*Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение*

*средняя общеобразовательная школа с. Малая Кема*

*Тернейского района Приморского края*

***АВТОРСКАЯ ПРОГРАММА***

*по элективному курсу «Избранные вопросы математики. Параметры»*

*Ступень обучения (класс) основное общее образование 9 класс*

*Количество часов - 30.*

*Уровень базовый.*

*Автор: учитель математики ВКК*

*О. М. Симоненко*

Оглавление

[Пояснительная записка 3](#_Toc378965124)

[Содержание курса 4](#_Toc378965125)

[Линейные уравнения, неравенства, системы 5](#_Toc378965126)

[*Занятие 1*. Линейные уравнения (2 ч) 5](#_Toc378965127)

[*Занятие 2.* Уравнения, приводимые к линейным. (2 ч) 6](#_Toc378965128)

[Занятие 3. Линейные и дробно-линейные неравенства. (2 ч) 7](#_Toc378965129)

[*Занятие 4*. Системы уравнений. (2 ч) 8](#_Toc378965130)

[*Занятие 5*. Системы неравенств. (2 ч) 12](#_Toc378965131)

[Квадратные уравнения, неравенства, системы. 13](#_Toc378965132)

[*Занятие 1*. Квадратные уравнения. (2 ч) 13](#_Toc378965133)

[*Занятие 2*. Соотношения между корнями квадратных уравнений. (2 ч) 15](#_Toc378965134)

[*Занятие 3.* Квадратные неравенства. (2 ч) 16](#_Toc378965135)

[*Занятие 4*. Взаимное расположение корней квадратного уравнения. (2 ч) 18](#_Toc378965136)

[*Занятие 5*. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. (2 ч) 22](#_Toc378965137)

[*Занятие 6*. Системы уравнений и неравенств. (2 ч) 23](#_Toc378965138)

[*Занятие 7*. Уравнения, приводимые к квадратным. (2 ч) 25](#_Toc378965139)

[Используемая литература 26](#_Toc378965140)

# Пояснительная записка

В школьном курсе, к сожалению, не уделяется достаточно внимания решению даже стандартных задач с параметрами. Трудно рассчитывать на то, что учащиеся самостоятельно извлекут правильные представления о сущности параметра из теоретических рассуждений. Такое положение дела представляется, безусловно, определенным недостатком школьного обучения – известно, какую роль играют такие задачи с точки зрения развития учащихся, в частности их логического мышления.

 Этими обстоятельствами определяется высокая диагностическая и прогностическая ценность задач с параметрами: если ученик успешно решает такие задачи, то он фактически самостоятельно овладел этим материалом, он показывает весьма высокий уровень логического развития, и поэтому с большой вероятностью можно утверждать, что и далее он будет учиться успешно. С другой стороны, если ученик не умеет решать таких задач, то более или менее вероятный прогноз, по-видимому, невозможен.

 Нельзя в то же время утверждать, что в школе вообще не решаются задачи с параметрами, что отсутствует сама идея параметра. В самом деле, уже в 7-м классе учащиеся должны решать линейное уравнение вида *ax=b* , т.е. уравнение с двумя параметрами, а задача решения общего квадратного уравнения представляет собой задачу с тремя параметрами.

Неизвестность для решающего фиксированных значений параметров приводит к необходимости разветвления решения и к соответствующему разветвлению ответа. Это обстоятельство, разумеется, осложняет задачу, но преодоление возникающих трудностей является, безусловно, развивающим моментом, активизирующим знания учащихся о функциях, об области определения, о выполнимости операций над числами, и является одним из средств борьбы против формализма в решении задач. Не так уж редко приходится видеть, как учащийся решает уравнение sin x = 2 по «общей формуле», не обращая внимание на то, что arcsin 2 не имеет смысла – а между тем в этом уравнении параметра нет!

Эти соображения касаются, впрочем, самого простого вида задач с параметрами – стандартных задач с параметрами, когда учащемуся предлагается решить фактически не одно уравнение или неравенство, а целый класс уравнений или неравенств. Единственным усложняющим моментом является ветвление решения, требующее от учащегося более высокой математической и логической культуры, однако воспитание такой культуры является одной из важнейших целей обучения математике.

*Цель курса:* создание ориентированной и мотивационной основы для осознанного выбора будущего технического профиля обучения. Программа курса рассчитана на учащихся 8-9 классов, намеревающихся продолжить обучение в старшем звене.

Курс рассчитан на 30 часов (2 часа резервные)

*Задачи курса:*

* Формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
* Развитие интеллектуальных умений посредством решения задач, предполагающих выполнение таких операций, как анализ, систематизация, обобщение, абстрагирование;
* Ориентация на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе;
* Формирование важнейших общеучебных умений и элементов культуры умственного труда.

Ведущей деятельностью курса является *учебная деятельность.*

 *Виды работы:*

* Самостоятельная работа учащихся над теоретическим материалом темы курса;
* Консультации с учителем;
* Публичное представление полученных в ходе самостоятельной работы результатов, их аргументированное обоснование;
* Работа в малых группах.

Формы контроля достижений учащихся соответствуют компонентам содержания курса, особенностям предъявляемых требований к усвоению знаний и овладению конкретными умениями.

 Работа каждого учащегося в рамках курса *оценивается* комплексно по следующим компонентам:

* Включенность ученика в учебную деятельность и личностный рост ученика в ходе учебной деятельности;
* Оценка учащимися друг друга при коллективно-распределительной деятельности в группах;
* Уровень написанного итогового тестирования.

# Содержание курса

1. Линейные уравнения, неравенства, системы (13 ч):
	1. Линейные уравнения (2 ч)
	2. Уравнения, приводимые к линейным (2 ч)
	3. Линейные и дробно-линейные неравенства (2 ч)
	4. Системы уравнений (2 ч)
	5. Системы неравенств (2 ч)

Подготовка к итоговому зачету по теме – 1 ч

Итоговый зачет по теме – 1 ч

Резерв – 1 ч

1. Квадратные уравнения, неравенства, системы (17ч):

2.1 Квадратные уравнения (2 ч)

2.2.Соотношения между корнями квадратного уравнения (2 ч)

2.3 Квадратные неравенства (2 ч)

2.4 Взаимное расположение корней квадратного уравнения (2 ч)

2.5 Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений (2 ч)

2.6 Системы уравнений и неравенств (2 ч)

2.7 Уравнения, приводимые к квадратным (2 ч)

Подготовка к итоговому зачету по теме – 1 ч

Итоговый зачет по теме – 1 ч

 Резерв – 1 ч

## Линейные уравнения, неравенства, системы

### *Занятие 1*. Линейные уравнения (2 ч)

*Немного теории*. Уравнение вида *ax = b,* где *a, b* называется линейным относительно неизвестного х.

Возможны три случая:

1. – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение .
2. . Уравнение принимает вид , решениями являются все
3. Уравнение решений не имеет.

Ответ:

*Разобрать решение примеров:*

1. Решить уравнение:
2. Решить уравнение:
3. При каких уравнения 1) имеют бесконечно много решений?
4. При каких уравнения не имеют решений?
5. При каком уравнение 2ax + 5 = 3x имеет корень, равный -1?
6. При каком а прямая y = 2ax – 3 проходит через точку А (1; -6)?
7. При каких b уравнение (a – 3)x = b + 2a имеет решения для любого а?
8. При каких а уравнение 3(x – 2a) = 4(1 + x) имеет отрицательное решение?
9. При каких а уравнение а(4х – а) = 12х – 9 имеет одно положительное решение?
10. Найти все а, для каждого из которых решение уравнения 10х – 15а = 13 - 5ах + 2а больше 2.
11. При каких а каждый корень уравнения 3(х + а) = 6 – а удовлетворяет условию ?

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решите уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| *а)* 3 + ах = 2х | *б*) -2 + 3ах = 6х + а |
| *в*) 2ах – а = 2 – 4х | *г*) 3ах + 3 = 9х + а |
| *д*) 4ах2 – 2а = 9х +3 | *е)* 2х – 4 = ах – а2 |
| *ж)* 9b2x – 3b = 4x - 2 |  |

1. При каких а уравнения

а) 6(ах – 1) – а = 2(а + х) – 7; б) 0,5(5х – 1) = 4,5 – 2а(х – 2) имеют бесконечно много решений?

1. При каких а уравнения

а) 2(а – 2х) = ах + 3; б) а2х = а(х + 2) – 2 не имеют решений?

1. При каком а уравнение ах – 4 = 3х имеет корень, равный 8?
2. При каком а уравнение 2ах + 4 = 3а + 5х имеет корень, равный 3?
3. При каком а прямая у = ах – 3 проходит через точку А (-2;9)?
4. При каком а прямая у = 3х + а проходит через точку А (-1;5)?
5. При каком b уравнение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) (а + 1)х = 2b - a | б) (2а – 1)х = b +a - 1 | в) (а +2)х = 3b – a +1 |
| Имеет решение при любом  | а? |  |

1. При каких а уравнение 2(а + х) = 3(1 – х) имеет положительное решение?
2. При каких а уравнение а(х – 3) = 2х + 1 имеет решение, удовлетворяющее условию х
3. При каких а каждый корень уравнения 2(х – 2а) = 3 + а удовлетворяет условию

### *Занятие 2.* Уравнения, приводимые к линейным. (2 ч)

Разобрать решение примеров:

1. Решить уравнение:
2. Решить уравнение:
3. Решить уравнение:
4. Решить уравнение:
5. Решить уравнение:
6. Решить уравнение:
7. Решить уравнение:
8. При каких а уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  а)  | б)  |
|  имеют бесконечно много решений?  |  |

1. При каких а уравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в) = 0  |
| г)  | д)  | не имеют решений? |

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |
| в)  | г)  |

1. При каких а уравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |

имеют бесконечно много решений?

1. При каких а уравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |
| г)  | д)  |

не имеют решений?

Занятие 3. Линейные и дробно-линейные неравенства. (2 ч)

*Немного теории.*  Неравенства вида называются линейными неравенствами. Множество решений неравенства – промежуток Аналогично для неравенства

*Разобрать решение примеров:*

1. Решить неравенство + а2
2. Решить неравенство а(3х – 1) 3х - 2
3. Решить неравенство (а2 – 2а – 3)х – а
4. Решить неравенство
5. Решить неравенство ах – b
6. При каких а неравенство 3х – 2а является следствием неравенства х – 1 + а 0?
7. Решить неравенство
8. Решить неравенство
9. Решить неравенство
10. При каких а неравенство

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить неравенства:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  | г)  |
| д)  | е)  | ж)  | з)  |

1. При каких значениях а неравенство является следствием неравенства
2. Решить неравенства:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |
| г)  | д)  | е)  |
| ж)  | з)  | и)  |

1. При каких а неравенство выполняется для всех
2. При каких а неравенство ах + 2 - 0 выполняется для всех
3. При каких а неравенство является следствием неравенства

###  *Занятие 4*. Системы уравнений. (2 ч)

 *Немного теории.* Уравнение вида *ax + by = c*, где *a, b, c* – числа, называется линейным; числа *a* и *b* называются коэффициентами при переменных, *с* – свободным членом.

 Графиком любого линейного уравнения *ax + by = c*, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, является прямая; если b = 0, то это прямая параллельная оси Оу, если а = 0, то это прямая, параллельная оси Ох. Если a = 0 и b = 0, то в случае с = 0 графиком является вся координатная плоскость, в случае с 0 уравнение не имеет решений.

 Система двух линейных уравнений с двумя переменными

(1)

может иметь единственное решение, бесконечно много решений и не иметь решений, что геометрически интерпретируется соответственно как пересечение, совпадение и параллельность прямых, являющихся графиками уравнений системы.

 Если , то эти прямые пересекаются в одной точке; если , то прямые совпадают, если , то прямые параллельны (не совпадают).

 Отсюда следует, что система (1) имеет единственное решение, если , имеет бесконечно много решений, если , не имеет решений, если .

 В последних трех соотношениях записаны не дроби, а пропорции – они имеют смысл и в том случае, когда некоторые из знаменателей равны нулю.

 *Разобрать решение примеров:*

1. Решить систему уравнений
2. Решить систему уравнений
3. При каких а система уравнений имеет решения?
4. При каких а система уравнений имеет единственное решение?
5. При каких а система уравнений не имеет решений?
6. Найти а, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений.
7. Найти а, при которых решения системы удовлетворяют условиям

.

1. Найти а, при которых решения системы удовлетворяют неравенству
2. Решить систему уравнений .
3. Найти все b такие, чтобы при любых а система имела хотя бы одно решение.
4. Найти все а такие, чтобы при любом b нашлось с такое, что система уравнений имеет хотя бы одно решение.
5. При каких c и d система уравнений имеет единственное решение при х = 1 и у = 1.
6. Числа a, b, c таковы, что система имеет бесконечно много решений, причем х = 1, у = 3 – одно из этих решений. Найти a, b, c.
7. При каких c и d системы уравнений

 являются равносильными?

1. При каких а выражение принимает наименьшее значение, где – решение системы

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |
| в)  | г)  |

1. При каких а система уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | б)  | в) |
| г)  | д)  |

1. При каких а система уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |
| в)  | г)  |

не имеет решений?

1. При каких а система уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |
| в)  | г)  |

имеет бесконечно много решений?

1. Покажите, что система уравнений имеет единственное решение при любом а.
2. При каких а прямые х + 5ау = 3 и ах + (3а + 2)у = 4а – 1

а) пересекаются в одной точке, б) совпадают, в) не имеют общих точек?

1. Найти а, при которых решения системы уравнений удовлетворяют условиям
2. При каких а решения системы уравнений удовлетворяют неравенству ?
3. При каких а решения системы уравнений удовлетворяют неравенству
4. При каких а решения системы уравнений удовлетворяют неравенствам ?
5. При каких а решения системы уравнений удовлетворяют неравенствам
6. Решите системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |

1. Найдите все пары (a,b), при каждой из которых система уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |

имеет бесконечно много решений.

1. Найти все b такие, чтобы при любых а имела бы хотя бы одно решение система уравнений:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |

1. Найти все а такие, чтобы при любом b нашлось с такое, что система уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| а)  | б)  |
| в)  | г)  |

имеет хотя бы одно решение.

1. При каких c и d система уравнений имеет единственное решение x = -1, y = 2
2. При каких c и d система уравнений имеет единственное решение x = 1, y = 1
3. При каких c и d системы уравнений являются равносильными?
4. При каких а выражение А = принимает наименьшее значение, где (решение системы

### *Занятие 5*. Системы неравенств. (2 ч)

 *Немного теории*. Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств.

*Разобрать решение примеров:*

1. Решить систему неравенств: 1) .
2. При каких а система неравенств не имеет решений?
3. При каких а система неравенств имеет хотя бы одно решение?
4. Существуют ли такие значения а, при которых решением системы неравенств является промежуток: 1)
5. Решить систему неравенств
6. Решить систему неравенств .
7. Решить систему неравенств

 Немного теории. Решением системы неравенств с двумя неизвестными называется любая упорядоченная ара чисел, обращающая каждое неравенство в верное числовое неравенство. Множеством решений системы неравенств является пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему.

Каждое неравенство системы вида ax + by ax + by задает полуплоскость вместе с границей на координатной плоскости хОу. Неравенство ax + by ax + by задает полуплоскость без границы, уравнение которой ax + by = ( есть уравнение прямой.

Система двух линейных неравенств может не иметь решений лишь в случае, когда прямые, определяющие неравенства, параллельны. Если же прямые пересекаются, то при любой комбинации знаков неравенств решения системы существуют.

1. При каких а система неравенств
2. При каких а система неравенств имеет единственное решение?

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить систему неравенств:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  | г)  |

1. При каких а система неравенств

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |

имеет хотя бы одно решение?

1. При каких а система неравенств

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |

не имеет решений?

1. Существуют ли такие значения а, при которых решением системы неравенств является промежуток: 1)
2. Решить систему неравенств:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в)  |
| г)  | д)  |

1. При каких а система неравенств имеет решения?
2. При каких а система неравенств имеет единственное решение?

## Квадратные уравнения, неравенства, системы.

### *Занятие 1*. Квадратные уравнения. (2 ч)

 *Немного теории.* Уравнение вида ах2 + bx + c = 0, где a, b, c называется квадратным уравнением. D = b2 – 4ac – дискриминант квадратного уравнения. Если то уравнение не имеет корней. Если , если D = 0, то уравнение имеет единственный корень .

Здесь будут рассмотрены следующие задачи:

1. нахождение корней квадратных уравнений;
2. исследование количества корней в зависимости от значений параметров;
3. установление равносильности уравнений.

*Разобрать решение примеров:*

1. Решить уравнение а(а + 1)х2 + х – а(а – 1) = 0
2. Решить уравнение (а2 – b2)x2 – 2ax + 1 = 0
3. Решить уравнение
4. Решить уравнение
5. При каких а уравнение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ах2 + х – 5 = 0 | б) (а – 3)х2  + (6 – 2а)х + 1 = 0 | в)  |

имеет единственное решение?

1. При каких а уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| а) (а – 2) х2 – 2ах + 2а - 3 = 0  | б) (а + 1)х2 + + 3 = 0  |

имеет а) один корень; б) два различных корня?

1. Найти наименьшее целое а, при котором уравнение х2 + (2а + 3)х + а2 – а + 5 = 0 имеет два различных корня.
2. При каких а уравнение (а2 – 6а +5)х2 – (а2 – 3а + 2)х + а2 – а = 0 имеет более двух корней?
3. Даны два уравнения: х2 + 2ах + а = 0 и ах2 + ах + 1 = 0. При каких а одно уравнение имеет решение, а другое нет?
4. При каких а уравнения

|  |  |
| --- | --- |
| а) х2 + (а2 – 5а + 6)х = 0 и  | Х2 + 2(а – 3)х + (а2 – 7а + 12) = 0 |
| б)х2 + а (а – 1)х + 1 = 0 и | Х2 + х + (а – 1) = 0 равносильны? |

1. Найти все пары (a;b), для которых уравнения х2 – ах + а = 0 и х2 + b2x – 2b = 0 равносильны.

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б)  | в) ах2 – (а – b)x – b = 0 |

1. При каких а уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| а) = 0 | б)  |

имеет единственное решение?

1. При каких а уравнение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) (а – 3) х2 – 2ах + (3а – 6) = 0 | б) ах2 – 4х + 3 = 0 | в) (а + 2)х2 +  |

имеет : 1) единственное решение; 2) два различных корня?

1. При каких а уравнение а(а + 3)х2 + (2а + 6)х – 3а – 9 = 0 имеет:
2. более одного корня; 2) более двух корней?
3. При каких а уравнения

|  |  |
| --- | --- |
| Х2 – (а2 + а – 6)х = 0 и | Х2 – 2(а + 3)х + (а2 – а – 12) = 0 равносильны? |

### *Занятие 2*. Соотношения между корнями квадратных уравнений. (2 ч)

*Разобрать решение примеров:*

1. При каких а сумма квадратов корней уравнения х2 – 9х + а = 0 равна 21?
2. При каких а сумма квадратов двух различных корней уравнения ах2 + 6х – 6 = 0 больше 3?
3. При каких а сумма корней уравнения х2 + (а2 – 4а – 5)х + ( а2 – 6а + 1) = 0 равна нулю?
4. При каких а разность корней уравнения х2 + 2ах – 8 = 0 равна 6?
5. При каких а разность квадратов корней уравнения 5х2 – 7х + а = 0 равна ?
6. При каких а разность корне уравнения 2х2 – (а + 1)х + (а – 1) = 0 равна их произведению?
7. Пусть х1 и х2 – корни уравнения 3х2 – ах + 2а – 1 = 0. Вычислить
8. При каких а сумма кубов двух различных корней уравнения х2 – 4х -2а + 6 = 0 меньше 24?
9. Найти а, при которых отношение корней уравнения х2 – (2а + 4)х + а2 + 4 = 0 равно 5.
10. Найти а, при которых один из корней уравнения х2 – 2х + а = 0 равен квадрату другого.
11. При каких а уравнение х2 + 1 = имеет два корня х1 и х2, удовлетворяющих неравенству
12. При каком а уравнения х2 + ах + 2 = 0 и х2 + 2х + а = 0 имеют общий корень?
13. При каких а уравнение 4ах2 – 5х + а = 0 и 3х2 + 2ах – 5 = 0 имеют общий корень?
14. При каком а один из корней уравнения х2 – 5х – 3а = 0 будет втрое больше одного из корней уравнения х2 – 6х + 4а = 0?

*Задания для самостоятельного решения:*

1. При каких а сумма корней уравнения х2 + (2 – а – а2)х – а2 + 3 = 0 равна 0?
2. При каких а сумма квадратов корней уравнения х2 + 3х + 2а = 0 равна 1?
3. При каких а разность корней уравнения х2 – ах + 2 = 0 равно 1?
4. При каких а разность квадратов корней уравнения 3х2 – 5х + а = 0 равна ?
5. При каких а один из корней уравнения х2 - х + а = 0 равен квадрату другого?
6. При каких а отношение корней уравнения х2 – (а + 2)х + а2 - 1 = 0 равно 3?
7. При каких а отношение корней уравнения х2 – (3а + 2)х + а2 = 0 равно 9?
8. При каких а отношение корней уравнения ах2 – (а + 3) х + 3 = 0 равно
9. При каких а корни уравнения х2 + (а + 1)х + 2а – 4 = 0 удовлетворяют соотношению 2х1 – х2 = -6?
10. При каких а сумма квадратов двух различных корней уравнения ах2 – 7х + 5 = 0 меньше 39?
11. При каких а сумма кубов двух различных корней уравнения х2 – 6х + 2а – 1 = 0 меньше 72?
12. При каких а уравнения:

|  |
| --- |
| а) 2х2 – (3а + 2)х + 12 = 0 и 4х2 – (9а – 2)х + 36 = 0 |
| б) 3ах2 – 5х + 2а = 0 и 2х2 + ах – 3 = 0 имеют общий корень? |

1. При каких а корни уравнения 4х2 + равны по модулю?
2. При каких а разность корней уравнения 2х2 – (а + 2)х + (2а – 1) = 0 равна их произведению?

### *Занятие 3.* Квадратные неравенства. (2 ч)

 *Немного теории*. Квадратными называются неравенства вида

ах2 + bx + c 0, ах2 + bx + c 0, (1), (2)

ах2 + bx + c 0, ах2 + bx + c 0. (3), (4)

Множество решений неравенства (3) получается объединением множеств решений неравенства (1) и уравнения ах2 + bx + c = 0. Аналогично находится множество решений неравенства (4).

 Если дискриминант квадратного трехчлена ах2 + bx + c меньше нуля, то при а трехчлен положителен при всех х R, а при а отрицателен при всех х .

 Если квадратный трехчлен имеет корни (х1 х2), то при а 0 он положителен на множестве и отрицателен на интервале (х1; х2). Если а 0, то трехчлен отрицателен при всех х и положителен на интервале (х1; х2).

*Разобрать решение примеров:*

1. Решить неравенство: х2 + 2аx + 4 0.
2. Решить неравенство: х2 – 2(а + 1)x + 4а .
3. Решить неравенство: (а2 - 1)х2 - 2аx + 1 0.
4. Решить неравенство:
5. При каких а неравенство (а – 3)х2 – 2ах + 3а – 6 0 выполняется для всех значений х?
6. При каких а неравенство выполняется для всех значений х?
7. При каких а неравенство (а – 1)х2 + (2а + 2)х + 2а – 1 0 выполняется только для значения х?
8. При каких а множеством решений неравенства х2 – 2аx – 3 0 будет отрезок длины 4?
9. При каких а модуль любого решения неравенства ах2 + (3а2 – 2)x – 6а 0 не превосходит трех?
10. При каких а каждое решение неравенства х2 – 3х + 2 0 будет содержаться среди решений неравенства ах2  - (3а +1)х + 3 ?
11. При каких а любое решение неравенства х2 – 4ах + х + 3а2 – 5а – 2 является решением неравенства х2 – 2ах + а2 – 1 ?
12. При каких а существует хотя бы одно общее решение у неравенств

х2 – (3а + 1)х + 2а2 + 3а – 2 0 и х2 – 5ах + 6а2 + а - 1 0?

*Задания для самостоятельного решения:*

1. Решить неравенство:

|  |  |
| --- | --- |
| а) х2 – (4а + 2) х + 3а2 + 10а – 8  | б) х2 – (3а – 1)х + 2а2 – 3а – 2 0 |
| в) (а – 1)х2 + (2а + 1)х + (а + 3) 0 | г) ах2 – (2а - 1)х + (а + 2)  |
| д) х2 – 4ах + 9 | е) х2 – 3ах + 2а2 + а – 1  |
| ж) х2 – (4а + 1)х + 3а2 + 5а – 2 0 | з)  |

1. При каких а неравенство

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) (а + 4)х2 – 2ах + 2а – 6 0 | б) (а + 2)х2 – (2а + 4)х + 7а + 3  | в)  |

выполняется при всех х?

1. При каких а неравенство ах2 + (2а + 4)х + 2а + 1 выполняется только для одного значения х?
2. При каких а модуль любого решения неравенства ах2 + (1 – а2)х – а 0 не превосходит двух?
3. При каких а существует хотя бы одно общее решение неравенств х2 + 4ах + 3а2 – 2а - 1 и х2 + 2ах – 3а2 + 8а – 4 0?
4. При каких а множеством решений неравенства х2 + 3ах – 7 0 будет отрезок длины 8?
5. При каких а каждое решение неравенства х2 – 4х + 30 будет содержаться среди решений неравенства (х - а + 1)(х – а – 1) ?
6. При каких а неравенство (х – 3а)(х – а – 3)0 выполняется при всех х таких, что 1?
7. При каких а множество решений неравенства х2 – а(а2 + 1)х + а40 содержится в интервале (-3;-1)?
8. При каких а все решения неравенства х2 – 3х – 4 0 являются решениями неравенства х2 - а0?
9. При каких а решением неравенства х2 – ( а2 – 2а – 3)х + а2 + 2 0 является отрезок ?
10. При каком наименьшем целом а неравенство а х2 + 4х – 1 + 2а выполняется для всех значений х?

### *Занятие 4*. Взаимное расположение корней квадратного уравнения. (2 ч)

*Немного теории*. Здесь рассматриваются задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения относительно некоторых характерных точек. Во многих случаях нахождение корней уравнения и решение иррациональных неравенств приводит к громоздким преобразованиям. В то же время использование свойств квадратичной функции позволяет существенно упростить решение, свести его к решению рациональных неравенств.

Все приводимые ниже утверждения могут быть строго доказаны. Однако нет необходимости их заучивать. Поэтому основное внимание уделено наглядности, обоснование утверждений существенно опирается на чертеж.

В дальнейшем будем применять следующие обозначения: f(x) = ax2 + bx + c (a 0) – квадратичная функция, D = b2 – 4ac – дискриминант квадратного трехчленаах2 + bx + c. Известно, что график квадратичной функции – парабола, ветви которой направлены вверх при а и вниз при а 0, х0 = - абсцисса вершины параболы, у0 = f(x0) = - – ордината вершины параболы, х1 и х2 – соответственно меньший и больший корни уравнения f(x) = 0 (D ).

Все чертежи приведены для а , случай для а 0 рассматривается аналогично.

Сформулируем необходимые и достаточные условия того, чтобы:

1. корни уравнения х1 и х2 находились по разные стороны от некоторого числа а (;
2. оба корня больше (меньше) некоторого числа а (;
3. оба корня уравнения принадлежат некоторому интервалу ;
4. один из корней уравнения принадлежит интервалу второй – нет
5. корни уравнения удовлетворяют условию
6. один из корней уравнения принадлежит интервалу а второй – интервалу .

**Утверждение 1. Для того, чтобы корни уравнения f(x) = 0 лежали по разные стороны от числа , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство af(

*Разобрать решение примеров:*

1. При каких m уравнение х2 – (2m + 1)x + 3m – 4 = 0 имеет два корня , один из которых меньше 2, а другой больше 2?
2. При каких m уравнение mх2 + (3m - 2)x + m – 3 = 0 имеет разных знаков?
3. При каких m уравнение (m2 – 2)х2 + (m2+ m -1)x - m3 + m2 = 0 меньше m, а другой больше m?
4. При каких m только один корень квадратного трехчлена х2 – 3(m + 1)х + 12m – 4 больше 3?

Утверждение 2. Для того, чтобы корни уравнения f(x) = 0 были больше некоторого числа , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:



Утверждение 2’. Для того, чтобы корни уравнения f(x) = 0 были меньше некоторого числа , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

*Разобрать решение примеров:*

1. При каких m все корни уравнения х2 –(3m + 1)x + (2m2 + 4m – 6) = 0 а) больше 1; б) меньше -1?
2. При каких m корни уравнения mх2 –(2m + 1)x + 3m – 1 = 0 больше 1?
3. При каких m корни уравнения х2 + 2mx +8 = 0 отрицательны?
4. При каких m уравнение (m + 1)х2 –2mx + 2m – 2) = 0 имеет два различных корня одного знака?
5. При каких m корни уравнения х2 –2x - m = 0 меньше m?
6. Для каких m любое решение неравенства х2 – х – 2 будет больше любого решения неравенства mx2 – 4x – 1 0?

Утверждение 3. Для того, чтобы корни уравнения f(x) = 0 принадлежали интервалу , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств



*Разобрать решение примеров:*

1. При каких m При каких m корни уравнения х2 – 2mх + m2 - 2m + 5 = 0 по модулю не превосходят числа 4?
2. При каких m корни квадратного трехчлена (2m – 2)х2 + (m + 1)x + 1 больше -1, но меньше 0?
3. Существуют ли такие m, что оба корня уравнения m2x2 – 2m(2m + 1)x + 1 – 16m2 = 0 лежат между 0 и 1?
4. При каких m все решения неравенства mx2 - (1 – m2)x – m принадлежат промежутку

Утверждение 4. Для того, чтобы меньший корень уравнения f(x) = 0 принадлежал интервалу , а больший не принадлежал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:



Утверждение 4’’. Для того, чтобы только один корень уравнения f(x) = 0 принадлежал интервалу а другой - не принадлежал, необходимо и достаточно, чтобы f(

 

*Разобрать решение примера:*

1. При каких m только один корень уравнения х2 - mx + 6 = 0 удовлетворяют условию ?

Утверждение 5. Для того, чтобы корни уравнения f(x) = 0 удовлетворяли соотношению необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

*Разобрать решение примеров:*

1. При каких m корни уравнения (m – 1)x2 – 2(m + 2)x + 3m = 0 удовлетворяют условию
2. Найти все значения m, при которых неравенство х2 + 2(m – 3)x + m2 – 6m будет выполнено для любого х, принадлежащего интервалу (0;2).

Утверждение 6. Для того, чтобы один корень уравнения f(x) = 0 принадлежал интервалу , а другой - интервалу , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств:



 *Разобрать решение примера:*

1. При каких m один из корней уравнения х2 – (2m + 1)x + m2 + m – 2 = 0 находится между числами 1 и 3, а второй – между числами 4 и 6?

*Задания для самостоятельного решения:*

1. При каких m уравнение (m – 2)x2 + (2m – 3)x + m2 – 3m + 2 = 0 имеет два корня, один из которых меньше -1, а другой больше -1?
2. При каких m уравнение mx2 + (2m – 1)x + m2 – 6m + 8 = 0 имеет корни разных знаков?
3. При каких m один из корней уравнения (m2 – 1) x2 + (3m – 1)x – m4 = 0 меньше m, а другой больше m?
4. При каких m корни уравнения (m – 1)x2 - 2(m + 2)x + m + 13 = 0 больше 2?
5. При каких m корни уравнения х2 – 4mx + 3 = 0 положительны?
6. При каких m корни уравнения mх2 – 2(m - 1)x + 3m – 2 = 0 отрицательны?
7. При каких m корни уравнения х2 + 2x + m = 0 больше m?
8. При каких m любое решение уравнения (m – 1)x2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0 удовлетворяет условию -1 < x< 5?
9. При каких m только один корень уравнения x2 + mx + 4 = 0 удовлетворяет условию -3 < x < -1?
10. При каких m корни уравнения (m + 2)x2 + (m – 1)x – m = 0 удовлетворяют условию х1 < 1, x2 > 3?
11. При каких m корни уравнения х2 –(2m - 2)x + m2 - 2m – 3) = 0 удовлетворяют условию -3 < x1 < -1, 1 < x2 < 3?
12. При каких m уравнение mx2 - (3m + 2)x + 2(m + 1) = 0 имеет решение, большее 1?
13. При каких m корни уравнения х2 –(3m - 2)x + 2m2 - m – 3 = 0 находятся между корнями уравнения х2 –(5m - 1)x + 6m2 - m – 2 = 0?
14. При каких m между корнями уравнения х2 –(7m - 3)x + 12m2 - 13m – 4 = 0 находится ровно один корень уравнения х2 –(5m + 2)x + 6m2 + m – 15 = 0?

### *Занятие 5*. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. (2 ч)

*Немного теории*. Часто встречаются задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения суммы корней (или суммы квадратов корней). Для решения таких задач достаточно использовать теорему Виета и условие существования корней квадратного уравнения (D *Разобрать решение примеров:*

1. При каких а сумма корней уравнения х2 + 2(а2 – 3а)х – (6а3 – 14а2 + 4) = 0 принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение.
2. При каком а сумма квадратов корней уравнения х2+ (2 – а)х – а2 + 1 = 0 принимает наименьшее значение?
3. При каких а сумма квадратов корней уравнения х2– ах + а2 - 1 = 0 принимает наибольшее и наименьшее значение?
4. При каком а сумма квадратов корней уравнения х2+ х + 2а - 1 = 0 принимает наименьшее значение?
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) = .
6. Найти a и b, при которых наибольшее и наименьшее значения функции f(x) = равны соответственно 2 и -3.
7. При каких а наибольшее значение f(x) = меньше четырех?
8. При каких а наименьшее значение функции f(x) = x2 + (a + 4)x + 2a + 3 на отрезке равно -4?
9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) = 2х2 - 2ах + 1 на отрезке .
10. Найти наибольшее значение функции f(x) = -х2 - (а – 2)х + 1 = 0 на отрезке
11. Найти все а из промежутка при каждом из которых меньший корень уравнения х2+ ах – 3х - 2а - 2 = 0 принимает наименьшее значение

*Задания для самостоятельного решения*

1. Найти все а из промежутка , при каждом из которых больший корень уравнения х2– 6х + 2ах + а - 13 = 0 принимает наибольшее значение.
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции f(x) =
3. Найти наименьшее значение выражения , если х1 и х2 – корни уравнения х2 - 2ах + а + 6 = 0
4. При каком а сумма квадратов корней уравнения х2+ х – а - 2 = 0 принимает наименьшее значение?
5. Найти сумму корней уравнения х2+ 2(а2 + 2а)х + 4а3 - 2а2+ 40 = 0 и указать, при каких а эта сумма принимает наибольшее значение.
6. Найти а, при котором наименьшее значение функции у(x) = х2+ (22а + 12)х + 116а2 + 135а + 27 максимально.
7. При каком значении а сумма достигает своего наименьшего положительного значения, если х1 и х2 – корни уравнения х2 - (2а + 1)х + 2а2 = 0
8. При каком значении а сумма достигает своего наибольшего отрицательного значения, если х1 и х2 – корни уравнения х2 - (27а - 5)х - 8а2 = 0

### *Занятие 6*. Системы уравнений и неравенств. (2 ч)

*Немного теории.* Основной метод решения систем уравнений – исключение неизвестного.

*Разобрать решение примеров:*

1. При а = -3 решить систему Имеет ли эта система решение при других а?
2. Найти а, при которых система имеет ровно два решения.
3. Найти а, при которых система имеет решение.
4. Найти а, при которых система имеет более двух решений.
5. При каких а система уравнений имеет хотя бы одно решение?
6. Найти а, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два решения.
7. При каких а система уравнений имеет единственное решение (х;у)?
8. При каких b система уравнений имеет решения при любых а?
9. Числа х, у, а таковы, что При каком а произведение ху принимает наибольшее значение?
10. Найти а, для которых существует хотя бы одна пара х и у таких, что .
11. Решить систему неравенств .
12. При каких а имеет решение система ?
13. Найти а, при которых решение системы состоит из одной точки.
14. При каких а решением системы является промежуток длины 3?

*Задания для самостоятельного решения*

1. Найти а, при которых система имеет решение.
2. При а = 2 решить систему . Имеет ли эта система решение при других значения а?
3. Найти а, при каждом из которых система имеет два решения.
4. При каких а система имеет единственное решение?
5. Числа х, у, а таковы, что При каких а сумма х2 + у2 принимает наибольшее значение?
6. Решить систему уравнений
7. При каких а система уравнений имеет решения при любых b?
8. Решить системы неравенств:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а)  | б) |  |

1. Найти а, при которых решение системы состоит из одной точки.
2. При каких а имеет решение система неравенств
3. При каких а решением системы является промежуток длины 5?
4. При каких а система уравнений имеет решение?
5. При каких а система уравнений имеет ровно два различных решения?

### *Занятие 7*. Уравнения, приводимые к квадратным. (2 ч)

*Немного теории.* Здесь будут рассмотрены примеры уравнений четвертой степени, которые заменой переменной сводятся к квадратным.

*Разобрать решение примеров:*

1. При каком наименьшем целом значении параметра а уравнение (х2 – 2х)2 – (а + 2)(х2 – 2х) + 3а – 3 = 0 имеет четыре различных корня?
2. При каких а уравнение х4 + 2ах2 - 3а – 1 = 0 имеет четыре различных корня, причем два из них меньше -1, а два других больше ?
3. При каких а уравнение 2(а – 1)х4 - (а – 5)ах2 - 2 = 0 имеет четыре различных корня, причем три из них меньше 2, а четвертый больше?
4. При каких а уравнение (х – а)4(а(х – а)2 – а – 1) = -1 имеет больше положительных корней, чем отрицательных ?
5. При каких а уравнение х4 + (х + 1)((3а – 2)х2 + (2а2 – а - 3)(х + 1)) = 0 принадлежат отрезку ?

*Задания для самостоятельного решения.*

1. Найти наибольшее целое а, при которых уравнение 8х4 - 16х2 + а = 0 имеет четыре различных корня.
2. При каких а уравнение (х – а)2(ах – а)2 – 2а – 4) = - 2а - 3 имеет отрицательных корней больше, чем положительных?
3. При каких а уравнение 2ах4 - (а – 4)х2 - 2 = 0 имеет четыре различных корня, причем три из них меньше 1, а четвертый больше?
4. При каких а уравнение 3ах4 + (12 - а)х2 - 4 = 0 имеет четыре различных корня, причем три из них больше -1, а четвертый меньше?
5. При каких а один корень уравнения ах4 - (а – 3)ах2 + 3а = 0 меньше - 2, а тр остальных – больше -1?
6. При каких а четыре корня уравнения х4 + (а – 5)х2 + (а + 2)2 = 0 являются последовательными членами арифметической прогрессии?

## Используемая литература

«Математика в школе» №8 2002 г.

«Математика в школе» №4 1994 г.

«Математика в школе» №4 1983 г.

«Элективные курсы в профильном обучении» Владивосток, 2007г.

«Развитие мыслительной деятельности учащихся в процессе преподавания математики» Владивосток 2005 г.