Тема 6**. Алгебраические неравенства.**

**Квадратные неравенства. Рациональные неравенства высших степеней.**

**Дробно-рациональные неравенства.**

Методы решения неравенств зависят в основном от того, к какому классу относятся функции, составляющие неравенство.

**I. Квадратные неравенства**, то есть неравенства вида

ax2 + bx + c > 0 (< 0), a ≠ 0.

Будем считать, что a>0. Если это не так, то умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получим желаемое.

Чтобы решить неравенство можно:

1. Квадратный трехчлен разложить на множители, то есть неравенство записать в виде

a (x - x1) (x - x2) > 0 (< 0).

2. Корни многочлена нанести на числовую ось. Корни разбивают множество действительных чисел на промежутки, в каждом из которых соответствующая квадратичная функция будет знакопостоянной.

3. Определить знак a (x - x1) (x - x2) в каждом промежутке и записать ответ.

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то при D<0 и a>0 квадратный трехчлен при любом x положителен.

Примеры:

1. Решить неравенство. x2 + x - 6 > 0.

Решение.

Разложим квадратный трехчлен на множители (x + 3) (x - 2) > 0

Наносим корни трехчлена на числовую ось и определяем знаки на каждом промежутке

 + - +

 -3 2 х

Ответ: x ∈ (-∞; -3)  (2; +∞).

2) (x - 6)2 > 0

Решение:

Это неравенство верно при любом х, кроме х = 6.

Ответ: (-∞; 6)  (6; +∞).

3) x² + 4x + 15 < 0.

Решение:

Здесь D < 0, a = 1 > 0. Квадратный трехчлен положителен при всех х.

Ответ: x ∈ Ø.

Решить неравенства:

1. 1 + х - 2х² < 0. Ответ: 
2. 3х² - 12х + 12 ≤ 0. Ответ: 
3. 3х² - 7х + 5 ≤ 0. Ответ: 
4. 2х² - 12х + 18 > 0. Ответ: 
5. При каких значениях a неравенство

 x² - ax >  выполняется для любых х? Ответ: 

**II. Рациональные неравенства высших степеней,** то есть неравенства вида

anxn + an-1xn-1 + … + a1x + a0 > 0 (<0), n>2.

Многочлен высшей степени следует разложить на множители, то есть неравенство записать в виде

an (x - x1) (x - x2) ·…· (x - xn) > 0 (<0).

Отметить на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль.

Определить знаки многочлена на каждом промежутке.

Примеры:

1) Решить неравенство x4 - 6x3 + 11x2 - 6x < 0.

Решение:

x4 - 6x3 + 11x2 - 6x = x (x3 - 6x2 + 11x -6) = x (x3 - x2 - 5x2 + 5x +6x - 6) =x (x - 1)( x2 -5x + 6) =

x (x - 1) (x - 2) (x - 3). Итак, x (x - 1) (x - 2) (x - 3)<0

 + - + - +

 0 1 2 3 х

Ответ: (0; 1)  (2; 3).

2) Решить неравенство (x -1)5 (x + 2) (x - ½)7 (2x + 1)4 <0.

Решение:

Отметим на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль. Это х = 1, х = -2, х = ½, х = - ½.

 - + + - +

 -2 - ½ ½ 1 х

В точке х = - ½ смены знака не происходит, потому что двучлен (2х + 1) возводится в четную степень, то есть выражение (2x + 1)4 не меняет знак при переходе через точку х = - ½.

Ответ: (-∞; -2)  (½; 1).

3) Решить неравенство: х2 (х + 2) (х - 3) ≥ 0.

Решение:

Данное неравенство равносильно следующей совокупности

 

 + - - +

 -2 0 3 x

Решением (1) является х ∈ (-∞; -2)  (3; +∞). Решением (2) являются х = 0, х = -2, х = 3. Объединяя полученные решения, получаем х ∈ (-∞; -2]  {0}  [3; +∞).

Ответ: х ∈ (-∞; -2]  {0}  [3; +∞).

Решить неравенства:

1. (5х - 1) (2 - 3х) (х + 3) > 0. Ответ: 
2. x3 + 5x2 +3x - 9 ≤ 0. Ответ: 
3. (x - 3) (x - 1)² (3x - 6 - x²) < 0. Ответ: 
4. (x² -x)² + 3 (x² - x) + 2 ≥ 0. Ответ: 

**III. Дробно-рациональные неравенства.**

При решении таких неравенств можно придерживаться следующей схемы.

1. Перенести все члены неравенства в левую часть.

2. Все члены неравенства в левой части привести к общему знаменателю, то есть неравенство записать в виде

 > 0 (<0).

3. Найти значения х, при которых функция y= может менять свой знак. Это корни уравнений  

4. Нанести найденные точки на числовую ось. Эти точки разбивают множество действительных чисел на промежутки, в каждом их которых функция будет знакопостоянной.

5. Определить знак  в каждом промежутке, вычисляя, например, значение данного отношения в произвольной точке каждого промежутка.

6. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки промежутков. При решении строгого неравенства >0 (<0) граничные точки в ответ не включаются. При решении нестрогого неравенства  ≥ 0 ( ≤ 0), если точка является корнем знаменателя, то она не включается в ответ (даже если она одновременно является корнем числителя). Если же точка является корнем одного числителя, то она включается в ответ.

Примеры.

1). Решить неравенство .

Решение:  > 0, > 0, > 0

Найдем нули числителя и знаменателя. Это х = 3, х = 5, х=1. Наносим найденные точки на числовую ось и определяем знаки  в каждом промежутке

 - + + -

 1 3 5 x

Выбираем любой х(5; +), например х = 10. Тогда  < 0.

 Выбираем х = 4 (3; 5).

Получаем  > 0. При х = 2 (1; 3). Получаем > 0.

Наконец, при х = 0 (-; 1). Вычисляем  < 0.

Ответ: х (1; 3)  (3; 5).

2). Найти сумму целых решений неравенства.

Решение. Найдем нули числителя и знаменателя дроби. Это х = -1, х=8, х = 3, х= 5.

Нанесем найденные точки на числовую ось и определим знак дроби в каждом промежутке, вычисляя значение этой дроби в произвольной точке каждого промежутка.

 - + + - -

 -1 3 5 8 х

Решением исходного неравенства является

х [-1, 3)  (3; 5)  {8}. Найдем сумму целых решений: -1 +1+0+ 2 + 4 + 8 = =14.

Ответ: 14.

Решить неравенства:

1) . Ответ: 

2) >- . Ответ: 

3)  + < 7. Ответ: 

4)  > 0. Ответ: 

5)  -  . Ответ: 

6) Найти сумму целых решений неравенства . Ответ: 