**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА**

**С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА № 1378**

Москва, 127495, Челобитьевское ш., д. 2, тел.8-499-761-06-10

E-mail: [school1378@rambler.ru](mailto:school1378@rambler.ru) факс 8-499-761-05-95

Исследовательская работа

**ПРОГРЕССИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВОКРУГ НАС.**

Автор работы: Пильщиков Антон

учащийся 9 «Б» класса

ГБОУ СОШ №1378

Научный руководитель: Яхьяева Рабият Абидиновна,

Учитель математики ГБОУ СОШ №1378

Время выполнения работы:

Декабрь 2013г. – январь 2014г.

Москва, 2014 год

**АННОТАЦИЯ**

Исследовательская работа направлена на повышение интереса к математике, развитие познавательной активности учащихся, развитие коммуникативных способностей, самостоятельности, развития речи; способности на основе полученных сведений и теоретических знаний, умений находить, анализировать, обрабатывать, интегрировать, оценивать информацию в разных формах. Данная исследовательская работа способствует саморазвитию. В ходе работы над проектом участник получил дополнительные знания по прогрессиям, которые он будет применять не только в учебно-познавательном процессе, но и в повседневной жизни. Исследования учащегося складываются из общения с родителями, поиска информации в учебной литературе и Интернете, выполнения необходимых расчетов и анализа полученной информации.

**Объект исследования:**

Практическое применение прогрессий.

**Цель исследования:**

Установить когда возникло понятие прогрессии и выявить примеры их применения в повседневной жизни.

**Гипотеза работы:**

Математика – наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека.

**Задачи:**

Выяснить:

 -  когда появилось понятие прогрессии;

 -  какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме.

·         Установить:

 -  имеют ли арифметическая и геометрическая прогрессии прикладное значение?

 -  найти примеры применения прогрессий в нашей жизни.

**Методы исследования:**

Анализ школьных учебников математики, математической, справочной литературы, литературы по истории математики, материала из Интернета.

Работа состоит из следующих разделов:

* Введение;
* Из истории…;
* Определения и формулы;
* Прогрессии вокруг нас
* Прочие последовательности;
* Заключение.

Выполняя эту работу, учащийся выяснил, когда появилось понятие прогрессии; какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме. Выяснил имеют ли арифметическая и геометрическая прогрессии прикладное значение.

**Сделал вывод** о том, что знание прогрессий и умение пользоваться формулами для нахождении члена последовательностей или суммы n-членов прогрессий позволяет сократить время для решении практических задач в повседневной жизни современного человека.

**Содержание**

Введение**---------------------------------------------------------------------------**1

*Глава 1. Прогрессия-движение вперед*

* 1. *Историческая справка-----------------------------------------------6*
  2. *Формулы----------------------------------------------------------------8*

*Глава 2. Арифметическая прогрессия в нашей жизни*

*2.2 Арифметическая прогрессия и статистика.-------------------10*

*2.2 Арифметическая прогрессия в физике.----------------------------11*

*2.3 Арифметическая прогрессия в литературе----------------------12*

*2.4 Арифметическая прогрессия в банковских расчётах-----------12*

*Глава 3. Геометрическая прогрессия в жизни*

*3.1 Сложные проценты в банках----------------------------------------13*

*3.2 Старинная задача на геометрическую прогрессию-----------13*

*3.3 Геометрическая прогрессия в биологии (Размножение мух)-14*

*3.4 Геометрическая прогрессия в биологии (Размножение мака)-15*

*3.5 Геометрическая прогрессия в биологии (Бактерии)--------------15*

*Глава 4. Прочие последовательности*

*4.1 Числа Фибоначчи------------------------------------------------------------16*

*4.2 Числа Фибоначчи в природе----------------------------------------------17*

*Выводы------------------------------------------------------------------------------------18*

*Используемые источники---------------------------------------------------------18-19*

**ВВЕДЕНИЕ**

Тема «Прогрессии» изучалась нами в 9 классе. Я внимательно рассмотрел школьные учебники – почти в каждом есть информация о последовательностях чисел и о прогрессиях. Прогрессии – одна из интереснейших тем математики. Латинское слово «Прогрессио» в переводе на русский язык означает движение вперед. Этим термином в математике прежде именуют всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении.

Эти последовательности заинтересовали меня. Поэтому я решил исследовать, когда впервые появилось это понятие, где оно встречается и какое место занимает в нашей жизни.

Для этого сделана историческая справка об авторстве теории о прогрессиях. Приведены примеры применения прогрессий в различных областях жизни.

**Актуальность исследования:**

## В 9 классе мы изучаем прогрессии; дали определение, научились находить по формулам любой член прогрессии, сумму первых членов прогрессий.

 Найдя ответы на вопросы: имеют ли прогрессии практическое значение и как давно люди знают последовательности, как возникло это понятие, я подтвержу или опровергну утверждение том, что математика – наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека.

Проблемный вопрос:

Действительно ли прогрессии играют заметную роль в повседневной жизни?

Объект исследования:

Последовательности: арифметическая и геометрическая прогрессии.

***Арифметическая прогрессия—***

*Числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего увеличением его на определённое число.*

   Имеет вид: a1, a1+d, a1+2d, a1+3d, …, a1+(n-1) d, …

***Геометрическая прогрессия—***

*Последовательность чисел, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число.*

   Имеет вид: b1, b1q, b1q2, b1q3,… ,b1qn-1,…

**Предмет исследования:**

Практическое применение прогрессий.

 Гипотеза исследования:

Математика – наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека. Прогрессии имеют определенное практическое значение.

Цель исследования:

Установить когда возникло понятие прогрессии и выявить примерыих применения.

Задачи исследования:

·         Выяснить:

   Когда появилось понятие прогрессии;

   Какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме.

·         Установить:

   Имеют ли арифметическая и геометрическая прогрессии прикладное значение?

   Найти примеры применения прогрессий в нашей жизни.

    Методы исследования:

Анализ школьных учебников математики, математической, справочной литературы, литературы по истории математики, материала из Интернета.

**1.1 ИЗ ИСТОРИИ**

Сами по себе прогрессии известны так давно, что конечно, нельзя говорить о том, кто их открыл. Ведь уже натуральный ряд есть арифметическая прогрессия с первым членом и разностью, равных 1.

«Прогрессия» – латинское слово, означающее "движение вперед", было введено римским автором Боэцием (VI век) и понималось как бесконечная числовая последовательность.   
  
О прогрессии известно так давно, что трудно определить, кто является её первооткрывателем – ведь уже натуральный ряд 1, 2, 3, 4…n… и есть арифметическая прогрессия. О том, как давно известна геометрическая прогрессия, косвенным образом свидетельствует знаменитое предание о создании шахмат. В Древней Индии ученый Сета изобрел шахматы. Шах Шерама решил отблагодарить ученого и пообещал выполнить любое его пожелание. Сета попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую - в 2 раза больше, то есть 2 зерна, на третью - в 2 раза больше, чем на второй клетке, то есть 4 зерна, и так далее до шестьдесят четвертой клетки. Сначала индийский царь обрадовался, что дешево отделался, и лишь потом выяснил, что такого количества пшеницы нельзя собрать со всех полей Земли в течение десятков лет. Чтобы разместить это зерно в амбаре, то его размеры должны быть: высота – 4 метра, ширина – 10 метров, длина – 30000000 километров, вдвое больше, чем расстояние от Земли до Солнца. А чтобы его получить, то надо засеять пшеницей площадь всей Земли, считая моря, океаны, горы, пустыни, Арктику с Антарктидой и получать при этом средний урожай:  
  
http://rud.exdat.com/pars_docs/tw_refs/812/811339/811339_html_m5b411744.gif18 446 744 073 709 551 615 зёрен.

В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко второму тысячелетию до нашей эры, встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий. Вот пример задачи из египетского папируса Ахмеса: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками и, разность же между каждым человеком и его соседом равна меры».

В трудах АРХИМЕДА (ок. 287-212 гг. до н.э.) излагаются первые сведения о прогрессиях.

Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами.

Вопросами последовательности занимался Леонардо Пизанский (Фибоначчи). Наиболее известной из сформулированных Фибоначчи задач является "задача о размножении кроликов", которая привела к открытию числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., именуемой впоследствии "рядом Фибоначчи". Правило на нахождении суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в его сочинении «Книга абака»1202г.

**1.2 Формулы**

**Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность, задаваемая двумя параметрами http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=a, http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=dи законом http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=a_1%20=%20a, http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=a_n%20=%20a_%7Bn-1%7D%20%2B%20d, http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=n%20=%202,3,...

http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=d— разность данной арифметической прогрессии;

* Если http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=d%20%3E%200— арифметическую прогрессию называют **возрастающей;**
* Если http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=d%20%3C%200— арифметическую прогрессию называют **убывающей;**
* В случае, если http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=d%20=%200— все члены прогрессии равны числу http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=a, а ариф.прогрессию называют **стационарной.**

**Любой член** арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1678/6e49f81a4c.jpg

**Формула разности арифметической прогрессии**

http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=d%20=%20a_%7Bn%2B1%7D%20-%20a_n

**Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии**

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1678/90d55ab10c.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1678/e683e66ef8.jpg

**Геометрической прогрессией** называется числовая последовательность задаваемая двумя параметрами **b**, **q** **(q ≠ 0)** и законом http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=b_1%20=%20b, http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=b_n%20=%20b_%7Bn-1%7D%20%5Ccdot%20q, http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=n%20=%202,3,...

Число http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=qназывают **знаменателем** данной геометрической прогрессии.

* Если **q > 0** все члены геометрической прогрессии имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком числа b.
* Если **q < 0** знаки членов геометрической прогрессии чередуются.
* В случае **-1 < q < 1** прогрессию называют **бесконечно убывающей** геометрической прогрессией.

**Любой член** геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле:

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1679/952b973b48.jpg

**Формула знаменателя геометрической прогрессии:**

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1679/c664005ff7.jpg

**Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии**

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1679/af758c271a.jpg

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1679/537bbd9f3b.jpg

где, q ≠ 1

**Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия** — это прогрессия, у которой |q| < 1. Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как число, к которому неограниченно приближается сумма http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=nпервых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа http://chart.apis.google.com/chart?cht=tx&chl=n.

**Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:**

http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1679/9737bc8bba.jpg

где, q ≠ 1

.

**Арифметическая прогрессия в нашей жизни**

**Применение арифметической прогрессии.**

Арифметические прогрессии встречаются во множестве вещей вокруг нас, особенно, в различного рода задачах курса физики и статистики

**2.1 Статистика**

**Пример**. Начальник завода «Сахарок» решил для восполнения убытков в продажах в прошлом году предложить увеличить число производства мешков сахара каждый месяц на 1000 штук. Сколько мешков сахара выпустит завод за год, если в январе он выпустил 14700мешков сахара.

Для решения задачи примем увеличение производства за каждый месяц (1000) за d, а производство в январе (14700) за , тогда:

Дано: Решение:

- ар. прогрессия;

= 14700;

= 1000;

Найти:

(т.к. в году 12 месяцев)

Ответ:

**2.2 Физика**

**Пример.** Автомобиль, двигаясь со скоростью

1 м/с, за каждую последующую секунду изменял свою скорость на 0,6 м/с. Какую скорость он будет иметь спустя 10 секунд ?



Для решения задачи примем увеличение скорости за секунду (0,6 м/с) за d, а начальную скорость (1 м/с) за , тогда:

Дано: Решение:

- ар. прогрессия;

= 1 м/с;

= 0,6 м/с; ;

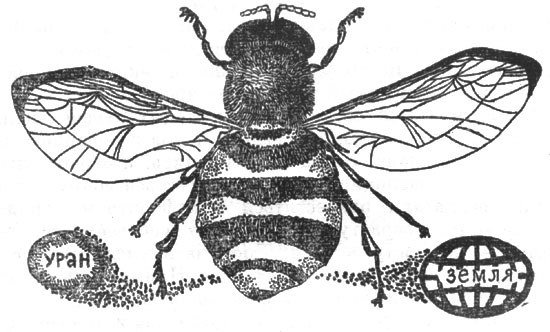
Найти: 6,4 м/с.

Ответ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pyshkina**2.3 Литература**  Строки из “Евгения Онегина”:  …Не мог он ямба от хорея,  Как мы не бились, отличить….  Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.  Ямб – это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2; 4; 6; 8;…Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2;  Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечетные слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; 7;..  Примеры:   1. *Ямб*. «Мой дЯдя сАмых чЕстных прАвил…», прогрессия – 2; 4; 6; 8;… 2. *Хорей.* «Я пропАл, как звЕрь в загОне» 3. Б. Л. Пастернак, прогрессия – 1;3;5;7.   «БУря  мглОю  нЕбо  крОет» А.С. Пушкин, прогрессия – 1; 3; 5;7.  **2.4 ПРОГРЕССИИ И БАНКОВСКИЕ РАСЧЕТЫ**  Все знают, что деньги положенные в банк приносят проценты в конце месяца или года.  Если их не снимать со счета, то они продолжают работать и дальше.  Если провести расчеты, то обнаруживается, что интуитивные оценки меньше, чем расчеты. Особенно, если вклады долгосрочные и сложные, т.е. начисление процентов производится с учетом ранее начисленных процентов. **Экономика.**  Прогрессия имеет очень широкое применение в экономике. С её помощью банки производят расчеты с вкладчиками, определяют, какие средства можно разместить в кредиты, решают, стоит ли вкладывать средства в крупные проекты, доход от которых будет получен через несколько лет и т.д. Так, вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии.  **Геометрическая прогрессия в нашей жизни (3.1)**  Геометрические прогрессии являются очень интересным  аспектом математики, затрагивающим даже живую природу.    Сложные проценты в банковских расчётах – увеличение первоначального вклада в геометрической прогрессии.  Вкладчик положил в банк 5000 р. на счёт, по которому сумма вклада ежегодно возрастает на 8%. Какая сумма будет у него на счету через 6 лет?  Мы имеем дело с геометрической прогрессией  5000; 5000 \* 1,08;  5000\*1,08²; 5000\*1,08³; …  2) Выполнив вычисления найдём, что  5000\*(1,08\*1,08\*1,08\*1,08\*1,08\*1,08)≈7934  **3.2 Старинная задача.**  Из старинного русского учебника математики, носящего престранное заглавие: «Полный курс чистый математики, сочиненный артиллерии штык-юнкером и Математики партикулярным учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике» (1795г) следующая задачка:  «Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за другую – 2 копейки, за третью – 4 копейки и т.д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 36 коп. Спрашивается число его ран».  При решении число полученных служивым денег (655,36 руб) возьмём за , тогда    Дано: Решение:  - геом. прогрессия; ;  = 1;  = 2; =655,36 руб. ;  Найти:    Ответ: |  |  |

**3.3 Биология.**

По наблюдениям Карла Линнея: «Потомство пары мух съест мёртвую лошадь также скоро как лев». Девятое поколение одной пары мух наполнило бы куб, сторона которого равна 140 км, или же составило бы нить, которой можно опоясать земной шар 40 млрд. раз. Рассмотрим такой вариант:

1. Пусть каждая муха откладывает 120 яичек, и, пусть, в течение лета успевает появиться 7 поколений мух, половина которых - самки. За начало первой кладки примем 15 апреля и будем считать, что муха-самка в 20 дней вырастает настолько, что сама откладывает яйца. Тогда размножение будет происходить так:1. 15 апреля - самка отложила 120 яиц; в начале мая - вышло 120 мух, из них 60 самок.
2. 5 мая - каждая самка кладет 120 яиц; в середине мая - выходит 60 x 120 = 7200 мух, из них 3600 самок;
3. 25 мая - каждая из 3600 самок кладет по 120 яиц; в начале июня - выходит 3600 x 120 = 432 000 мух, из них 216000 самок;
4. 14 июня - каждая из 216000 самок кладет по 120 яиц; в конце июня - выходит 25920000 мух, в их числе 1296000 самок;
5. 5 июля - 12960000 самок кладут по 120 яиц; в июле - выходит 1555200000 мух, среди них 777600000 самок;
6. 25 июля - выходит 93312000000 мух, среди них 46656000000 самок;
7. 13 августа - выходит 5598720000000 мух, среди них 2799360000000 самок;
8. 1 сентября - выходит 355923200000000 мух.

Чтобы яснее представить себе эту огромную массу мух, которые при беспрепятственном размножении могли бы в течение одного лета народиться от одной пары, вообразим, что они выстроены в прямую линию, одна около другой. Так как длина мухи 5 мм, то все эти мухи вытянулись бы на 2500 млн. км - в 18 раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца (т. е. примерно, как от Земли до далекой планеты Уран) ...

**3.4 Размножение мака**

Другой пример – размножение мака. Оказывается, одна головка мака содержит (круглым числом) 3000 зернышек. Если вокруг макового растения достаточная площадь подходящей земли, каждое упавшее зернышко дало бы росток, и будущим летом на этом месте выросло бы уже 3000 маков. Проросши, семена каждой головки дадут 3000 новых растений.

на второй год у нас будет уже не менее 3000 × 3000 = 9000000 растений;

на третий год – 9000000 × 3000 = 27000000000;

на четвертый год – 27000000000 × 3000 = 81000000000000;

На пятый год – 81000000000000 × 3000 = 243000000000000000.

**3.5 Бактерии в природе.**

Практически нет места на Земле, где бы не встречались бактерии.

Они живут во льдах Антарктиды при t - 830С

и в горячих источниках, t которых достигает + 850 до -900С

Число бактерий различно в воздухе проветренных и непроветренных помещений.

Так, в классе после проветривания перед началом урока бактерий в 13 раз меньше, чем в той же комнате после урока. Условия жизни бактерий разнообразны, также разнообразны и функции бактерий в нашей жизни. Но всевозможные виды бактерий размножаются делением одной клетки на две, каждая из этих двух в свою очередь также делится на две и получается 4 бактерии, потом 8 и т.д. Если одну бактерию поместить в идеальные условия с обилием пищи, то за одни сутки еѐ потомство должно составить

281 474 976 710 656 клеток.

Таким образом, мы имеем дело с примером геометрической прогрессии в природе

**Прочие последовательности.**

**4.1 Числа Фибоначчи**

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89… в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Числа Фибоначчи были известны в Индии в трудах математиков 8—12 веков и применялись там в стихосложении.

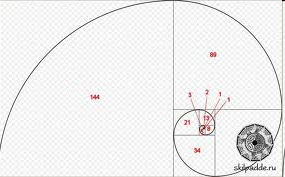
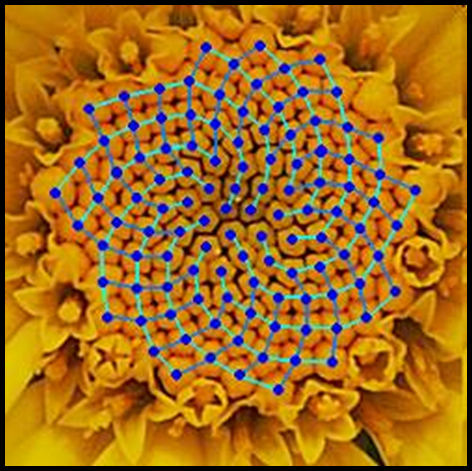


В Западной Европе последовательность введена в 1202 году в «Книге счёта» Леонардо Пизанского (Фибоначчи), где он предлагает задачу о размножении кроликов: имеется одна новорожденная пара кроликов, которая начинает давать приплод в одну пару кроликов в каждый месяц, начиная со второго месяца. Так же размножаются и вновь родившиеся кролики, порождая новую пару кроликов каждый месяц, начиная со второго, с момента своего рождения. В задаче Фибоначчи спрашивалось, сколько пар кроликов будет к концу года (считается, что кролики не умирают). Оказывается, что в конце n-го месяца число пар кроликов задается числом Fn+1. В конце года будет F13=233 пары кроликов.

**4.2 Числа Фибоначчи в природе**

Листья, сидящие на ветке одиноко, располагаются кругом стебля, по винтовой линии, то есть каждый последующий лист повыше и в сторону от предыдущего. При этом для каждого вида растений характерен свой угол расхождения двух соседних листьев, который выдерживается более или менее точно во всех частях стебля.

Числа Фибоначчи исчисляют спирали семечек в подсолнухе, спирально завитой раковине и т.п..



**ВЫВОДЫ**

$1• Установил, что прогрессии известны так давно, что нельзя говорить о том, кто их открыл

$1• Убедился в том, что задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другими

$1• Выяснил, что в развитие теории о прогрессиях внесли ученые Архимед, Пифагор и его ученики, математики Леонард Фибоначчи и Баше де Мезириака, М. Штифель, Н. Шюке, и К. Гаусс и др.

$1• Ответил на основополагающий вопрос: Действительно, в повседневной жизни прогрессии играют заметную роль.

**ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ**

· Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев и др. под ред. С.А. Теляковского –М.: Просвещение, 2009 – 271 с.;

· Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феактистов И.Е. . -М.: Мнеозина, 2008, -447с. № 698, 699,702,725,734, 788, 789 (7 задач)

· Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы -М.: Просвещение, 1990.-224сю;

· Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М.: Педагогика, 1989.-352с..

· «Занимательная алгебра». Я.И.Перельман

· http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm

· http://students.tspu.ru/students/legostaeva/index.php?page=op

· http://festival.1september.ru/articles/568100/

· http://ru.wikipedia.org/wiki

· http://pages.marsu.ru/lazarev/mat/a82001/a8.htm

· http://mech.math.msu.su/dop/school/progres/tasks.htm

· http://www.courier.com.ru/kvant/kv0206kaleid.htm

· http://margarita-smirnova.blogspot.ru/2013/01/blog-post\_2649.html