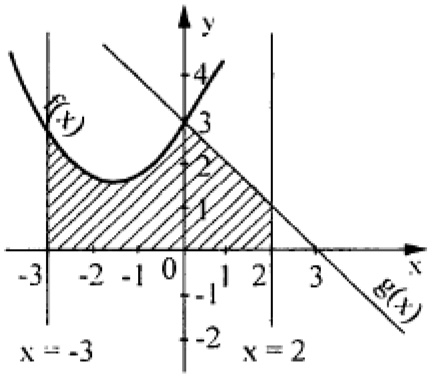
Образец оформления работы

Решение:

Строим параболу $f(x)=0.5x^2+2x+3$.Ветви параболы направлены вверх.

Вершина находиться в точке (2;1).Точка пересечения с осью ординат (0;3)

Прямую $g(x)=3-x$ строим по двум точкам (2;1) и (0;3).



$$S = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} g(x)dx = \int_{-3}^{0} (0.5x^2 + 2x + 3)dx + \int_{0}^{2} (3 - x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x\right)\Bigg|\begin{matrix}0\\-3\end{matrix} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|\begin{matrix}2\\0\end{matrix} = \frac{9}{2} - 9 + 9 + 6 - 2 = 8{,}5$$

Реши сам

1.Запишите формулы для вычисления площади заштрихованных фигур, изображенных на рисунке.

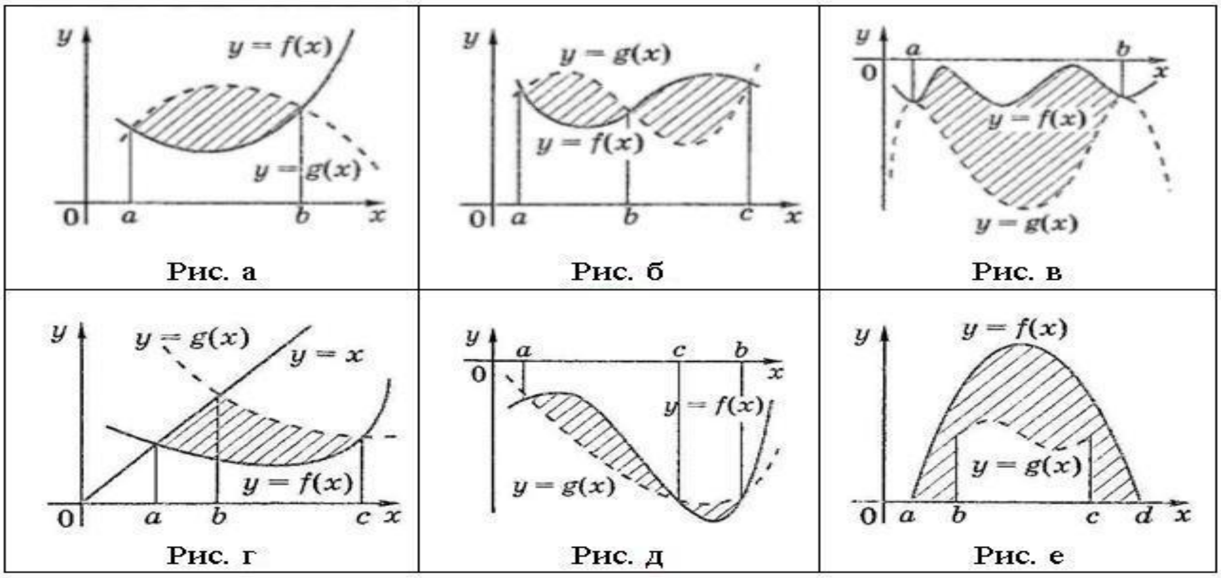


Рис. а; Рис. б; Рис. в; Рис. г; Рис. д; Рис. е

А)____

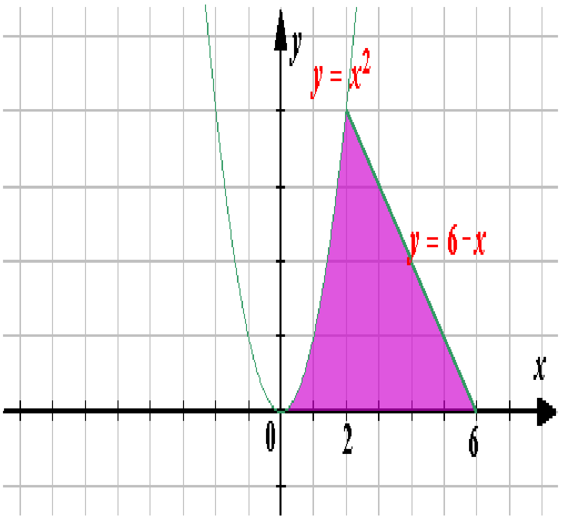
б)____

В)____

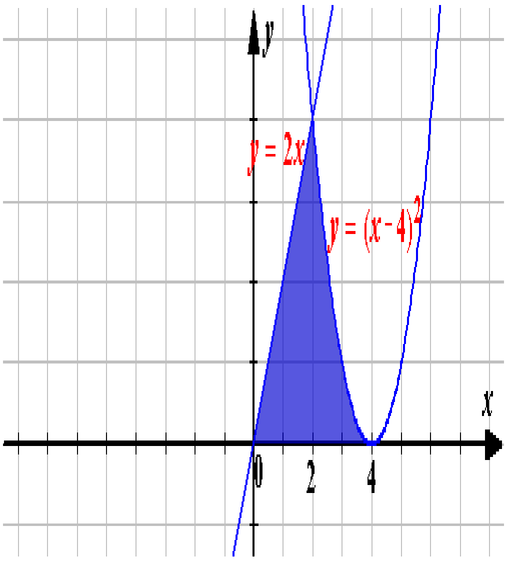
г)____

Д)____

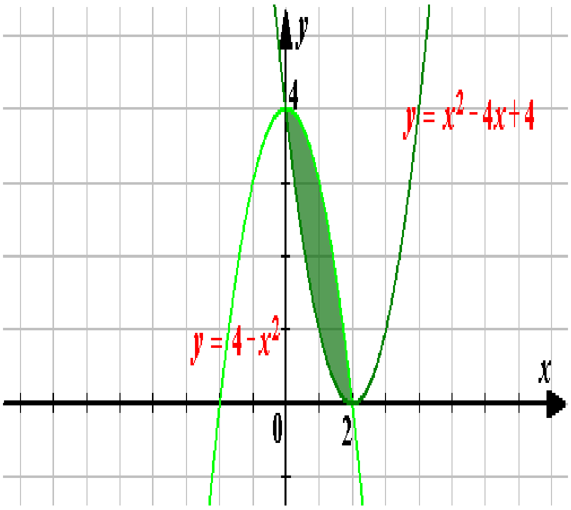
2..Вычислить площадь заштрихованной фигуры.



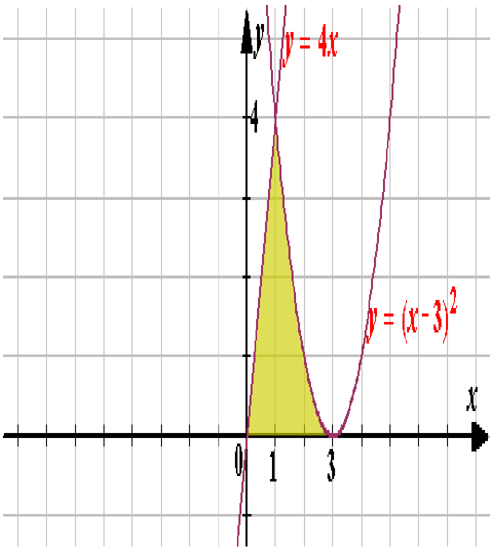
3.Вычислите площадь заштрихованной фигуры



4. Вычислите площадь заштрихованной фигуры

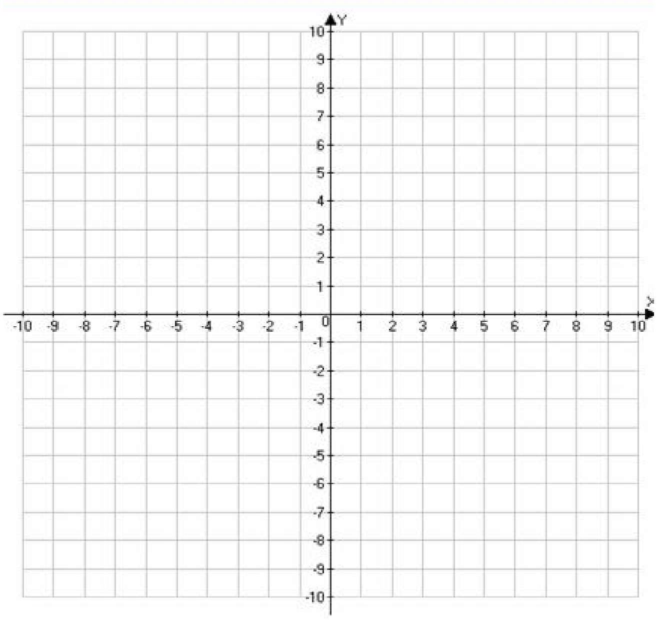


5. Вычислите площадь заштрихованной фигуры

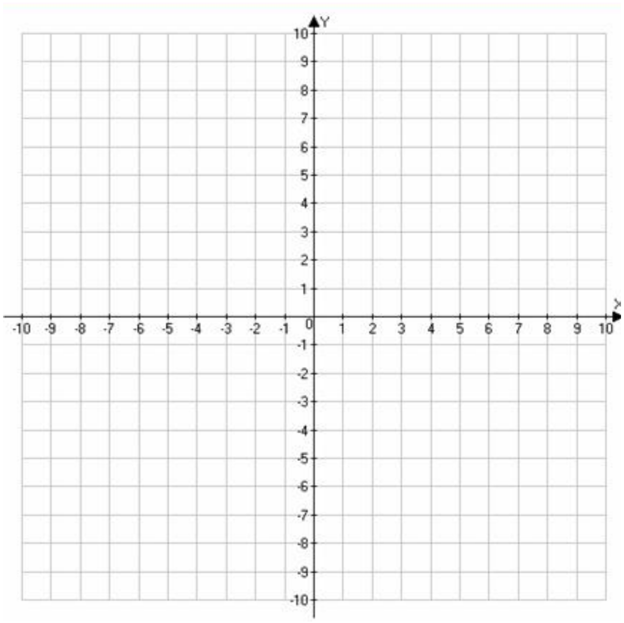


Задание. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

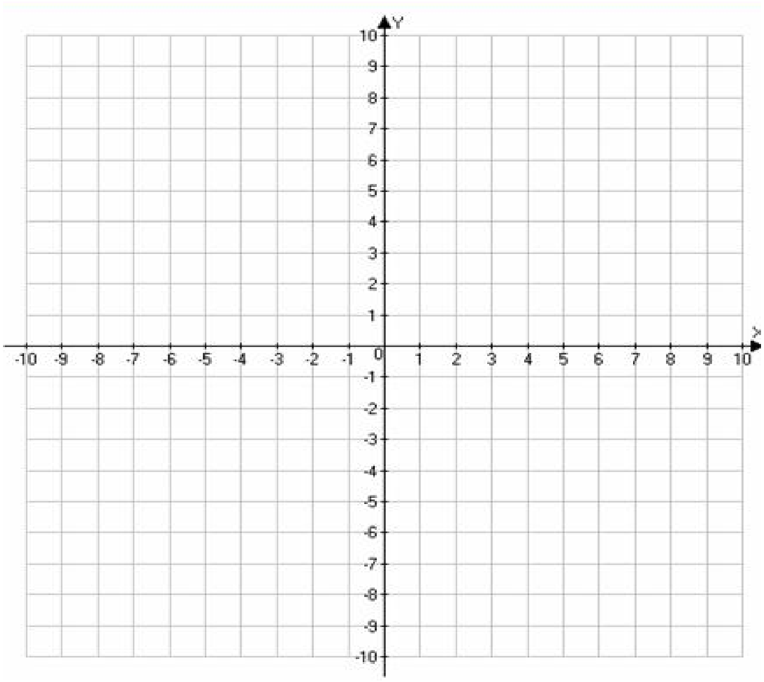
А) $f(x)=x+5$; $g(x)=x^2-4x+5$; $x=-3$, $x=3$; $y=0$.



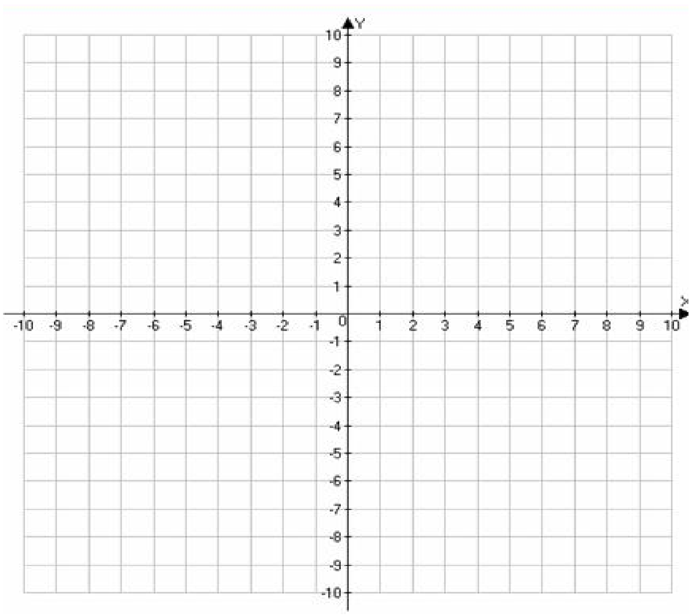
Б) $f(x)=x+5$; $g(x)=\frac{6}{x}$; $x=-2$, $x=6$;



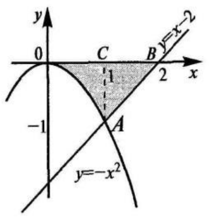
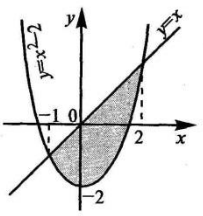
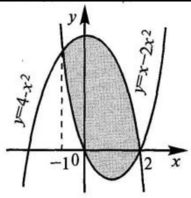
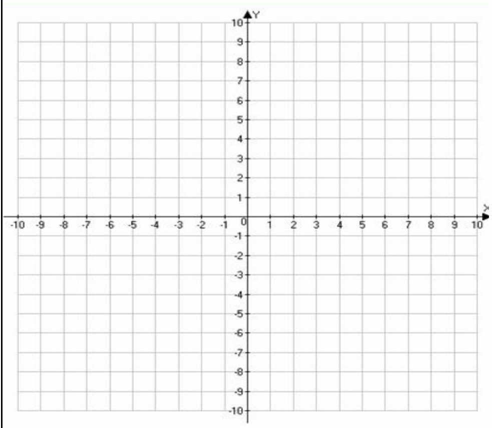
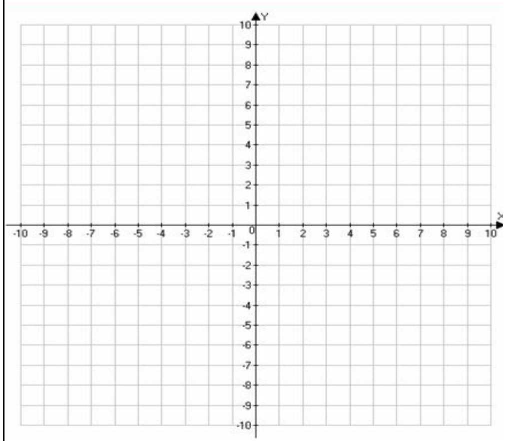
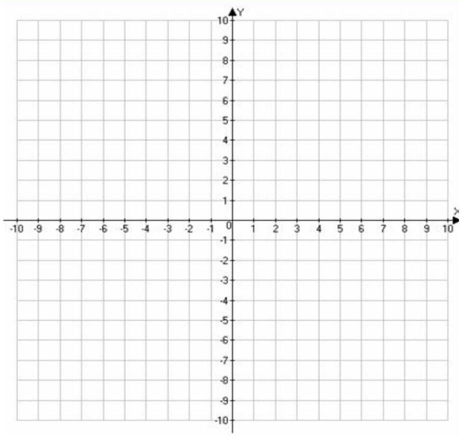
Г) $f(x)=2^x$; $g(x)= 6-x$; $x=-1$, $x=5$;

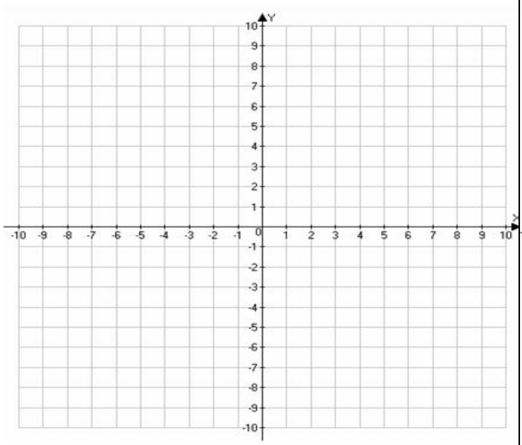
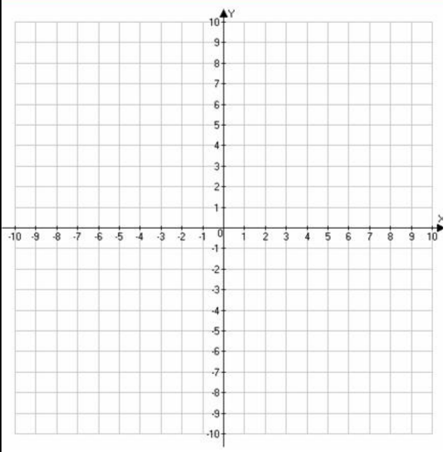
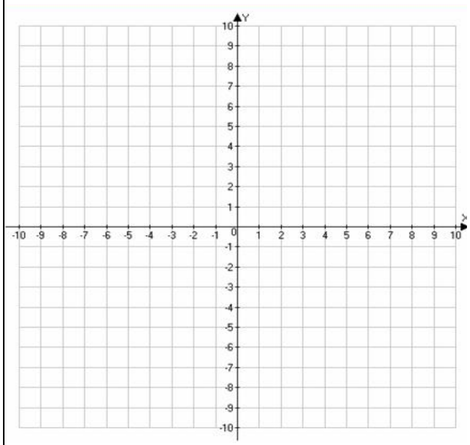


Д) *$f(x)=$; $g(x)=12-3x$; $x=-3$, $x=4$;*



Итоговая контрольная работа

 **А1** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями *$y=-x^2$, $y=x-2, y=0$*	 **А2** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y= x^2 -2$, *$y=x$*	 **А3** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями *$y = 4 - x^2$, $y =x^2 - 2x$*
В1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$*	**В2**. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=3x^2$, $y=3/x, x=2, x=0, y=0$*	**В3**. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=4/x^2$, $x=1, y=x-1$*
 Решение.	 Решение.	 Решение.

С1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=-x^2+4$, $y=-2/x$, $y=-1-x$*	**С2**. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=x^2-4$, $y=-2/x$, $y=1-x$*	**С3**. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций *$y=\log_3 x$, $y=3x$, $x=1$, $y=-3$*
Решение. 	Решение. 	Решение. 

Список литературы

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М.: Просвещение, 2012.- 384 с.
2. Алгебра и начала анализа. 11 класс: поурочные планы по учебнику Ш. А. Алимова и др. – Ч. 1/ авт.-сост. Г. И. Григорьева. – Волгоград: Учитель, 20097.- 159 с.
3. Дадаян А. А Сборник задач по математике: Учеб. Пособие- М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2008.-352 с.
4. Калашникова В.А. Методическое пособие: «Конспекты лекций по математике» [Электронный ресурс] /В.А. Калашникова. - Режим доступа: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/kalashnikova/inde/.
5. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа (Математика для техникумов) [Электронный учебник] /Г.Н Яковлев. - Режим доступа: http://lib.mexmat.ru/books/78472.

6.Горбачева И. С. , преподаватель математики БОУ ОО СПО «Омский строительный колледж». - 2013.