Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №1»
Саратовской области

Методическая разработка по математике
В 5-6 классе
«Логические задачи»

подготовила
учитель математики
Алимова Ирина Геннадьевна

Г.Энгельс
2014

Логические задачи

Логика-это искусство рассуждать, умение делать правильные выводы. Это не всегда легко, потому что очень часто необходимая информация «замаскирована», представлена неявно, и надо уметь ее извлечь.

Рассмотрим некоторые идеи и методы решения нестандартных задач.

1. Метод поиска родственных задач

Если задача трудна, то попытайтесь найти и решить более простую «родственную» задачу. Это дает ключ к решению исходной задачи. При этом полезно:

-рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;

-разбить задачу на подзадачи;

-обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);

-свести задачу к более простой.

Пример 1. В угловой клетке таблицы 5×5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

Решение. Возьмем квадрат 2×2 (один плюс, а в остальных клетках стоят минуса). Можно ли сделать все знаки плюсами? Нельзя! Воспользуемся этим результатом: выделим в квадрате 5×5 квадратик 2×2, содержащий один плюс. Про него уже известно, что сделать все знаки плюсами нельзя. Значит, в квадрате 5×5 и подавно этого сделать нельзя.

2. Метод «причесывания задач» (или «можно считать, что…»)

Можно решать задачу, как придется, а можно предварительно преобразовать ее к удобному для решения виду: переформулировать условие на более удобном языке (например, на языке чертежа), отбросить простые случаи, свести общий случай к частному. Такие преобразования сопровождаются фразами: «в силу четности», «явно не хуже», «для определенности», «не нарушая общности», «можно считать, что…».

Пример 2. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $\frac{2}{5}$. Докажите, что всего в классе мальчиков было не больше $\frac{4}{7}$.

Решение. Решение «в лоб» состоит в рассмотрении количества мальчиков, ходивших только в первых поход, ходивших только во второй поход, ходивших в оба похода, то же для девочек, что ведет к составлению нескольких уравнений. Поэтому избавимся от лишних неизвестных, сводя задачу к частному случаю. Проделаем это в несколько шагов. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг.

Будем увеличивать число мальчиков в классе, не изменяя числа девочек и не нарушая условия задачи.

1-й шаг. «Впишем» всех девочек в число участников обоих походов. От этого доля мальчиков в классе не изменится, а в походах – уменьшится. Итак, можно считать, что все девочки ходили в оба похода.

2-1 шаг. Если мальчик ходил в первый поход, то освободим его от посещений второго. Доля мальчиков в походе уменьшится. Итак, можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход.

3-й шаг. Если в одном походе было меньше мальчиков, чем в другом, то добавим в класс мальчиков. Доля мальчиков в походах уменьшится? Нет! Она останется не больше $\frac{2}{5}$, а доля мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков в походах поровну.

4-й шаг. Задача стала тривиальной: в обоих походах были все девочки и ровно половина мальчиков. Обозначим число девочек через $3x$, тогда мальчиков в походах было не меньше $2x$, а во всем классе – не больше $4x$. Максимальное число мальчиков в классе $4x$, а это $\frac{4}{7}$ класса.

3. Метод «доказательство от «противного»

Рассуждают примерно так: «Допустим, исходное утверждение не верно. Если из этого получим противоречие, то исходное утверждение верно».

Пример 3. Существует ли самое большое число?

Решение. Допустим. Что существует. Тогда прибавим к этому числу единицу и получим еще большее число. Противоречие. Значит, сделанное предложение неверно, и такого числа не существует.

4. Метод «четно – нечетно»

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определенную четность. Из этого следует, что ситуации, в которых данная величина имеет другую четность, невозможны. Иногда эту величину надо «сконструировать», например, рассмотреть четность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты на два цвета и т.д.

Пример 4. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1м). докажите, что он сделал четное число прыжков.

Решение. Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, то количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков четно.

5. Обратный ход

Если в задаче задана некоторая операция, и она обратимо, то можно сделать «обратный» ход от конечного результата к исходным данным. (Например, надо вынести шкаф из комнаты. Пройдет ли он через дверь? Пройдет, потому что через дверь его внесли.) Анализ с конца используют при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

Пример 5. Три мальчика делали 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал толе и Пете столько, сколько у них стало. И, наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько было фантиков у каждого в начале?

Решение. Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было вдвое меньше – по 20, а у Толи – 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т.е. у Пети было 10, у Толи – 40, у Вани – 70. И, наконец, возьмем половину фантиков у Вани и Толи и вернем Пете.

Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани – 20, а у Толи – 35.

6. Метод «Круги Эйлера»

Пример 6. Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекается коллекционированием?

Решение. В условии этой задачи не так легко разобраться. Если сложить 23 и 35, то получится больше 52. Это объясняется тем, что некоторые школьники собирают и значки, и марки. Чтобы легче решить задачу, представим ее данные на следующей схеме (рис.1). большой круг обозначает всех школьников, о которых идет речь. Круг З изображает школьников, собирающих значки (всего из 23), а круг М – собирающих марки (всего их 35). В пересечении кругов З и М стоит число 16 – это те, кто собирает и значки, и марки. Значит, только значки собирает 23 – 16 = 7 школьников, только марки собирает 35 – 16 = 19 человек.

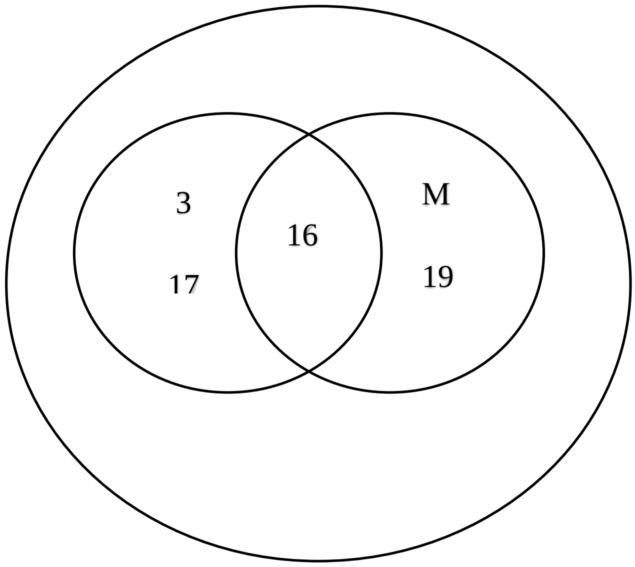

Рис. 1

Всего марки и значки собирает 19 + 7 + 16 = 42 школьника. Остается 52 – 42 = 10 школьников, не увлеченных коллекционированием. Это число можно вписать в свободное поле большого круга.

Такие схемы называют *кругами* (или *диаграммами*) *Эйлера*.

Не стремитесь одновременно решать много задач. Если вы за день решите две – три задачи и все хорошо продумаете, то это будет лучше, чем решить десять задач поверхностно. Важно не количество решеных задач, а то новое, что удалось понять. Если у вас после решения задач поднимается настроение – это признак успешной работы.