Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала.

Ведь с задачами (житейскими, производственными, научными) человек встречается ежедневно. Любое дело, любая работа в конечном счете сводится к решению задач. Поэтому научиться решать задачи чрезвычайно важно.

Умение решать математические задачи оказывает огромное влияние на общее умение решать задачи. Почему некоторые ученики не умеют самостоятельно решать задачи, не знают, как подступиться к решению новой незнакомой задачи?

Главная причина состоит в том, что эти ученики не понимают сущности задач, сущности их решения, не владеют общими методами поиска их решений.

Нужно разобраться в том, что составляет сущность решения задач, какова структура процесса решения, в чем особенности отдельных этапов этого процесса.

В учебном процессе упражнения (задачи) могут выполнять разные функции: служить средством усвоения знаний, стимулировать познавательную деятельность школьников, выступать одной из форм проявления методов обучения, служить средством контроля за усвоением содержания обучения. Каждый из признаков упражнений, взятый сам по себе, отдельно от других, имеет лишь определенное назначение. Поэтому, чтобы понять сущность понятия упражнения, следует учитывать все его аспекты. Однако для каждой конкретной ситуации может быть использован лишь один из указанных выше существенных признаков упражнений, например рассмотрение упражнения как средства формирования умений.

В учебном процессе упражнения могут выполнять свое назначение, если они представлены в определенной системе.

Любые упражнения в обучении выполняются с определенной целью (формирование понятий, систематизация понятий, обучение доказательству и т.д.). Все эти цели связаны между собой и с целями обучения в школе.

Выполнение упражнений вызывает разные виды умственной деятельности учащихся (репродуктивную, творческую). Поэтому в системе "Упражнения" в качестве ее компонента должна выступать умственная деятельность учащихся.

Очевидно, что выполнение различных по содержанию упражнений вызывает разные виды умственной деятельности учащихся. Умственная деятельность учащихся зависит не только от содержания упражнений, но и от последовательности их выполнения.

Так, для лучшего усвоения учащимися темы "Преобразование трехчлена ***a2+2ab+b2*** в квадрат двучлена" целесообразно рассмотреть такие упражнения:

***(а+3)2= ...***

***(х-0,5)2= ...***

***(с2+Зс+2,25) = (... + ...)***

***х2 - 6х + ... = ( х-...)2 .***

***а2 + 2а - 7 = (а + 1)2 -...*** и т.п. .

В целях формирования умения в виде элементарных упражнений можно охватить все (или почти все) возможные разновидности применения формируемого умения. Например, при возведении двучлена в квадрат нужно предложить такие упражнения:

***(а + b)2, (х-у)2, (-а + b)2, (-х - у)2, (а + 0,5)2, (За + 1)2,-(а + b)2, (-(а + b))2,***

***(х3 - 2х)2, (5х2-2х)2, (10 + 0,5)2***.

Возникает вопрос: каким должно быть оптимальное число однотипных упражнений?

Рассмотрим упражнения на преобразования трехчлена ***a2±2ab+b2*** в квадрат двучлена ***(а ±b).***

Экспериментально доказано, что более эффективна такая последовательность выполнения упражнений: три упражнения на прямое применение формул. Например:

1. Вычислите ***582 - 382***,
2. Разложите на множители а) ***b2 - 36***, б) ***25х2 - 9у2***.

Затем одно из упражнений, выполнение которых приводит к "сбою" в применении формулы. Например: "Если возможно, разложите на множители:

а) ***352 + 222***, б) ***4а4 – 16b2***, в) ***3а3-4b2*** " и т.д.

В совокупность упражнений на разложение на множители желательно включение упражнений на выполнение обратного действия. "Обычные" упражнения в разложении на множители целесообразно чередовать и с упражнениями типа "Заполните пропущенные места в выражении:

а) ***b2 + 20b +***

б) ***…- 49b10 = ( + 7b5)(4а4 - )***,

в) **..... *- 42pq + 49q2***.

Очевидно, что подобные упражнения способствуют формированию творческого мышления (нестандартность условий, соотнесение между собой различных действий и т.д.);. при их выполнении объединяются прямые и обратные действия. Должны быть предусмотрены упражнения на преобразование таких выражений, как ***(а+b)2 - р2, а(х - у) - (у - х).***

Целесообразно применение различных формулировок: разложите на множители, представьте в виде произведения, вычислите и т.д.

Итак, можно сделать **вывод**:

* 1. Если взаимно обратные действия изучаются раздельно, то в совокупность упражнений, выполнение которых требует прямых действий, следует включать упражнения на обратные действия. Этим достигается быстрое переключение мышления школьника с прямых на обратные действия и наоборот, исключается развитие инерции мышления.
  2. При одновременном изучении (на одном уроке) взаимно обратных действий следует выполнять упражнения вперемежку.

При изучении темы "Формулы сокращенного умножения" требуется запоминание громоздких формулировок. Целесообразно поэлементное усвоение содержания теоремы. Для этого формулировка теоремы разбивается на отдельные элементы (в тексте элементы отделяются вертикальной чертой), после чего каждый из элементов используется при выполнении упражнений.

Формулировка теоремы: "Квадрат двучлена равен сумме трех выражений: квадрата первого члена, удвоенного произведения первого члена на второй и квадрата второго члена" - может быть разбита на следующие элементы: " Квадрат двучлена/ равен сумме трех выражений:/ квадрата первого члена,/ удвоенного произведения первого члена на второй/ и квадрата второго члена". Затем выполняются упражнения с последовательным использованием каждого элемента.

Верны ли равенства:

а) ***(a+b)2 = a2+2ab+b2***;

б) ***(а-7)2 = а2 - 14а + 49***;

в) ***(3+х)2 = 9+Зх+х2***;

г) ***(-х+5)2 — х2-10х+25***;

д) ***(a-2b)2 = a2-4ab+2b2***.

Один из учащихся вызывается к доске, другой работает с текстом, остальные выполняют упражнения в тетрадях. Ученик читает:" Квадрат двучлена", другие учащиеся убеждаются, что выражение, например, ***(а-7)2*** есть квадрат двучлена и т.д., последовательно соотнося каждый элемент формулировки теоремы с соответствующим элементом выражения. Указанное соотнесение может выполняться учащимися самостоятельно при контроле учителем их действий.

Часть деятельности ученика по решению математической задачи может протекать по готовому алгоритму.

Например, решение задачи по разложению многочлена на множители производится с помощью следующих операций в таком порядке:

* + 1. Вынесение общего множителя за скобки.

Проверяем, не имеют ли все одночлены, входящие в многочлен, общего множителя. Если да, то выносим его за скобки, если нет, то переходим к следующей операции.

* + 1. Применение тождеств сокращенного умножения.

Проверяем, не представляет ли заданный многочлен такое выражение, к которому непосредственно применимо одно из тождеств сокращенного умножения (разность квадратов, квадрат или куб двучлена, разность или сумма кубов). Если да, то применим это тождество, если нет, то переходим к следующей операции.

* + 1. Группировка членов.

Разбиваем многочлен на несколько (две или более) групп и к каждой из них пытаемся применить первые две операции.

Применим эту последовательность операций к заданному многочлену , ***6х3у+3х2у2-3ху3***.

Все члены многочлена N имеют общий множитель Зху. Выносим его за скобки. Получим:

***N = Зху(2х2+ху-у2).***

Теперь попытаемся разложить на множители многочлен Р, стоящий в скобках. Очевидно, что к нему первые две операции (вынесение общего множителя за скобки и применение тождеств сокращенного умножения) неприменимы. Попытаемся тогда произвести группировку членов. Так как многочлен можно разбить минимум на два многочлена и в каждом из них должно быть не менее двух членов, то, для того чтобы можно было произвести группировку, в данном многочлене должно быть не менее четырех членов. А в многочлене Р имеется всего три члена. В таком случае разобьем один из членов на два. Удобнее это сделать с первым членом. Тогда многочлен Р принимает такой вид:

***Р = х2 + х2+ху-у2***.

Группировка его членов возможна таким образом: ***Р=(х2-у2)+(х2+ху).***

Видим, что первая группа членов представляет собой разность квадратов и, следовательно, к ней применимо соответствующее тождество, а ко второй группе применима операция вынесения общего множителя х за скобки. Получим

***Р=(х-у)(х+у)+х(х+у).***

Рассматривая теперь полученные два произведения, видим, что они содержат общий множитель ***(х+у).*** Выносим его за скобки:

***Р=(х+у)(х-у+х)=(х+у)(2х-у).***

Тогда окончательно получим:

***N = Зху(х+у)(2х-у).***

Однако, если обучение тождественным преобразованиям выражений осуществлять только на примерах задач одного и того же вида "Разложить на множители" ("Представить в виде произведения"), то многие учащиеся не могут осознать способ действия по разложению многочлена на множители и допускают ошибки как в поиске решения, так и в самом решении, при этом приемы разложения многочлена на множители могут сформироваться лишь стихийно, в случае же управляемого пути усвоения формируется обобщенная цель деятельности (ставится учебная задача): осознать и усвоить способ действия по разложению многочленов на множители. Затем строится система учебных заданий с конкретными целями, направленными на достижение обобщенной учебной цели.

Привожу примеры нескольких заданий, выполнение каждого из которых основано на предыдущем:

ПРИМЕР 1. Разложите многочлен на множители способом группировки ***5х + mу- 5у -mх.***

Задание 1. Выявите структуру данного многочлена.

Задание 2. Установите виды тождественных преобразований, которые необходимо выполнить, чтобы разложить данный многочлен на множители.

Задание 3. Раскройте состав приема разложения многочлена на множители группировкой его членов (перечислите по порядку действия, которые для этого нужно сделать).

Задание 4. Пользуясь полученным приемом, разложите данный многочлен на множители.

ПРИМЕР 2. Разложите на множители многочлены:

а) ***mх + mу + 6х + 6у***; в) ***1 - bx - х + b;***

б) ***7а- 7b + an - bn*** ; г) ***ху + 2у-2х-4***.

Задание3. Пользуясь составленным приемом, научитесь разлагать многочлен на множители группировкой его членов.

ПРИМЕР 3. Решите уравнения:

а) ***х3 - 2х2 - х + 2 = 0;*** в) ***у3 - у2 = 16у - 16***;

б) ***2у3 - у2 - 32у + 16 = 0;*** г) ***4х3 - Зх2 = 4х - 3*** .

Задание. Научитесь применять разложение многочлена на множители к решению уравнений.

Аналогично может быть построено изучение других способов разложения многочлена на множители, которые затем обобщаются. В таблице показано, как организуется деятельность ученика по разложению многочлена ***9х3 - ху2 + Зх2 - ху*** на множители с опорой на обобщенный прием разложения многочленов на множители:

|  |  |
| --- | --- |
| **Состав приема учебной деятельности** | **Деятельность ученика** |
| 1, Изучить структуру данного многочлена: каковы слагаемые и их коэффициенты, есть ли общий множитель у всех членов или отдельных их групп, есть ли структура какой-либо формулы сокращенного умножения. | В этом многочлене есть общий множитель х, после вынесения его за скобку первые два слагаемых будут представлять собой разность квадратов двух выражений. |
| 2. Исходя из п.1, установить, какие и в каком порядке нужно выполнить тождественные преобразования, чтобы разложить многочлен на множители. | Вынести за скобку общий множитель х , сгруппировать слагаемые по два (по порядку), учитывая знаки, разложить на множители разность квадратов. |
| 3. Выполнить выбранные преобразования: | ***9х3 - ху2 + Зх2 - ху = х( 9х2 - у2 + Зх - у ) = =х(( Зх - у)(Зх + у) + (Зх - у)).*** |
| 4. Если нужно, повторить п.п. 1-3. | Вынесите за скобку полученный общий множитель: ***х( Зх - у)( Зх + у + 1).*** |
| 5, Если нужно, сделать проверку. |  |
| 6. Записать ответ. | ***9х3 - ху2 + Зх2 - ху = х( Зх - у)( Зх + у + 1).*** |

Итак, решение любой задачи состоит в том, что находят такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи или к их следствиям в конечном итоге удовлетворяют требованиям задачи.

Наибольшая трудность в решении задачи - это нахождение указанной последовательности общих положений математики.

Если эта последовательность уже найдена, то все остальное в решении - применение этих общих положений к условиям задачи или к следствиям, не представляет большого труда.

Для многих задач в самой математике разработаны эти последовательности общих положений, которые образуют известные общие правила (алгоритм) решения задач определенного вида.

Например, формула ***(а + b)2 = а2 + 2ab + b2*** есть правило возвышения двучлена в квадрат. Для применения этого правила к решению какой-либо задачи надо правило развернуть в пошаговую программу. Покажем, как это делается на примере решения задачи.

Представить в виде многочлена выражение ***(2х - Зу)2***.

|  |  |
| --- | --- |
| 1-й шаг. Найти в заданном двучлене первый и второй члены. | ***а = 2х, b = -Зу.*** |
| 2-й шаг. Возвысить первый член в квадрат. | ***а2 = 4х2.*** |
| 3-й шаг. Найти удвоенное произведение членов двучлена | ***2ab = 2(2х)(-3у) = - 12ху.*** |
| 4-й шаг. Возвысить второй член в квадрат. | ***b2 = (-Зу)2 = 9у2.*** |
| 5-й шаг. Сложить результаты 2, 3 и 4-го шагов. | ***4х2 - 12ху + 9у2.*** |

Математические задачи, для которых в математике имеются готовые правила - программы их решения, называются стандартными. Решение стандартных задач особых трудностей не представляет. Надо лишь распознать вид данной задачи, вспомнить соответствующее этому виду задач правило решения, развернуть это правило в пошаговую программу и применить ее к условиям данной задачи.

Значительно труднее решать нестандартные задачи, для которых нет готовых правил. Решение нестандартных задач состоит в том, чтобы свести их к решению одной или нескольких стандартных задач.

Чтобы повысить интерес ребят к предмету, внести некоторый элемент новизны, поддержать их активность на протяжении урока, Можно изучение новых тем провести в виде игры. В книге В.Г.Коваленко "Дидактические игры на уроках математики" приводится пример использования дидактической игры "Математический поединок" в процессе усвоения формул сокращенного умножения.

ТЕМА: "Произведение суммы и разности двух одночленов".

В процессе игры " математический поединок" происходит приобретение новых знаний, поэтому игра проводится на этапах урока по усвоению и закреплению знаний. Основой ее является соревнование между командами при ответах на вопросы и решении упражнений, предложенных учителем, а также при доказательстве математических предложений. Такое название игры выбрано потому, что на равных условиях соревнуются две команды.

Игровой замысел состоит в том, чтобы на основе созданной проблемной ситуации и соревнования команд активизировать мышление учащихся, превратить весь процесс обучения в процесс активной поисковой деятельности и самостоятельных открытий. Этапы игры совпадают с этапами урока. Это в большинстве случаев актуализация опорных знаний, изучение нового материала, закрепление изученного на уроке, проверка знаний учащихся по теме урока.

Для проведения игры класс делится на две команды. Выбираются капитаны команд и их ассистенты. Капитаны следят за порядком и дисциплиной в команде и сами участвуют в игре. Ассистенты при необходимости дают консультации. Разрешаются консультации также между учениками одной команды.

При проведении урока должны соблюдаться следующие правила игры:

1. За правильный ответ команде начисляются очки; ошибка, допущенная в ответе, неправильный ответ, нарушение дисциплины приводят к штрафным очкам.
2. Каждый член команды может вновь отвечать только после того, как ответят все члены команды. Это исключает случаи, когда некоторые ученики за урок ни разу не опрашиваются.
3. Вопросы и задания дает учитель. Счет соревнования записывается на доске.
4. После постановки общего задания разрешаются консультации внутри команд.
5. Все необходимые записи по указанию учителя заносятся в тетрадь.
6. На определенном этапе работы сначала одна команда является "первопроходцем". Деятельность второй команды состоит в том, чтобы внимательно следить за правильностью ответов, выполнять по указанию учителя записи в тетрадях, а после завершения изучения некоторой части материала ответить на вопросы, предложенные учителем, и выполнить задания, аналогичные рассмотренным. Затем роли команд меняются.
7. За правильные аргументированные дополнения ответов учащихся из другой команды каждый может получить дополнительно два очка.

Игровые действия состоят в том, чтобы быстро и без ошибок отвечать на вопросы учителя, выполнять нужные записи и построения в тетрадях, следить за правильностью ответов своих товарищей из своей и другой команды, решать примеры и задачи у доски, во время объявленной консультации консультировать соседей по парте или, при необходимости, самому брать консультации, не нарушать дисциплину, быть внимательным и активным.

Познавательное содержание состоит в том, чтобы учащиеся усвоили формулу сокращенного умножения ***(а - b )( а + b ) = а2 - b2*** и могли применять ее при умножении чисел и двучленов определенного вида.

ЗАДАНИЯ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

* 1. Выполнить устно умножение: ***251 • 2; 8,5 • 6; 25 • 12; 496 • 125; 23 • 98***.
  2. Найти числовые значения выражения: 1839 • 7

Объяснить используемые правила умножения. Задания второй команде аналогичны. Меняются только упражнения.

ЗАДАНИЯ ВТОРОЙ КОМАНДЕ.

* + 1. Выполнить устно умножение двучлена на одночлен***: (с + d) m***.
    2. Сформулировать распределительный закон умножения.
    3. Дать геометрическую интерпретацию распределительного закона.

Аналогичные задания предлагаются первой команде.

ЗАДАНИЯ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ

* + - 1. Умножить двучлен на двучлен: ***(с + d)(m + n).***
      2. Дать геометрическую интерпретацию полученного тождества.
      3. Прочесть выражение: ***(a + b)(a-b); m(c-d).***

Задания второй команде аналогичны.

Выполнение приведенных подготовительных упражнений детерминирует мысль учащихся, ставит вехи на пути к решению учебной проблемы.

Подводятся итоги первого этапа игры.

Учитель предлагает задание обеим командам одновременно: найти устно произведения ***199 • 201; 102 • 98***. Учащиеся не в состоянии выполнить вычисления. К удивлению класса, учитель быстро находит произведение записанных чисел. Учащиеся понимают, что имеющихся у них знаний недостаточно, чтобы справиться с поставленной задачей. Создается проблемная ситуация, связанная с желанием научиться успешно находить произведение двух чисел.

ЗАДАНИЯ ВТОРОЙ КОМАНДЕ.

* + - * 1. Используя правило умножения двучлена на двучлен, найти произведение ***59 • 61***. Один из учеников II команды записывает процесс решения данного упражнения на доске, а все остальные в тетрадях: ***59 • 61 = (60 -1 )( 60 + 1 ) = 3600 + +60 - 60 -1 = 3599.***

Другой ученик выполняет записи для примера ***199 • 201***.

Аналогичные примеры выполняют учащиеся I команды.

ЗАДАНИЕ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

Упростить записи в примерах данного вида. При умножении, например, ***28 • 32*** учащиеся приходят к записи ***28 • 32 = (30 - 2)(30 + 2) = 302 - 22***.

Аналогичный пример II команде.

ЗАДАНИЯ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

* + - * 1. Найти произведение двучленов : ***(а - b)(а +b).***

2) Записать произведение суммы двух выражений на их разность, опустив промежуточные действия : ***(3а – 5b)( 3а + 5b).***

3) Прочесть выражения ***(а - b)(а +b)=a2-b2***.

Аналогичные вопросы получает II команда.

ЗАДАНИЯ ВТОРОЙ КОМАНДЕ.

1) Сформулировать правило сокращенного умножения суммы двух одночленов на их разность.

Такое же задание дается I команде.

Кульминационным моментом мышления в поисковой деятельности есть' переход от конкретного примера ***59 • 61*** к общей формуле: ***(а - b )(а + b ) = а2 - b2***.

Подводятся итоги второго этапа игры. Поощряются те ученики, которые дополняли ответы членов другой команды.

Дальше идет этап закрепления знаний.

ЗАДАНИЕ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

Выполнить устно умножение: ***43 • 37; (х + 3)(х - 3); (m - n)( m + n).***

Аналогичные вопросы получает II команда.

ЗАДАНИЕ ВТОРОЙ КОМАНДЕ.

* 1. Выполнить устно умножение: *3****1 • 29; (a + 5)( a - 5); (с - d )( с + d).***

Записать произведение в виде разности квадратов двух одночленов:

***(10а - Зb)(10а + Зb); (а2 - 3)( а2 + 3); (а3 + х3 )(а3 - х3).***

ЗАДАНИЕ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

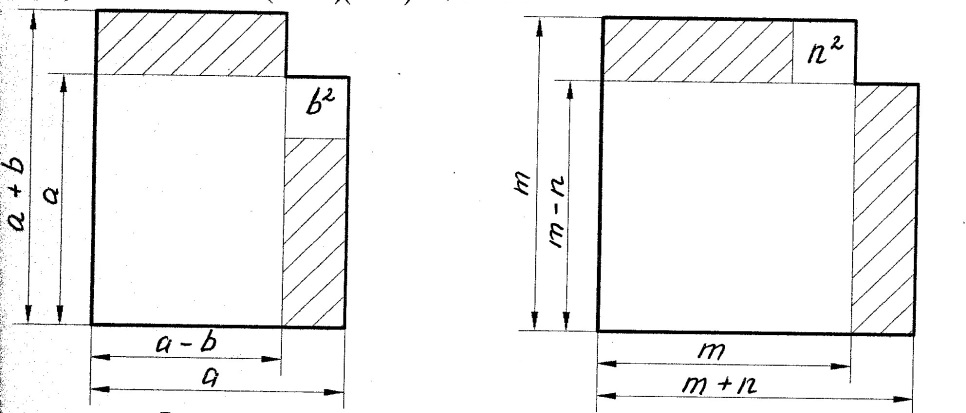
Записать произведение в виде разности квадратов двух одночленов :

***(2х - 1)(2х +1); (12у + 5z)(12y - 5z); (m2 + y2)(m2 - у2).***

ЗАДАНИЕ ПЕРВОЙ КОМАНДЕ.

Используя изображение, на доске (рис.1), объясните геометрическую интерпретацию формулы: ***(а + b)(a - b) = а2 - b2***.

Используя рисунок 2 , предлагается аналогичное задание II команде для формулы ***(m + n)(т - n) = m 2 - n 2***.



Подводятся итоги игры. Учащиеся выигравшей команды, принесшие команде наибольшее число очков, получают поурочный балл. При наличии времени учитель продолжает опрос на оценку или проводит самостоятельную заботу. Ученики обеих команд, выполнившие работу, получают оценки.

Результат игры. Учащиеся обогатились знаниями и умениями применять формулу сокращенного умножения для умножения чисел и двучленов.

Ценность дидактических игр заключается в том: что в процессе игры дети в значительной мере самостоятельно приобретают новые знания, активно помогая друг другу в этом. Ребята, как правило, очень довольны подобными уроками. Они бурно обсуждаются и ребята с интересом ждут новых. Сами того не замечая, учащиеся приучаются к сотрудничеству, самоуправлению, взаимовыручке и ответственности

Список используемой литературы.

1. М. Фридман. Как научиться решать задачи. М., " Просвещение ", 1989.

2. Ш.Епишева, В.И. Крупич. Учить школьников учиться математике. М.,

" Просвещение", 1990.

3. М. Фридман. Учитесь учиться математике. М., "Просвещение", 1985.

4. Д. Семушин, С.Б. Суворова. Из опыта преподавания математики в школе. "Просвещение", 1978.

5. Саранцев. Упражнения в обучении математики. М., "Просвещение", 1995

6. В.Г. Коваленко. Дидактические игры на уроках математики. М., Просвещение", 1990.