Еще идут старинные часы

Задачи, которые приводятся в этой подборке — самые разные как по уров­ню сложности, так и по подходам к ре­шению. Единственное, что их «роднит», — в условиях задач обязательно встреча­ется слово «часы». Задачи эти редкие. Источники условий задач — всевоз­можные сборники и пособия для круж­ковой работы со школьниками, журнал «Квант», газета «Математика», матери­алы различных олимпиад. В том случае, когда источник известен, приводится ссылка на него, но некоторые задачи перешли в разряд «фольклорных», и сослаться на автора или источник нет возможности.

Счастливые часов не наблюдают...

*А. Грибоедов* Стрелки часов — две руки, которые отнимают у нас время.

Г. *Станьчик*

1. Ежедневно Он подходил к городским часам в 4 часа. Она же приходила туда, когда воображае­мая биссектриса между часовой и минутной стрелка­ми проходила через цифру 6. Когда приходила Она?

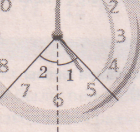


Рис. 1

*Ответ:* в 4 часа 38 минут.

2. Куранты бьют 6 раз за 30 с. Сколько секунд они бьют 12 раз?

*Решение.* Промежуток между боем часов равен

30 6-1

= 6 с. Тогда 12 раз часы бьют в течение

6(12 - 1) = 66с.

*Ответ:* 66 секунд.

3. Когда секундная стрелка на часах прошла 1 с,  
минутная стрелка прошла 6 мин. Тем не менее часы  
исправны. Как это объяснить?

*Решение.* Речь идет о секунде времени и угловых минутах. Действительно, за 1 ч минутная стрелка проходит 360°, за 1 мин — 6°, а за 1 с в 60 раз мень­ше, то есть 6 угловых минут.

4. Сколько раз в сутки стрелки часов совпадают?  
*Решение.* Начнем с положения 12:00 или 00:00.

В течение первого часа минутная стрелка, пройдя круг, ни разу не совпадет с часовой. Затем минутная стрелка будет совпадать с часовой один раз в течение каждого часа (примерно в 13:05, в 14:10 и т.д.). За двенадцатый час минутная стрелка совпадет с часо­вой лишь в 12:00, но эту точку мы отнесли к следую­щему кругу. Значит, всего стрелки совпадают лишь одиннадцать раз за полный оборот часовой стрелки, а в сутки — 22 раза. *Ответ:* 22 раза.

5. Сколько раз в сутки стрелки часов направлены  
противоположно (то есть угол между ними равен  
180°)?

*Решение.* Начиная с 6:00 стрелки направлены про­тивоположно первый раз в 6:00, во второй раз, около 7:05, в третий раз, около 08:10, ..., в десятый раз, около 3:49, в одиннадцатый раз, около 4:54, в две­надцатый раз — в 6:00, но это уже было первый раз. Итого: одиннадцать раз за 12 часов, а в сутки — 22 раза.

*Ответ:* 22 раза.

12. На электронных часах высвечивается время:  
часы и минуты. Сколько времени в сутки на их табло  
присутствует хотя бы одна цифра 2? Найдите соот­ветствующее время для остальных цифр: О, 1, 3,4, ..., 9.

*Решение.* На первом месте цифра 2 бывает в тече­ние 4 часов от 20:00 до 00:00. В остальные 20 часов она бывает: а) 2 часа на втором месте — от 2:00 до 3:00 и от 12:00 до 13:00; б) в оставшиеся 18 ч цифра 2 бывает на третьем месте по 10 мин каждый час; в) в остальные 50 мин часа еще по 5 мин — на четвертом месте. Итого, по 15 мин в каждый из 18 часов, то есть 4 ч 30 мин. Всего получаем 4 + 2 + 4,5 = 10,5 ч. Рассуждая аналогично, получим время показа циф­ры на табло для всех случаев.

*Ответ:* для цифры 2 — 10,5 ч; 0 и 1 — по 16 ч; 3 — 8,25 ч; 4 и 5 — по 7,5 ч; для остальных — по 4,2ч.

13. Разделите циферблат часов на равные (по сум­  
ме чисел) части. Приведите все способы.

*Решение.* Сумма всех чисел на циферблате равна 78. Найдем такую комбинацию *х • у* = 78, где *х* и *у* — натуральные числа, *х >* 12 (поскольку число 12 так­же входит в какую-то часть), *у >* 1 — число частей.

Воспользуемся тем, что 78 = 2 • 3 • 13.

*Варианты:*

1) *х* = 39, *у* = 2; 2) *х =* 26, *у* = 3; 3) *х =* 13, *у* = 6.



Возможные способы приведены на рисунке 3, *а—в.*



а)

**б)**



**в) Рис. 3**

14. Сколько раз в сутки угол между стрелками часов равен данному углу а?

*Решение.* 1. Случай, когда а = 0 (стрелки совпада­ют), рассмотрен в задаче 4.

Случай, когда а = 180°, рассмотрен в задаче 5.

Рассмотрим случай, когда ос отличается от край­  
них значений, то есть 0 < а < 180°,

а) Пусть по кратчайшей дуге стрелки удаляются (минутная стрелка дальше по ходу). Тогда (начиная с12:00) угол между стрелками будет равен а в первый  
раз, когда часовая стрелка расположена в промежут­ке от 12:00 до 1:00, во второй раз — от 1:00 до 2:00 и т.д., всего 11 раз за оборот часовой стрелки, или 22 раза в сутки.

б) Пусть, наоборот, стрелки часов сближаются. Рассуждая аналогично, получим еще 22 раза в сутки. В итоге, всего за сутки угол между стрелками бу­дет равен а 44 раза. Частный случай этой задачи рассмотрен в задаче 6.

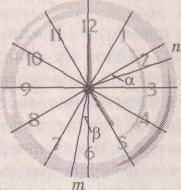
*Ответ:* 22 раза при а равном 0 или 180° и 44 раза при других значениях а.

15. Имеются песочные часы на 3 мин и на 5 мин.  
Отмерьте с их помощью промежуток времени в 1 мин.

*Решение.* Запустим часы одновременно. Когда пройдут 3 мин, перевернем эти часы, начнем новый отсчет времени. Когда пройдут 5 мин, на трехминут­ных часах к этому времени останется песка ровно на 1 мин. Конец отсчета времени — когда «остановят­ся» трехминутные часы. Действительно, 2-3-5 = 1.

*Замечание.* Можно рассмотреть эту задачу в об­щем виде: пусть первые часы на *х* мин, вторые — на *у* мин. Отмерить г мин. Решение этой задачи сводит­ся к решению диофантова уравнения *г* = *пх* - *ту.*

16. *(Задача заочной олимпиады, для абитуриентов  
мехмата МГУ, 1999 г.)* Минутную стрелку обломили  
так, что она перестала отличаться от часовой. Сколь­  
ко раз в сутки можно ошибочно считать время с ча­  
сов с такими стрелками, если при этом не разрешает­  
ся наблюдать за ходом часов?



**Рис. 4**

*Решение.* Разобьем циферблат на 12 часовых сек­торов (рис. 4). Пусть а — угол между часовой стрел­кой и лучом, направленным к началу сектора, в ко­тором находится часовая стрелка, (3 — угол между минутной стрелкой и лучом, направленным к началу сектора, в котором находится минутная стрелка; оба угла измеряются в долях от величины сектора в 30°, значения *а* и Р находятся в интервале [0; 1). Обозна­чим: *п* — номер сектора, в котором находится часо­вая стрелка, *т* — номер сектора, в котором находит­ся минутная стрелка, *т* и *п* — целые числа от 1 до 12.