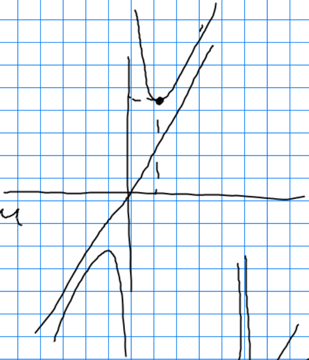
$y = 5\cdot 2^{x} + 3\cdot 2^{-x}$

Н. $E(y)$

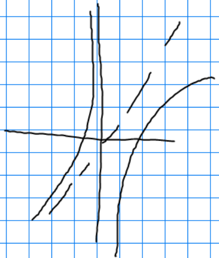
$y = 3t + \frac{4}{t}$



Опр-ть при каких знач. пар-ра a нер-во не им. реш

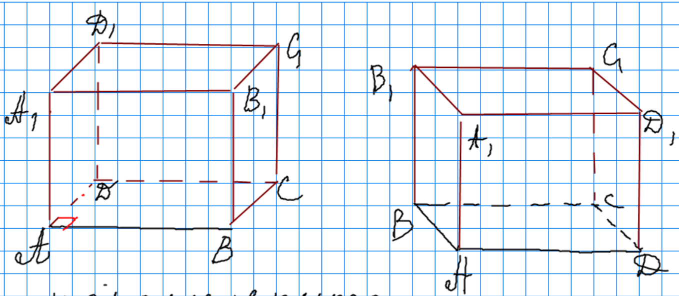
$$\frac{a-(5\cdot 2^{x}+3\cdot 2^{-x})}{(4-|\cos x|)+a} \geq 0$$

C

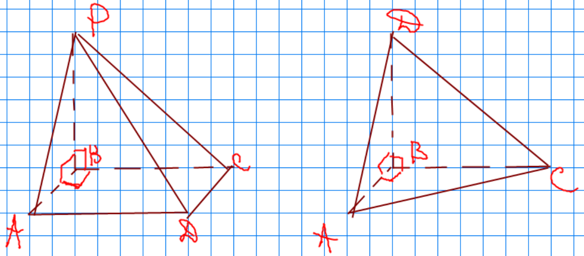


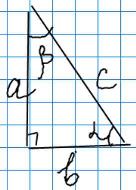
стр 105

2008



параллепипед





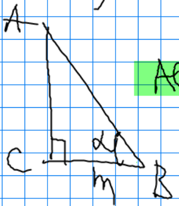
$\sin\alpha = \dfrac{\text{↓↑ кат.}}{\text{гипот.}}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{прилеж. кат.}}{\text{гипот.}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{↓↑ кат}}{\text{прилеж. кат.}}$

$\sin\beta = \dfrac{b}{c}$; $b = c\sin\beta$

$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$



$AC = m\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AC}{m}$

$AB = \dfrac{m}{\cos\alpha}$

Модули:

Опр. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |\underset{\vee 0}{3-\sqrt{2}}| = 3-\sqrt{2}$

$\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} = |\underset{\wedge 0}{3-\sqrt{10}}| = -3+\sqrt{10}$

$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$

$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$

I. Решение уравнений, сод. знак модуля.

$|5| = |-5| = 5$

1°. Простейшие уравнения.

$|x-a| = b$, если $b=0$, то 1 корень
$b>0$, то 2 корня
$b<0$, реш. нет

а) $|x-3| = 13$

1) $x-3=13$
$x=16$

2) $x-3=-13$
$x=-10$

Отв: $-10; 16$

б) $|x-3| = -13$

Отв: реш. нет

в) $|x-3| = 0$
$x=3$

г) $||x-7|-5| = 2$

$|x-7|-5=2$ или $|x-7|-5=-2$

$|x-7|=7$

$|x-7|=3$

$x-7=7$ или $x-7=-7$
$x=14$ $x=0$

$x-7=3$ или $x-7=-3$

2. Уравнения, решаемые с помощью определения модуля.

выр-е	↓↑е выр-е
$x-2$	$-x+2$
$b-c$	$c-b$
$a+2$	$-a-2$
$-c+4$	$c-4$
$3x^2-7x+1$	$-3x^2+7x-1$

$$|f(x)| = g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

a) $|2 - x| = 2x + 1$

1) $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - x = 2x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 2 \\ 3x = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - x < 0 \\ -2 + x = 2x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2 \\ x = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ реш, нет

$x = \frac{1}{3}$ Отв: $\frac{1}{3}$

б) $|1-2x| - 4x = -6$

$\begin{cases} 1-2x \ge 0 \\ \end{cases}$ или $\begin{cases} 1-2x < 0 \\ \end{cases}$

в) $x^2 - |3x-2| - 12 = 0$

$\begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ x^2 - (3x-2) - 12 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - (-3x+2) - 12 = 0 \end{cases}$

б) $x^2 - |3x-2| - 12 = 0$

1) $\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - (3x-2) - 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2 - 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}$

$x = 5$

2) $\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - (-3x+2) - 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x < 2 \\ x^2 + 3x - 2 - 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x^2 + 3x - 14 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3 + \sqrt{65}}{2} \\ x = -\frac{3 - \sqrt{65}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$

$x = -\frac{3 - \sqrt{65}}{2}$

Отв: $5;\ -\frac{3-\sqrt{65}}{2}$

$x^2 + 3x - 14 = 0$

$D =$

$x_{1,2} =$

$$x^2 - |3x-2| - 12 = 0$$

1)
$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - (3x-2) - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x = 5$$

2)
$$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - (-3x + 2) - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x < 2 \\ x^2 + 3x - 2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x^2 + 3x - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3-\sqrt{65}}{2} \\ x = \frac{-3+\sqrt{65}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x = \frac{-3-\sqrt{65}}{2}$$

Отв: $5; \frac{-3-\sqrt{65}}{2}$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x^2 + 3x - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+\sqrt{65}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{65}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x = 5 \qquad x = \frac{-3-\sqrt{65}}{2}$$

Отв. $\frac{-3-\sqrt{65}}{2}$; 5

1) $|x-1|=2x-5$

2) $|x+5|=2x$

3) $||x-7|-25|=16$

4) $||x-1|+3|=3$

5) $x^2-6|x|+5=0$

6) $x^2-6x+7-|x-3|=0$

7) Р. Н. $\dfrac{x^2(x-1)}{x+4}\geq 0$

ИИ

3.

$$|f(x)| = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $|x^2 - 4x - 2| = x + 4$

1) $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 2 = x + 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ -x^2 + 4x + 2 = x + 4 \end{cases}$

x^2-5x-6

6

-1

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Отв: $\pm 1; 2; 6$

$$|x^3 - x - 1| = -x$$

1) $\begin{cases} -x \geq 0 \\ x^3 - x - 1 = -x \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ x = 1 \end{cases}$

р. нет

2) $\begin{cases} -x \geq 0 \\ -x^3 + x + 1 = -x \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^3 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ (x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$

	1	0	-2	-1
-1	1	-1	-1	0

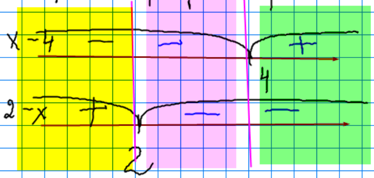
$$\begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Отв: $-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$|x-4|-|2-x|=-2.$$



$$\begin{cases} x<3 \\ 5=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<3 \\ x-\text{нр} \end{cases}$$

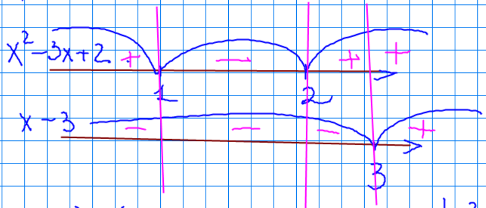
1) $\begin{cases} x<2 \\ -x+4-(2-x)=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x<2 \\ 2=-2 \end{cases}$; р. нет.

2) $\begin{cases} 2\leq x<4 \\ (-x+4)-(-2+x)=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\leq x<4 \\ -2x=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\leq x<4 \\ x=4 \end{cases}$; р. нет.

3) $\begin{cases} x\geq 4 \\ x-4-(-2+x)=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 4 \\ -2=-2 \end{cases}$; $x\geq 4$

Отв: $[4;\infty)$

2) $|x^2 - 3x + 2| = |x - 3| + 17$



$x^2 - 3x + 2 = 0$

1

2

1) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ 2 \le x \le 3 \end{array} \right. \\ x^2 - 3x + 2 = -x + 3 + 17 \end{cases}$

2)

$|x^2 - 5x - 14| - |x^2 - 3x + 2| = 2x + 34$

$|3 - x| - 2|x| = 17x + 2$

5° Ур-я вида $|f(x)| = |g(x)|$

$$|f(x)| = |g(x)|$$
$$\Updownarrow$$
$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

$$x^2 = |x|^2 = |x^2|$$

Д-во:

$$|f(x)| = |g(x)|$$
$$[f(x)]^2 = [g(x)]^2$$
$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0$$
$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

1. Уравнения высших степеней, имеющие рациональные корни.

Теорема. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ Является корнем уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

с целыми коэффициентами, то

p - делитель свободного члена a_0
q - делитель старшего коэффициента a_n.

1) $x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$

p: $\pm 2 \pm 1$

q: ± 1

$\frac{p}{q}$: $\pm 1; \pm 2$.

1) $x = 1$

$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 7 - 2 = 0$

$1 - 6 + 7 - 2 = 0$

$0 = 0$ – верно, след., $x = 1$ – корень

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+7x-2 & x-1 \\
\hline
x^3-x^2 & x^2-5x+2 \\
\hline
-5x^2+7x-2 & \\
-5x^2+5x & \\
\hline
2x-2 & \\
2x-2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Схема Горнера.

	1	−6	7	−2
1	1	−5	2	0

2) получили:

$$(x-1)(x^2-5x+2)=0$$

1) $x-1=0$, $x=1$

2) $x^2-5x+2=0$, $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $1;\ \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

$3x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$x - \alpha$

p: $\pm 2 \pm 1$

q: $\pm 3 \pm 1$

$\frac{p}{q}$: $\pm \frac{2}{3} \pm 2 \pm \frac{1}{3} \pm 1$

1). $x = 1$

	3	1	3	-5	-2
1	3	4	7	2	0

2) $(x-1)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) = 0$

	3	4	7	2
$-\frac{1}{3}$	3	3	6	0

3) $(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x+6)=0$

1) $x=1$ 2) $x=-\frac{1}{3}$ 3) $x^2+x+2=0$

$D<0$

р. нет

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

1) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 6 = 0$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$

$x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = t^2$

$x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Внимание

Ур-в. прош.

Получим:

$t^2-2+2t-6=0$

$t^2+2t-8=0$

$t_1=-4 \quad t_2=2.$

$D = b^2-4ac$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$

1) $x+\frac{1}{x}=-4$

$x^2+4x+1=0$

2) $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2-2x+1=0$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$ $(x-1)^2 = 0$

Отв: $1;\ -2 \pm \sqrt{5}$ $x = 1$

б). $x^2 + \frac{9}{x^2} + 3x - \frac{9}{x} - 16 = 0$

$x^2 + \frac{9}{x^2} + 3\left(x - \frac{3}{x}\right) - 16 = 0$

$x - \frac{3}{x} = t$

$\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = t^2$

$x^2 - 6 + \frac{9}{x^2} = t^2$

$x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 + 6$

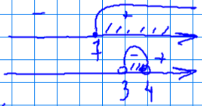
$t^2 + 6 + 3t - 16 = 0$

⋮

$$(|x-1|-3)(x-3)<0$$

1) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ (x-1-3)(x-3)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ (x-4)(x-3)<0 \end{cases}$



$(3;4)$

2) $\begin{cases} x-1<0 \\ (-x+1-3)(x-3)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<1 \\ (-x-2)(x-3)<0 \end{cases}$

$(-\infty;-2)$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(3;4)$

$|f(x)| < g(x)$

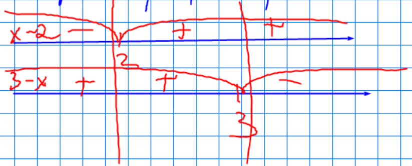
$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1 \geq 2x^2-x+1 \\ 2x^2+x-1 \leq -2x^2+x-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x \geq 2 \\ 4x^2 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Отв: $\{0\} \cup [1;\infty)$

$$|x-2|+|3-x|>4+x$$



Отв: $(-\infty;\frac{1}{3})\cup(9;\infty)$

1) $\begin{cases} x<2 \\ -x+2+3-x>4+x \end{cases}$ $\begin{cases} x<2 \\ x<\frac{1}{3} \end{cases}$; $x<\frac{1}{3}$

2). $\begin{cases} 2\le x<3 \\ x-2+3-x>4+x \end{cases}$ $\begin{cases} 2\le x<3 \\ x<-3 \end{cases}$ р. нет

3) $\begin{cases} x\ge 3 \\ x-2-3+x>4+x \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3 \\ x>9 \end{cases}$ $x>9$

5). Нер-ва вида

$$|f(x)| \gtrless |g(x)|$$

$$(f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) \gtrless 0$$

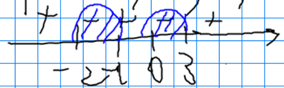
$$|x^2-3| < |3+x|$$

$$(x^2-3-3-x)(x^2-3+3+x) < 0$$

$$(x^2-x-6)(x^2+x) < 0$$

1°. корни: 3; −2; 0; −1

2°.



1). Р. н-во

$\frac{x}{x-1} \le 1$ | $\frac{x}{x-1} \ge 1$

② Р. ур.

$|3x+1| = |x-1|$ | $|3x-1| = |x+1|$

③

$|x-4| + |x-8| = 4$ | $|x-3| + |x-8| = 5$

④ Р. ур.

$(x^2+2x)\sqrt{x+1} = 0$ | $(x^2+5x)\sqrt{x+2} = 0$

1) Упр. $\dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$

2) Р. ур. $x^3+3x+4=0$

3) Р. н-во: $|x+1|+|x-2| \le 5$

4) $|x+5| > 2x-1$

5) $|6x-7| < 4x+1$

11
641-4,6
637
634-6

Опр. 1. Симметрическим (возвратным) уравнением n-й степени наз. ур-е вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$$

т-ма: Возвратное ур-е нечетной степени имеет корень, равный -1