**Решение систем уравнений на основе ассоциаций, аналогий или заимствований.**

Решение систем уравнений широко представлено в курсе математики как основной, так и средней школы. Широко известны основные методы решения систем: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод замены переменной. Однако, есть такие системы, для решения которых требуется нестандартный подход, нестандартные методы решения, так как обычные методы либо приводят к громоздким вычислениям, либо вовсе не позволяют решить систему. В своей статье я попыталась такие способы продемонстрировать. К числу нестандартных методов решения систем уравнений могут быть отнесены метод ассоциаций, аналогий и заимствований. Считаю, что материал, представленный в моей работе, поможет и учителям, и учащимся: первым - при подготовке и проведении уроков математики, вторым – при подготовке к ГИА и ЕГЭ.

Рассмотрим очень простой пример.

Пример 1.

$\left\{\begin{array}{c}x+y=5\\xy=6\end{array}\right.$

Сразу можно решить эту систему известным методом подстановки:

$\left\{\begin{array}{c}x=5-y\\-y^{2}+5y=6\end{array}\right.$

Решим второе уравнение отдельно:

$-y^{2}+5y-6=0$

*D=25-24=1*

$y\_{1}=\frac{-5-1}{2}=3$ *,* $x\_{1}$*=2*

$y\_{2}=\frac{-5+1}{2}=2 $*,*$ x\_{2}$*=3*

Ответ: $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=2\\y\_{1}=3\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=3\\y\_{2}=2\end{array}\right.$

Но спросим себя: "Где нам встречались выражения "х + у" и "ху"? Возможно в предыдущих темах курса алгебры, а, возможно, в геометрии, физике. Но сразу же, конечно, припоминается теорема Виета, вернее, теорема, обратная теореме Виета: "Если х, у удовлетворяют равенствам х + у = -р, ху = q, то х и у - корни уравнения z2 + pz + q = 0".

Применение этой теоремы к искомым числам х и у позволяет утверждать, что х и у - корни уравнения z2 - 5z + 6 = 0.

После решения этого уравнения можем записать ответ:

 $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=z\_{1}\\y\_{1}=z\_{2}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=z\_{2}\\y\_{2}=z\_{1}\end{array}\right.$

т.е.

 $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=3\\y\_{1}=2\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=2\\y\_{2}=3\end{array}\right.$

Эта же идея может реализоваться и при решении более сложных заданий.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$\left\{\begin{array}{c}x+y+z=6\\xy+yz+zx=11\\xyz=6\end{array}\right.$

Система содержит три переменных, поэтому, скорее всего, имеет смысл применить теорему, обратную теореме Виета для многочлена третьей степени: "Если х, у, z удовлетворяют равенствам

х + у + z = -р, ху + yz + xz = q, xyz = -г, то x,y,z - корни уравнения

u3 + pu2 + qu + г = 0"

Следовательно, x,y,z - корни уравнения u3 – 6u2 + 11u — 6 = 0

Решая его, находим

$u\_{1}=1$*,* $u\_{2}=2$*,* $u\_{3}=3$

Запишем ответ:

$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=1\\y\_{1}=2\\z\_{1}=3\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=1\\y\_{2}=3\\z\_{2}=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{3}=2\\y\_{3}=1\\z\_{3}=3\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{4}=2\\y\_{4}=3\\z\_{4}=1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{5}=3\\y\_{5}=1\\z\_{5}=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{6}=3\\x\_{6}=2\\x\_{6}=1\end{array}\right.$

***Пример 3.***

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+z^{2}=xy+yz+zx\\2x+3y+5z=10\end{array}\right.$

Сразу бросается в глаза, что это необычная система, что в нее входят три переменных, а уравнений только два. Можно выразить одну переменную через другие из второго уравнения и подставить в первое. При реализации этой идеи много "неинтересных вычислений", поэтому поищем что-нибудь другое. Обратимся к первому уравнению. С чем оно ассоциируется? Во-первых, относительно x, первое уравнение является квадратным; во-вторых, имеются квадраты переменных и их произведения; в-третьих, напоминает что-то, связанное с неравенствами.

Покажем, что каждая из этих ассоциаций приводит к решению.

1. $x^{2}+y^{2}+z^{2}=xy+yz+zx$

$x^{2}-\left(y+x\right)x+y^{2}-yz+z^{2}=0$

*D=*$y^{2}+2yz+z^{2}-4y^{2}+4yz-4z^{2}=-3(y-z)^{2}$*,*

$-3(y-z)^{2}\leq 0$

$D\leq 0$*,* следовательно $y=z$, тогда $x=y$

1. $x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-yz-zx=0$

$2x^{2}+2y^{2}+2z^{2}-2xy-2yz-2zx=0$

$(x-y)^{2}+(y-z)^{2}+(z-x)^{2}=0$(1)

т.к. $(x-y)^{2}\geq 0$, $(y-z)^{2}\geq 0,$ $(z-x)^{2}\geq 0$, то равенство (1) возможно лишь в случае $x-y=y-z=z-x=0$, т.е. $x=y=z$

1. $x^{2}+y^{2}\geq 2xy$

$y^{2}+z^{2}\geq 2yz$

$x^{2}+z^{2}\geq 2xz$

Сложим почленно эти неравенства

$2x^{2}+2y^{2}+2z^{2}\geq 2xy+2yz+2zx$

$x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq xy+yz+zx$

Равенство возможно в том и только в том случае, если $x=y=z$

Далее как в (1) и (2) Приходим к системе:

$\left\{\begin{array}{c}x=y=z\\2z+3y+5z=10\end{array}\right.$

Решая ее, находим $x=y=z=1,$

Ответ $\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=1\\z=1\end{array}\right.$

Я посчитала, что интересным будет также решение систем, содержащих не только уравнения, но и неравенства, то есть смешанных систем.

***Пример 4.*** Решить систему:

$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{\frac{1}{4}(x-y)^{2}-(x-y)^{4}}=y^{2}-2x^{2}\\y>4x^{4}+4yx^{2}+\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Выделим полный квадрат и преобразуем исходную систему к следующему виду:

$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{\frac{1}{16}-\left(\left(x-y\right)²-\frac{1}{4}\right)²}=y^{2}-2x^{2}\\y>4x^{4}+4yx^{2}+\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Если ($x\_{0}, y\_{0}$) – решение системы, то

$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{\frac{1}{16}-((x\_{0}-y\_{0})^{2}-\frac{1}{4})^{2}}=y\_{0}^{2}-2x\_{0}^{2}\\y\_{0}>4x\_{0}^{4}+4y\_{0}x\_{0}^{2}+\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Тогда

$\sqrt{\frac{1}{16}-((x\_{0}-y\_{0})^{2}-\frac{1}{4})^{2}}+y\_{0}>y\_{0}^{2}-2x\_{0}^{2}+4x\_{0}^{4}+4y\_{0}x\_{0}^{2}+\frac{1}{2}$

Выделяя полные квадраты в правой части последнего неравенства относительно либо $x\_{0}^{2}$, либо $y\_{0}^{2}$, получим

$\sqrt{\frac{1}{16}-((x\_{0}-y\_{0})^{2}-\frac{1}{4})^{2}}>(y\_{0}+\frac{4x\_{0}^{2}-1}{2})^{2}+\frac{1}{4}$ (2)

Заметим, что $\sqrt{\frac{1}{16}-((x\_{0}-y\_{0})^{2}-\frac{1}{4})^{2}}\leq \frac{1}{4}$

И что $(y\_{0}+\frac{4x\_{0}^{2}-1}{2})^{2}+\frac{1}{4}\geq \frac{1}{4}$

Теперь ясно, что неравенство (2) равносильно системе:

$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{16}-((x\_{0}-y\_{0})^{2}-\frac{1}{4})^{2}=\frac{1}{16}\\y\_{0}+\frac{4x\_{0}^{2}-1}{2}=0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x\_{0}-y\_{0}=\frac{1}{2}\\y\_{0}+\frac{4x\_{0}^{2}-1}{2}=0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=y\_{0}+\frac{1}{2}\\y\_{0}+4x\_{0}^{2}-\frac{1}{2}=0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x\_{0}-y\_{0}=-\frac{1}{2}\\y\_{0}+\frac{4x\_{0}^{2}-1}{2}=0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}y\_{0}=x\_{0}-\frac{1}{2}\\x\_{0}-\frac{1}{2}+\frac{2x\_{0}^{2}-1}{2}=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=-1\\y\_{0}=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=\frac{1}{2}\\y\_{0}=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=0\\y\_{0}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\_{0}=-\frac{1}{2}\\y\_{0}=0\end{array}\right.\end{array}\right.$ (3)

Итак, все решения системы (1) содержатся среди решений совокупности (3)

Подстановкой убеждаемся, что решением исходной системы являются:

$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=-1\\y\_{1}=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=0\\y\_{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Вот еще одно заимствование из алгебры:

***Пример 5.***

$\left\{\begin{array}{c}2x^{2}+4xy-5y=1\\x^{2}+xy-6y^{2}=0\end{array}\right.$

Разделим обе части второго уравнения на $y^{2}$:

$\frac{x^{2}}{y^{2}}+\frac{x}{y}-6=0$

Обозначим $\frac{x}{y}$ за *a*

$a^{2}+a-6=0$

$D=1+24=25$

$a\_{1}=\frac{-1-5}{2}=-3$

$a\_{2}=\frac{-1+5}{2}=2$

Решение этого уравнения приводит нас к следующей совокупности двух систем:

$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x=-3y\\2x^{2}+4xy-5y=1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x=2y\\2x^{2}+4xy-5y=1\end{array}\right.\end{array}\right.$

Решая первую систему, находим:

$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=\frac{1}{2}\\y\_{1}=-\frac{1}{6}\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=-3\\y\_{2}=1\end{array}\right.$

Из второй системы получаем:

$x\_{1}=\frac{5-\sqrt{89}}{16}$ и $x\_{2}=\frac{5+\sqrt{89}}{16}$

$y\_{1}=\frac{5-\sqrt{89}}{32}$ $y\_{2}=\frac{5+\sqrt{89}}{32}$

Ответ: ($\frac{1}{2};-\frac{1}{6})$; (-3;1); ($\frac{5-\sqrt{89}}{16}$;$ \frac{5-\sqrt{89}}{32})$; ($\frac{5+\sqrt{89}}{16}; \frac{5+\sqrt{89}}{32})$

***Пример 6.***

$\left\{\begin{array}{c}6x^{2}+2xy-3x-y=0\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$6x^{2}+2xy-3x-y=0$

Перепишем его следующим образом:

$2x\left(3x+y\right)-\left(3x+y\right)=0$

Получаем систему: $\left\{\begin{array}{c}\left(3x+y\right)\left(2x-1\right)=0\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$ , которая равносильна совокупности систем:

$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}3x+y=0\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2x-1=0\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}3x+y=0\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=0,5\\2x^{2}-y^{2}+2x+y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}y=-3x\\-7x^{2}-x-\frac{3}{2}=0\end{array}\right.$ $-y^{2}+1,5+y=\frac{3}{2}$

$D=1-42=-41$ $y\left(1-y\right)=0$

 Корней нет. $y=0 или 1-y=0$

 $y=1$

Объединение множеств решений этих систем является множеством решений системы (1).

Ответ: $\left(0,5;0\right), (0,5;1)$

***Пример 7.***

$\left\{\begin{array}{c}7xy+2x^{2}-4y^{2}=0\\x^{2}-5xy+y=-11\end{array}\right.$

Перепишем первое уравнение системы в виде: $\left(2x-y\right)\left(x+4y\right)=0$

Которая равносильна совокупности систем: $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}2x-y=0\\x^{2}-5xy+y=-11\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x+4y=0\\x^{2}-5xy+y=-11\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. $y=2x$2) $x=-4y$

$-9x^{2}+2x+11=0$$36y^{2}+y+11=0$

$D=400$$D<0$

$x\_{1}=\frac{-2-20}{-18}=\frac{11}{9}$Корней нет.

$x\_{2}=\frac{-2+20}{-18}=-1$

$y\_{1}=\frac{22}{9}$

$y\_{2}=-2$

Ответ: $\left(\frac{11}{9};\frac{22}{9}\right);(-1;-2)$

***Пример 8.***

$\left\{\begin{array}{c}\left(x^{2}+y^{2}\right)\left(x^{3}+y^{3}\right)=32\\x+y=2\end{array}\right.$

$\left(\left(x+y\right)^{2}-2xy\right)\left(x+y\right)\left(x^{2}-xy+y^{2}\right)=32$

$\left(\left(x+y\right)^{2}-2xy\right)\left(x+y\right)\left(x+y\right)^{2}-3xy)=32$

$2\left(4-2xy\right)\left(4-3xy\right)=32$

$\left(4-2xy\right)\left(4-3xy\right)=16$

$6x^{2}y^{2}-20xy=0$

$3x^{2}y^{2}-10xy=0$

$xy\left(3xy-10\right)=0$

$\left\{\begin{array}{c}xy=0\\x+y=2\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}3xy-10=0\\x+y=2\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x=2-y\\-y^{2}+2y=0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=2-y\\3y\left(2-y\right)-10=0\end{array}\right.$

$y\left(2-y\right)=0$ $6y-3y^{2}-10=0$

$y=0 или 2-y=0$ $D=36-120=-84$

 $y=2$ Корней нет.

$x=2 или x=0$

Ответ: (2;0), (0;2)

***Пример 9.***

$\left\{\begin{array}{c}xy=-2\\(x-y)^{2}+x+y=10\end{array}\right.$

$x^{2}+y^{2}+x+y=6$

$(x+y)^{2}-2xy+x+y=6$

$(x+y)^{2}+\left(x+y\right)-2=0$

Обозначим $\left(x+y\right)$ за **a**

$a^{2}+a-2=0$

$D=1+8=9$

$a\_{1}=-\frac{-1-3}{2}=-2$

$a\_{2}=-\frac{-1+3}{2}=1$

Получаем системы:

$\left\{\begin{array}{c}x+y=-2\\xy=-2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\xy=-2\end{array}\right.$

$z^{2}+2z-2=0$ $z^{2}-z-2=0$

$D=4+8=12$ $D=1+8=9$

$z\_{1}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$ $z\_{1}=\frac{1-3}{2}=-1$

$z\_{2}=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-1$ $z\_{2}=\frac{1+3}{2}=2$

Ответ: $(-\sqrt{3}-1; \sqrt{3}-1$); ($\sqrt{3}-1$;$ -\sqrt{3}-1)$; $\left(-1;2\right);(2;-1)$

***Пример 10.***

$\left\{\begin{array}{c}x\left(3x-2y\right)=y^{2}\\3y^{2}=2x\left(x+2\right)-3\end{array}\right.$

3$x^{2}-2xy-y^{2}=0$

$\left(3x+y\right)\left(x-y\right)=0$

$3x+y=0$ или $x-y=0$

$\left\{\begin{array}{c}y=x\\x^{2}-4x+3=0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}y=-3x\\16x^{2}-4x+3=0\end{array}\right.$

$D=16-12=4$ $D=16-192=-176$

$x\_{1}=\frac{4-2}{2}=1$ Корней нет.

$x\_{2}=\frac{4+2}{2}=3$

$y\_{1}=1$

$y\_{2}=3$

Ответ: (1;1); (3;3)

***Пример 11.***

$\left\{\begin{array}{c}y^{4}+xy^{2}-2x^{2}=0\\x+y=6\end{array}\right.$

Посмотрим на первое уравнение и рассмотрим переменные x и y. Решим первое уравнение относительно $y^{2}$ или решим относительно *x*:

1. $y^{4}+xy^{2}-2x^{2}=0$ 2. 2$x^{2}-xy^{2}-y^{4}=0$

$D=x^{2}+8x^{2}=9x^{2}$ $D=y^{4}+8y^{4}=9y^{4}$

$y\_{1}^{2}=\frac{-x+3x}{2}=x$$x\_{1}=\frac{y^{2}+3y^{2}}{4}=y^{2}$

 $y\_{2}^{2}=\frac{-x-3x}{2}-2x$ $x\_{2}=\frac{y^{2}-3y^{2}}{4}=\frac{-y^{2}}{2}$

Получаем системы: Получаем системы:

$\left\{\begin{array}{c}x+y=6\\y^{2}=x\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x+y=6\\y^{2}=-2x\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}\\x+y=6\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{-y^{2}}{2}\\x+y=6\end{array}\right.$

Ответ: Ответ:

$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=4\\y\_{1}=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=9\\y\_{2}=-3\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=4\\y\_{1}=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x\_{2}=9\\y\_{2}=-3\end{array}\right.$

***Пример 12.***

$\left\{\begin{array}{c}x+y+z=3\\x^{2}+y^{2}+z^{2}=3\end{array}\right.$

$x^{2}-2x+y^{2}-2y+z^{2}-2z=-3$

$x^{2}-2x+1$+$y^{2}-2y+1+$ $z^{2}-2z+1=0$

$(x-1)^{2}+(y-1)^{2}+(z-1)^{2}=0$

Это условие выполнится лишь в случае *x=y=z=1*

***Пример 13.***

$\left\{\begin{array}{c}x^{4}+y^{4}+z^{4}=3\\x^{2}y^{2}+y^{2}z^{2}+z^{2}x^{2}=3\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}x^{4}+y^{4}+z^{4}=3\\2x^{2}y^{2}+2y^{2}z^{2}+2z^{2}x^{2}=6\end{array}\right.$

Вычтем из первого уравнения второе:

$(x^{2}-1)^{2}+(y^{2}-1)^{2}+(z^{2}-1)^{2}=0$

Откуда:

$x^{2}=1$

$y^{2}=1$

$z^{2}=1$

Решая эту систему, получаем:

$\left(1;1;-1\right), \left(1;-1;1\right), \left(1;1;1\right), \left(1;-1;-1\right), \left(-1;1;-1\right), \left(-1;-1;1\right), \left(-1;1;1\right), (-1;-1;-1)$

***Пример 14.***

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+z^{2}=12\\xy+yz+zx=12\end{array}\right.$

Из системы получаем условие:

$x^{2}+y^{2}+z^{2}=xy+yz+zx$ , которое равносильно условию *x=y=z*

3$x^{2}=12$

$x^{2}=4$

$x=\pm 2, тогда y=\pm 2, z=\pm 2$

Получаем

$x=y=z=2$

$x=y=z=-2$

Ответ: (2;2;2), (-2;-2;-2)

***Пример 15.***

$\left\{\begin{array}{c}x\left(3x-2y\right)=y^{2}\\3y^{2}=2x\left(x+2\right)-3\end{array}\right.$

3$x^{2}-2xy-y^{2}=0$

$\left(3x+y\right)\left(x-y\right)=0$

$3x+y=0$ или $x-y=0$

$\left\{\begin{array}{c}y=x\\x^{2}-4x+3=0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}y=-3x\\16x^{2}-4x+3=0\end{array}\right.$

$D=16-12=4$ $D=16-192=-176$

$x\_{1}=\frac{4-2}{2}=1$ Корней нет.

$x\_{2}=\frac{4+2}{2}=3$

$y\_{1}=1$

$y\_{2}=3$

Ответ: (1;1), (3;3)

***Пример 16.***

$\left\{\begin{array}{c}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{5}{2}\\x^{2}-y^{2}=\frac{13}{4}\end{array}\right.$ (1)

$\frac{x^{2}+y^{2}}{xy}+\frac{5}{2}=0$

$2x^{2}+2y^{2}+5xy=0$

2$\frac{x^{2}}{y^{2}}+5\frac{x}{y}+2=0$

Обозначим $\frac{x}{y}=t$

2$t^{2}+5t+2=0$

$t\_{1}=\frac{-5-\sqrt{25-16}}{4}=-2$

$t\_{2}=\frac{-5+\sqrt{25-16}}{4}=-0,5$

Система (1) равносильна совокупности двух систем:

$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x=-2y\\x^{2}-y^{2}=\frac{13}{4}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}y=-2x\\x^{2}-y^{2}=\frac{13}{4}\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. 3$y^{2}=\frac{13}{4}$ 2. $-3x^{2}=\frac{13}{4}$

$y\_{1}=\frac{13}{2\sqrt{3}}$ $x\_{2}=-\frac{13}{2\sqrt{3}}$

$x\_{1}=-\frac{13}{3}$ $y\_{2}=\frac{13}{3}$

Ответ: ($-\frac{13}{3}; \frac{13}{2\sqrt{3}});(-\frac{13}{2\sqrt{3}}; \frac{13}{3})$

***Пример 17.***

$\left\{\begin{array}{c}2x^{2}-xy=y^{2}+5\\x^{2}-xy=y^{2}+1\end{array}\right.$

$x^{2}=4$

$x\_{1}=2$

$x\_{2}=-2$

1. $y^{2}+2y-3=0$ 2. $y^{2}-2y-3=0$

$D=16$ $D=16$

$y\_{1}=\frac{-2-16}{2}=-3$ $y\_{1}=\frac{2-4}{2}=-1$

$y\_{2}=\frac{-2+16}{2}=1$ $y\_{2}=\frac{2+4}{2}=3$

Ответ: (2;-3), (2;1), (-2;-1), (-2;3)

***Пример 18.***

$\left\{\begin{array}{c}5x+5y=6xy\\5x-5y=xy\end{array}\right.$

$10x=7xy$

$x\left(10-7y\right)=0$

$x=0$ или $10-7y=0$

 $7y=10$

 $y=\frac{10}{7}$

Ответ: (0; 1$\frac{3}{7}$)

***Пример 19.***

$\left\{\begin{array}{c}3x^{2}-2y^{2}=2xy-1\\2x^{2}-y^{2}=2xy-1\end{array}\right.$

$x^{2}-y^{2}=0$

$\left(x-y\right)\left(x+y\right)=0$

$x-y=0$ или $x+y=0$

$x=y$ $x=-y$

1. 3$y^{2}-2y^{2}=2y^{2}-1$ 2. 3$y^{2}-2y^{2}=-2y^{2}-1$

-$y^{2}=-1$ 3$y^{2}=-1$

$y^{2}=1$ $y^{2}=-\frac{1}{3}$

$y\_{1}=1$ Корней нет

$y\_{2}=-1$

$x\_{1}=1$

$x\_{2}=-1$

Ответ: (1;1), (-1;-1)

***Пример 20.***

$\left\{\begin{array}{c}x=y=5xy\\x-y=xy\end{array}\right.$

Складываем почленно:

$2x=6xy$

$x\left(2-6y\right)=0$

$x=0$ или $2-6y=0$

 $6y=2$

 $y=\frac{1}{3}$

Ответ: (0; $\frac{1}{3})$

***Пример 21.***

$\left\{\begin{array}{c}\left(2x^{2}-y^{2}-xy\right)+2x+y=0\\x^{2}-y=xy-1\end{array}\right.$

$\left(2x+y\right)\left(x-y+1\right)=0$

$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}2x+y=0\\x^{2}-y=xy-1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x-y+1=0\\x^{2}-y=xy-1\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. $y=-2x$ 2. $x=y-1$

$3x^{2}+2x-1=0$ $-2y+2=0$

$D=16$ $-2y=-2$

$x\_{1}=\frac{-2-4}{6}=-1$ $y\_{3}=1$

$x\_{2}=\frac{-2+4}{6}=\frac{1}{3}$ $x\_{3}=0$

$y\_{1}=2$

$y\_{2}=-\frac{2}{3}$

Ответ: (-1;2), ($\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$, (0;1)

***Пример 22.***

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}=68\\\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{17}{4}\end{array}\right.$

$\frac{-x^{2}+y^{2}}{xy}=\frac{17}{4}$

$\frac{-68}{xy}=\frac{17}{4}$

$xy=-16$

$(x+y)^{2}=68-32$

$(x+y)^{2}=36$

$x+y=\pm 6$

Составим 2 системы:

$\left\{\begin{array}{c}x+y=6\\xy=-16\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=-6\\xy=-16\end{array}\right.$

$x=6-y$ $x=-6-y$

-$y^{2}+6y+16=0$ -$y^{2}-6y+16=0$

$D=100$ $D=100$

$y\_{1}=8, x\_{1}=-2$ $y\_{1}=2, x\_{1}=-8$

$y\_{2}=-2, x\_{2}=8$ $y\_{2}=-8, x\_{2}=-2$

Ответ: (8;-2), (-2;8), (-8;2), (-2;-8)

***Пример 23.***

$\left\{\begin{array}{c}xy=2\\\left(x^{2}+y^{2}\right)xy=24\end{array}\right.$

($(x+y)^{2}-2xy)xy=24$

$(x+y)^{2}-4=12; (x+y)^{2}=16$

$\left\{\begin{array}{c}x+y=4\\xy=2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=-4\\xy=2\end{array}\right.$

-$y^{2}+4y-2=0$ $y^{2}+4y+2=0$

$D=16-8=8$ $D=16-8=8$

$y\_{1}=\frac{-4-2\sqrt{2}}{-2}=2+\sqrt{2}$ $y\_{1}=\frac{-4-2\sqrt{2}}{2}=-2-\sqrt{2}$

$y\_{2}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{-2}=2-\sqrt{2}$ $y\_{2}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

$x\_{1}=2-\sqrt{2}$ $x\_{1}=-2+\sqrt{2}$

$x\_{2}=2+\sqrt{2}$ $x\_{2}=-2-\sqrt{2}$

Ответ: ($2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}), (-2+\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$, ($2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}), (-2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$

***Пример 24.***

$\left\{\begin{array}{c}x+y=6\\x^{2}-y^{2}=24\end{array}\right.$

Пусть x=t, где t>0

 y=z, где z>0

Тогда система примет вид:

$\left\{\begin{array}{c}t+z=6\\t^{2}-z^{2}=24\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}t+z=6\\(t+z)^{2}-2tz-2z^{2}=24\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}t+z=6\\(t+z)^{2}-2z\left(t+z\right)=24\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}t+z=6\\6^{2}-2z6=24\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}t+z=6\\z=1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}t=5\\z=1\end{array}\right.$

Тогда x=5; x=$\pm 5$

 y=1; y=$\pm 1$

Ответ: (5;1), (-5;-1), (5;-1), (-5;1)

***Пример 25.***

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}-x-y-12=0\\xy-2\left(x+y\right)+8=0\end{array}\right.$

Заменяя u=x+y, v=xy, приходим к системе:

$\left\{\begin{array}{c}u^{2}-2v-u-12=0\\v=2y-8\end{array}\right.$

Решив которую, получаем:

$\left\{\begin{array}{c}v\_{1}=-6\\u\_{1}=1\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}v\_{2}=0\\u\_{2}=4\end{array}\right. $ , т.е.

$\left\{\begin{array}{c}xy=-6\\x+y=1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}xy=0\\x+y=4\end{array}\right.$

Решая эти системы, основываясь на теорему, обратную теореме Виета, получаем ответы:

(-2;3), (3;-2), (0;4), (4;0)

***Литература.***

1. Н.И.Зильбергер. Алгебра – 9 для углубленного изучения математики. Псков, 1999г.
2. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков. Алгебра – 9. Учебник для школ и классов с углубленным изучением математики. Москва, 2003г.
3. С.В.Кравцов, Ю.Н.Макаров и др. Методы решения задач по алгебре. Москва, 2003г.
4. М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Звавич. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Москва, «Просвещение», 1997г.
5. А.С.Мерзляков, Л.Э.Медников. Математическая олимпиада. Ижевск, 1997г.